На правах рукописи

Урбанович Татьяна Михайловна

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ КОШИ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород – 2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Солдатов Александр Павлович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор
Асхабов Султан Нажмудинович
декан факультета математики и
компьютерных технологий Чеченского
государственного университета

кандидат физико-математических наук
Жура Николай Андреевич
старший научный сотрудник
Физического института
имени П. Н. Лебедева РАН

Ведущая организация: **Южный федеральный университет**

Защита диссертации состоится 5 марта 2013 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при Белгородском государственном национальном исследовательском университете по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, корп. 1, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного национального исследовательского университета.

Автореферат разослан 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.015.08 Гриценко С. А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Теория сингулярных интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций привлекает интерес математиков и механиков в течение многих лет. Одним из методов исследования сингулярного интегрального уравнения является сведение его к соответствующей краевой задаче для аналитических функций.

Начало исследования краевых задач для аналитических функций восходит к классическим работам Б. Римана[1] и Д. Гильберта.[2] Большой вклад в создание и развитие теории краевых задач и сингулярных интегральных уравнений внесли Ю. В. Сохоцкий, В. Вольтерра, И. Племель, Ф. Нётер, Т. Карлеман, И. Н. Векуа, Н. И. Мусхелишвили, Ф. Д. Гахов, Б. В. Хведелидзе, З. Пресдорф, С. Г. Михлин, Л. Г. Михайлов, Л. И. Чибрикова, Л. А. Аксентьев, Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук, Н. В. Говоров, А. П. Солдатов и другие.

Развитие этой теории активно продолжается в настоящее время в работах Э. И. Зверовича, Л. Г. Михайлова, Н. Усмонова, В. И. Власова, С. И. Безродных, Э. Вегерта, Ю. В. Обносова, В. В. Сильвестрова, С. Н. Асхабова, А. П. Солдатова и других. Стимулирующим фактором для этого являются многочисленные применения к актуальным прикладным проблемам как в традиционных (гидро- и аэродинамика,[3] теория упругости[4]), так и в современных (теория композиционных материалов,[5] теория гетерогенных сред,[6] физика плазмы[7]) областях исследования.

Напомним, что краевой задачей Римана в исключительном случае[8] называется задача отыскания кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$, аналитической внутри и вне простого гладкого замкнутого контура Γ,

[1] *Риман, Б.* Сочинения/ Б. Риман. — М.-Л.: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948. — 543 с.

[2] *Hilbert, D.* Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie/ D. Hilbert// Verhandl. des III Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904.

[3] *Елизаров, А. М.* Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике/ А. М. Елизаров, А. Р. Касимов, Д. В. Маклаков. — М.: Физматлит, 2008. — 480 с.

[4] *Журавков, М. А.* Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Курс лекций/ М. А. Журавков. — Минск: БГУ, 2008. — 247 с.

[5] *Milton, G. W.* The theory of composites/ G. W. Milton. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2002. — 719 p.

[6] *Обносов, Ю. В.* Краевые задачи теории гетерогенных сред/ Ю. В. Обносов. — Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2009. — 205 с.

[7] *Безродных, С. И.* Обобщенные аналитические модели токового слоя Сыроватского/ С. И. Безродных, В. И. Власов, Б. В. Сомов// Письма в Астрономический журнал. — 2011. — Т. 37, № 2. — С. 133-150.

[8] *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи/ Ф. Д. Гахов. — 3-е изд. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

предельные значения которой удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(t-b_k)^{\beta_k}} G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in \Gamma, \tag{1}$$

где a_j, b_k — некоторые точки контура Γ, $a_j \neq b_k$, $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $G(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и не обращающаяся в нуль на контуре Γ.

Решение задачи (1) в случае замкнутого контура Γ впервые было дано Ф. Д. Гаховым в 1941 году в его докторской диссертации. Решения отыскивались в классе кусочно-аналитических функций, граничные значения которых в исключительных точках могли иметь лишь интегрируемые особенности. Чтобы обеспечить разрешимость задачи (1) в этом классе функций, предполагалось, что коэффициент $G(t)$ и свободный член $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера и дифференцируемы в окрестности точек a_j, b_k достаточное число раз. Л. А. Чикин[9] продолжил и углубил эти исследования.

Напомним, что сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши в исключительном случае называется уравнение вида

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_\Gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \tag{2}$$

для которого

$$\begin{aligned} a(t)+b(t) &= \textstyle\prod_{j=1}^{m}(t-a_j)^{\alpha_j} r(t), \\ a(t)-b(t) &= \textstyle\prod_{k=1}^{n}(t-b_k)^{\beta_k} s(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $r(t)$ и $s(t)$ не обращаются в нуль на контуре Γ; a_j, b_k — точки контура Γ, $a_j \neq b_k$; α_j, $\beta_k \in \mathbb{Z}_+$.

Если $K(t,\tau) = 0$ и выполняются предположения (3), то получим характеристическое сингулярное уравнение в исключительном случае

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t). \tag{4}$$

Уравнение (2) в предположениях (3) было полностью исследовано Ф. Д. Гаховым и Л. А. Чикиным методом сведения к краевой задаче Римана для случая, когда обе функции $a(t) \pm b(t)$ могут обращаться

[9] *Чикин, Л. А.* Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений/ Л. А. Чикин// Учёные записки Казанского гос. ун-та им. В.И. Ульянова-Ленина. — 1953. — Т. 113, кн. 10. — С. 57-105.

в нуль целых порядков в различных точках контура интегрирования. Д. И. Шерман[10] независимо от работ Ф. Д. Гахова другим методом дал исследование исключительных случаев уравнений с ядром Коши в предположении, что только одна из функций $a(t) \pm b(t)$ имеет нули целых порядков на контуре Γ.

Дальнейшее исследование исключительных случаев сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши продолжили в самых различных направлениях Б. В. Хведелидзе, Ф. Д. Гахов, Е. А. Косулин, З. Пресдорф, А. И. Тузик, А. А. Килбас, В. Б. Дыбин, В. С. Рогожин, Т. Н. Радченко, Л. В. Карташева, С. Н. Расламбеков и другие авторы. В частности, А. А. Килбас[11] и А. И. Тузик[12] исследовали уравнение (2) в предположениях

$$a(t) + b(t) = \prod_{i=1}^{\nu}(t - c_i)^{\gamma_i} \prod_{j=1}^{m}(t - a_j)^{\alpha_j} r(t),$$

$$a(t) - b(t) = \prod_{i=1}^{\nu}(t - c_i)^{\gamma_i} \prod_{k=1}^{n}(t - b_k)^{\beta_k} s(t),$$

где $r(t)$ и $s(t)$ нигде на Γ не обращаются в нуль; a_j, b_k, c_i - точки контура Γ, $a_j \neq b_k$, $a_j \neq c_i$, $b_k \neq c_i$; α_j, β_k, $\gamma_i \in \mathbb{Z}_+$. Решение получено в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

В данной работе рассматривается ситуация, когда функции $a(t) \pm b(t)$ допускают на контуре Γ конечное число нулей произвольных неотрицательных порядков.

Цель работы. Целью данной работы является исследование сингулярных интегральных уравнений в исключительном случае с произвольными порядками нулей.

Научная новизна.

1. Получены условия разрешимости и явная формула решения сингулярного интегрального уравнения в исключительном случае с произвольными порядками нулей в классах Гёльдера на вещественной прямой.

2. Установлена асимптотика интеграла типа Коши с весом в классах гладких функций в особых точках кривой.

3. В семействе весовых классов Гёльдера получены условия разрешимости и явная формула решения задачи линейного сопряжения

[10] *Шерман, Д. И.* Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений/ Д. И. Шерман// Прикладная математика и механика. — 1951. — Т. 15, вып. 1. — С. 75-82.

[11] *Килбас, А. А.* Решение в замкнутой форме полного особого интегрального уравнения с аналитическим ядром в исключительном случае/ А. А. Килбас// Известия АН БССР. — 1974. — № 1. — С. 129-130.

[12] *Тузик, А. И.* К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в исключительном случае/ А. И. Тузик// Известия АН БССР. — 1970. — № 2. — С. 125-127.

и соответствующего сингулярного уравнения в исключительном случае на гладком замкнутом контуре.

Методы исследования. Для решения поставленных задач были использованы методы теории функций и функционального анализа, сингулярных интегральных уравнений и теория интеграла типа Коши.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут быть использованы для последующего развития общей теории сингулярных интегральных уравнений.

Апробация работы. Наиболее значимые результаты диссертации докладывались на

— 4-ой Международной математической конференции AMADE — 2006, посвященной столетию со дня рождения академика Ф. Д. Гахова (Минск, 13 — 19 сентября 2006 г.).

— Международной математической конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной столетию со дня рождения академика И. Н. Векуа (Новосибирск, 28 мая — 2 июня 2007 г.).

— 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 1 — 4 июня 2009 г.).

— 5-ой Международной математической конференции AMADE — 2009 (Минск, 14 — 19 сентября 2009 г.).

— 6-ой Международной математической конференции AMADE — 2011, посвящённой памяти проф. А. А. Килбаса (Минск, 12 — 17 сентября 2011 г.).

— Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» (Белгород, 17 — 21 октября 2011 г.).

— Международной конференции молодых учёных «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик, 5 — 8 декабря 2011 г.).

— Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева (Новосибирск, 5 — 12 августа 2012 г.).

— 23-ей Крымской осенней математической школе-симпозиуме (Украина, Крым, Ласпи-Батилиман, 17 — 29 сентября 2012 г.).

— 4-ой Международной конференции молодых учёных по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я. Б. Лопатинского (Украина, Донецк, 15 — 17 ноября 2012 г.).

— II Международной конференции молодых учёных «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (Терскол, 28 ноября — 1 декабря 2012 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[15], список которых приведен в конце автореферата. Публикации [5], [11], [13] выполнены в изданиях из перечня ведущих периодических изданий, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов. В совместных с А. П. Солдатовым статьях [5], [8], [9] научному руководителю принадлежат постановка задач и выбор методик исследования, а соискателю — реализация указанных методик.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на пункты, и списка литературы. Объем диссертации составляет 82 страницы, библиография – 115 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. П. Солдатову за постановку задач, поддержку и внимание к работе.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен краткий исторический обзор теории сингулярных интегральных уравнений и краевых задач для аналитических функций, изложена актуальность темы, а также цель работы, методы исследования, научная новизна, публикации по теме диссертации и личный вклад автора в совместные работы, апробация работы, значимость, структура и содержание работы.

В **первой главе** рассматривается характеристическое сингулярное интегральное уравнение на прямой в исключительном случае. Все исследования проводятся в классах Гёльдера.

Класс функций Гёльдера на расширенной прямой будем обозначать $H(\mathbb{R},\infty)$. Условие $\varphi(\infty)=0$ выделяет в классе $H(\mathbb{R},\infty)$ подкласс, который обозначим $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$. Пусть E — конечное множество, $E\subset\mathbb{R}$. Обозначим $\overset{*}{H}(\mathbb{R},E;\infty)$ класс функций φ, которые принадлежат $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}\setminus U,\infty)$ вне любой окрестности U множества E, а в любой окрестности каждой точки $\tau\in E$, не содержащей других точек множества E, представимы в виде $\varphi_0(t)(t-\tau)^{-1}$, где $\varphi_0\in H$ и $\varphi_0(\tau)=0$.

В пункте 1.1 рассматривается исключительный случай характеристического сингулярного интегрального уравнения (4) на прямой в предположении, что функции $a(t)\pm b(t)$ имеют на контуре $\Gamma=\mathbb{R}$ нули нецелых порядков α_j и β_k, причём $0<\alpha_j<1$, $0<\beta_k<1$.

Пусть a_j, b_k — точки вещественной прямой. Введём обозначения

$$A(t)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t-a_j}{t-a'_j}\right)^{\alpha_j},\ B(t)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-b_k}{t-b'_k}\right)^{\beta_k},$$

где точки $a'_j, b'_k \in \mathbb{C}$ лежат вне действительной оси и ветви соответствующих степенных множителей выбраны с разрезом вдоль отрезков $\left[a_j,\ a'_j\right]$, $[b_k,\ b'_k]$. В этих обозначениях $a(t)\pm b(t)$ можно представить в виде

$$a(t)+b(t)=r(t)A(t),\quad a(t)-b(t)=s(t)B(t), \tag{5}$$

где функции $r(t)$, $s(t)$ принадлежат классу $H(\mathbb{R},\infty)$ и обратимы в этом классе.

Индекс Коши находится по формуле $\text{æ}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{s(t)}{r(t)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ и рассматривается функция $h(t)=\ln\dfrac{s(t)}{r(t)}-\text{æ}\ln\left(\dfrac{t-i}{t+i}\right)$, которая, очевидно, принадлежит классу $H(\mathbb{R},\infty)$.

Вводится обозначение

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{h(\tau)-h(\infty)}{\tau-z}d\tau,\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Каноническая функция строится следующим образом:

$$X(z)=\begin{cases}\exp\left(H(z)+h(\infty)\right), & \operatorname{Im} z>0,\\[2ex] \exp\left(H(z)\right)\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\text{æ}}, & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

$A(t)$, $B(t)$ представляются в виде $A(t)=A_+(t)A_-(t)$, $B(t)=B_+(t)B_-(t)$, где

$$A_\pm(z)=\prod_{\pm Im a'_j<0}\left(\frac{z-a_j}{z-a'_j}\right)^{\alpha_j},\ B_\pm(z)=\prod_{\pm Im b'_k<0}\left(\frac{z-b_k}{z-b'_k}\right)^{\beta_k}.$$

Вводятся следующие обозначения: $E=\{a_j, j=1,2,...,m\}$, $F=\{b_k, k=1,2,...,n\}$, $Y(t)=r(t)A_-(t)B_+(t)X^+(t)$.

Теорема 1.1. *Пусть $a(t),b(t)\in H(\mathbb{R},\infty)$, $f(t)\in\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$. Тогда при $\text{æ}\geq 0$ уравнение (4) в предположениях (5) безусловно разрешимо в классе $\overset{*}{H}(\mathbb{R},E\cup F;\infty)$ и его общее решение даётся формулой*

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)}+\frac{1}{B(t)s(t)}\right)f(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)}-\frac{1}{B(t)s(t)}\right)\frac{Y(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau-t)}d\tau+$$
$$+\left(\frac{1}{A(t)r(t)}-\frac{1}{B(t)s(t)}\right)\sum_{k=1}^{æ}p_k\frac{Y(t)}{(t+i)^k}$$

с произвольными коэффициентами $p_k\in\mathbb{C}$.

Если $æ<0$, *то для существования решения необходимо и достаточно выполнение* $-æ$ *условий разрешимости*

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau+i)^{k+1}}d\tau=0,\ k=0,1,...,-æ-1,$$

и (единственное) решение уравнения (4) в предположениях (5) даётся равенством

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)}+\frac{1}{B(t)s(t)}\right)f(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)}-\frac{1}{B(t)s(t)}\right)\frac{Y(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau-t)}d\tau.$$

В пункте 1.2 рассматривается исключительный случай характеристического сингулярного интегрального уравнения (4) на прямой в предположении, что функции $a(t)\pm b(t)$ имеют на контуре $\Gamma=\mathbb{R}$ нули произвольных положительных порядков $\alpha_\tau>0$:

$$\begin{aligned}a(t)+b(t)&=O(|t-\tau|^{\alpha_\tau})\text{ при }t\to\tau\in E,\\ a(t)-b(t)&=O(|t-\tau|^{\alpha_\tau})\text{ при }t\to\tau\in F,\end{aligned}\tag{6}$$

где конечные множества E и F не пересекаются. Множества E и F представлются в виде объединения непересекающихся подмножеств $E_\pm$ и $F_\pm$ соответственно.

Пусть

$$A_\pm(t)=\prod_{\tau\in E_\pm}\left(\frac{t-\tau}{t\pm i}\right)^{\alpha_\tau},\quad B_\pm(t)=\prod_{\tau\in F_\pm}\left(\frac{t-\tau}{t\pm i}\right)^{\alpha_\tau},\tag{7}$$

где ветви соответствующих степенных множителей выбраны с разрезом вдоль отрезков $[\tau,\mp i]$. В частности, $A_\pm(t)$ и $B_\pm(t)$ продолжаются до функций, аналитических в полуплоскости $D_\pm=\{z,\ \pm\operatorname{Im}z>0\}$, для этих продолжений используются те же обозначения.

Условия (6) уточняются следующим образом:

$$a(t)+b(t)=r(t)A_+(t)A_-(t),\quad a(t)-b(t)=s(t)B_+(t)B_-(t).\tag{8}$$

В принятых обозначениях требуется, чтобы функции $r(t)$, $s(t)$ в представлении (8) принадлежали классу $H(\mathbb{R}, \infty)$ и были обратимы в этом классе.

$A_\pm$, $B_\pm$ представляются в виде

$$A_\pm = A^0_\pm A^1_\pm, \quad B_\pm = B^0_\pm B^1_\pm, \tag{9}$$

где рациональные функции $A^0_\pm$, $B^0_\pm$ определяются аналогично (7) по целым частям $[\alpha_\tau]$ и аналогичный смысл имеют $A^1_\pm$, $B^1_\pm$ по отношению к дробным частям показателей.

Для целого k под $(k)_0$ здесь и ниже понимается неотрицательное число $(k+|k|)/2$. Кроме того, с порядками α_τ связаны неотрицательные целые числа

$$m_\pm = \sum\nolimits_{\tau\in E_\pm} [\alpha_\tau], \quad n_\pm = \sum\nolimits_{\tau\in F_\pm} [\alpha_\tau], \tag{10}$$

где $[\alpha_\tau]$ означает целую часть числа α_τ, и каноническая функция $X(z)$ определяется по r и s также как и выше.

Вводится обозначение $S(g) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{g(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Теорема 1.2. *Пусть коэффициенты a, b уравнения (4) представлены в виде (7), (8), где r, s принадлежат классу $H(\mathbb{R}; \infty)$ и обратимы в этом классе. Пусть $f \in \overset{\circ}{H} (\mathbb{R}; \infty)$ и*

$$g = \frac{f}{rX^+A^1_-B^1_+}, \quad q(t) = (t-i)^{m_-}(t+i)^{(æ+n_+)_0}. \tag{11}$$

Тогда любое решение φ уравнения (4) в классе

$$\left\{\varphi \,\Big|\, \frac{\varphi}{A^1_-B^1_+} \in \overset{*}{H} (\mathbb{R}, E\cup F; \infty)\right\} \tag{12}$$

представимо в виде

$$\varphi = \frac{X^+B^1_+}{A^0_-A_+}\left(\frac{g+S(g)}{2} + \frac{p}{q}\right) + \frac{rX^+A^1_-}{sB^0_+B_-}\left(\frac{g-S(g)}{2} - \frac{p}{q}\right) \tag{13}$$

с некоторым многочленом p степени меньше $m_- + (æ + n_+)_0$, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)dt}{(t+i)^{k+1}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(-i) = 0,\ 0 \le k \le (-æ - n_+)_0 - 1. \tag{14}$$

Обратно, если условия (14) выполнены и формула (13) определяет функцию из класса (12), то эта функция является решением уравнения (4).

Возникает задача описания условий на правую часть f уравнения (4) и многочлен p, обеспечивающих принадлежность функции (13) классу (12).

Сначала рассматривается случай $f = 0$ однородного уравнения (4).

Теорема 1.3. *В условиях теоремы 1.2 размерность пространства решений однородного уравнения (4) в классе (12) равна* $(æ - m_+ - n_-)_0$*. Более точно, при* $æ \leq m_+ + n_-$ *однородное уравнение (4) в этом классе имеет только нулевое решение, а при* $æ > m_+ + n_-$ *в обозначениях (11) его решениями служат функции*

$$\varphi = X^+ \left(\frac{B_+^1}{A_-^0 A_+} - \frac{r A_-^1}{s B_+^0 B_-} \right) \frac{p}{q}$$

с многочленами p *степени меньше* $m_- + (æ + n_+)_0$*, подчиненными условиям*

$$\left(\frac{p}{q} \right)^{(k)} (\tau) = 0, \ 0 \leq k \leq [\alpha_\tau] - 1, \ \tau \in E \cup F \cup \{-i\},$$

где для единообразия положено $[\alpha_{-i}] = (-æ - n_+)_0$.

Пусть $0 < r_0 < r_1$ и D есть один из полукругов $\{|z| < r_0, \ \pm \operatorname{Im} z > 0\}$. В полукруге D рассматривается интеграл

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-r_1}^{r_1} \frac{\varphi(t) dt}{t^\delta (t - z)}, \tag{15}$$

где $0 \leq \delta < 1$ и степенная функция фиксируется ее непрерывной ветвью в одном из полукругов $\{|z| < r_0, \ \pm \operatorname{Im} z > 0\}$. Доказана следующая вспомогательная теорема.

Теорема 1.4. *Пусть* $\varphi \in H^n[-r_1, r_1], \ n \geq 1$*, т. е.* $n-$*ая производная* $\varphi^{(n)} \in H[-r_1, r_1]$*. Тогда при* $\delta = 0$ *функция (15) принадлежит классу* $H^n(\overline{D})$*, а при* $0 < \delta < 1$ *она представима в виде*

$$\phi(z) = \pm \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{k-\delta}}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \phi_0(z), \tag{16}$$

где $\phi_0 \in H^{n-1}(\overline{D})$ *и* $z^\delta \phi_0^{(n)}(z) \in H(\overline{D})$.

Затем рассматривается неоднородное уравнение (4).

Теорема 1.5. *Пусть выполнены предположения теоремы 1.2, коэффициенты* r, s *и функция* f *принадлежат классу* $H^{[\alpha_\tau]}$ *в окрестности точек* $\tau \in E \cup F$*. Положим для краткости* $(E_- \cup F_+)^0 = \{\tau \in E_- \cup F_+, \ \{\alpha_\tau\} > 0\}$*. Тогда условия*

$$f^{(k)}(\tau) = 0, \quad 0 \leq k \leq [\alpha_\tau] - 1, \quad \tau \in (E_- \cup F_+)^0, \tag{17}$$

необходимы для разрешимости уравнения (4) в классе (12). Пусть условия (17) выполнены. Тогда при $æ - m_+ - n_- \geq 0$ *уравнение (4) всегда разрешимо, а при* $æ - m_+ - n_- < 0$ *для его разрешимости необходимо выполнение* $m_+ + n_- - æ$ *линейно независимых условий на правую часть* f. *Более точно, существует такое подпространство*

$$X \subseteq \mathbb{C}^{(-æ-n_+)_0} \times \prod_{\tau \in E \cup F} \mathbb{C}^{[\alpha_\tau]}$$

размерности $m_+ + n_- - æ$, *что в обозначениях (11) условия ортогональности*

$$\frac{\eta^k}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)dt}{(t+i)^{k+1}} + \sum_{\tau \in E} \sum_{k=0}^{[\alpha_\tau]-1} \eta_\tau^k (g+S(g))^{(k)}(\tau) + \sum_{\tau \in F} \sum_{k=0}^{[\alpha_\tau]-1} \eta_\tau^k (g-S(g))^{(k)}(\tau) = 0$$

ко всем векторам $\eta = (\eta^k, \eta_\tau^k) \in X$ *необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (4) в классе (12).*

Во **второй главе** рассматривается характеристическое сингулярное интегральное уравнение на замкнутом гладком контуре Γ в исключительном случае с произвольными порядками нулей. Все исследования проводятся в весовых классах Гёльдера.

В пункте 2.1 приводятся определения весовых классов Гёльдера.

Пусть F — конечное множество точек контура Γ. Исходя из семейства $\lambda = (\lambda_\tau,\ \tau \in F)$ вещественных чисел, вводится класс $H_\lambda(\Gamma, F)$ функций $\varphi \in C(\Gamma \setminus F)$, которые на каждой гладкой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ с концом $\tau \in F$, не содержащей других точек из F, представимы в виде $\varphi(t) = |t-\tau|^{\lambda_\tau} \varphi_0(t),\ t \in \Gamma_0$, где функция φ_0 принадлежит классу Гёльдера $H(\Gamma_0)$. Аналогично определяется класс $H_\lambda(\overline{D^\pm}, F)$.

В пункте 2.2 методом сведения к соответствующей задаче линейного сопряжения исследуется характеристическое сингулярное интегральное уравнение (4) в исключительном случае с произвольными порядками нулей. Причём условия на функции $a(t) \pm b(t)$ уточняются следующим образом. Пусть D^+ и D^-, соответственно, конечная и бесконечная компоненты дополнения к Γ на плоскости, $z_0 \in D^+$ — фиксированная точка и $F = F_+ \cup F_-$. В D^+ и D^- рассматриваются, соответственно, функции

$$A(z) = \prod_{\tau \in F_+} (z-\tau)^{\alpha_\tau}, \quad B(z) = \prod_{\tau \in F_-} \left(\frac{z-\tau}{z-z_0} \right)^{\alpha_\tau}, \tag{18}$$

где степенные функции во втором равенстве выбраны с разрезом вдоль дуг $[\tau, z_0] \subset \overline{D^+}$. В этих обозначениях

$$(a+b)(t) = c(t)A(t), \quad (a-b)(t) = d(t)B(t), \tag{19}$$

где коэффициенты $c(t)$, $d(t)$ принадлежат классу $H(\Gamma, F) = H_0(\Gamma, F)$ кусочно гельдеровых функций и обратимы в этом классе.

Вводится обозначение $G(t) = \dfrac{d(t)}{c(t)}$. Исходя из непрерывной ветви $\ln G(t)$ на $\Gamma \setminus F$ рассматривается семейство чисел $\delta_\tau = \dfrac{1}{2\pi i}\left((\ln G)(\tau - 0) - (\ln G)(\tau + 0)\right)$. На весовой порядок λ накладывается дополнительное требование:

$$\alpha_\tau + \lambda_\tau - \operatorname{Re}\delta_\tau \notin \mathbb{Z}, \quad \tau \in F. \tag{20}$$

Выбираются целые n_τ по условию $-1 < \alpha_\tau + \lambda_\tau - \operatorname{Re}\delta_\tau + n_\tau < 0$ и вводится индекс $æ = \sum\limits_{\tau \in F} n_\tau$.

Функция $X(z)$ строится следующим образом:

$$X(z) = X_0(z) \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{-n_\tau},$$

где

$$X_0(z) = e^{\Omega(z)}, \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\ln G)(t) dt}{t - z}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $-1 < \lambda_\tau < 0$ и выполняется условие (20). Тогда при $æ \geq 0$ общее решение задачи*

$$c(t)A(t)\Phi^+(t) - d(t)B(t)\Phi^-(t) = f(t) \tag{21}$$

в классе $H_\lambda(\overline{D^\pm}, F)$ даётся формулой

$$\Phi(z) = \begin{cases} A^{-1}(z)\Psi(z), & z \in D^+, \\ B^{-1}(z)\Psi(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{22}$$

где функция $\Psi(z)$ имеет вид

$$\Psi(z) = X(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t) dt}{c(t) X^+(t)(t - z)} + P(z) \right),$$

P — произвольный многочлен степени не выше $æ - 1$ (при $æ = 0$ положим $P = 0$).

При $æ < 0$ решение задачи (21) единственно и даётся формулой (22) при выполнении условий ортогональности

$$\int_\Gamma \frac{f(t)}{c(t) X^+(t)} t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, ..., -æ - 1. \tag{23}$$

Из теоремы 2.1 вытекает следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть* $f \in H_{\alpha+\lambda}(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda_\tau < 0$ *и выполнено условие (20). Тогда при* $æ \geq 0$ *уравнение (4) в предположениях (18),(19) безусловно разрешимо в классе* $H_\lambda(\Gamma, F)$ *и его общее решение дается формулой*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Ac} + \frac{1}{Bd}\right) f +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Ac} - \frac{1}{Bd}\right) \frac{cX^+}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{c(\tau)X^+(\tau)(\tau - t)} + \left(\frac{1}{Ac} - \frac{1}{Bd}\right) cX^+ P, \tag{24}$$

где P *— произвольный многочлен степени не выше* $æ - 1$ *(при* $æ = 0$ *положим* $P = 0$*).*

Если $æ < 0$, *то для существования решения необходимо и достаточно выполнение* $-æ$ *условий разрешимости (23) и (единственное) решение уравнения (4) в предположениях (18),(19) дается формулой (24) при* $P = 0$.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Урбанович, Т. М. К теории краевой задачи Римана в исключительных случаях/ Т. М. Урбанович// Труды 4-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в трех томах. — Т. 1. Математический анализ. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2006. — С. 131-138.

[2] Урбанович, Т. М. Об одном подходе к решению особого интегрального уравнения в исключительном случае/ Т. М. Урбанович// Математическое моделирование и краевые задачи: Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 220-226.

[3] Урбанович, Т. М. Решение краевой задачи Римана с множителями логарифмического типа и со степенными множителями нецелого порядка в коэффициенте/ Т. М. Урбанович// Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. — 2009. — № 1 (77). — С. 59-66.

[4] Урбанович, Т. М. Решение краевой задачи Римана со степенными множителями нецелого порядка в коэффициенте/ Т. М. Урбанович// Известия Национальной Академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. — 2009. — № 2. — С. 24-35.

[5] Солдатов, А. П. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае/ А. П. Солдатов, Т. М. Урбанович// Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. — 2011. — № 17 (112), выпуск 24. — С. 165-171.

[6] Урбанович, Т. М. Однородная краевая задача Римана со степенными множителями нецелого порядка в коэффициенте/ Т. М. Урбанович// Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докладов Международной конференции, посвященной памяти проф. А. А. Килбаса, 12-17 сентября 2011 г., Минск, Беларусь. — Мн.: Институт Математики НАН Беларуси, 2011. — С. 145-146.

[7] Урбанович, Т. М. Исключительный случай характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши/ Т. М. Урбанович// Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 17-21 октября 2011 г.). — Белгород: ИПК НИУ «БелГУ», 2011. — С. 119.

[8] Солдатов, А. П. О решении характеристического сингулярного интегрального уравнения в исключительном случае/ А. П. Солдатов, Т. М. Урбанович// Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Международной конференции молодых учёных. — Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2011. — С. 202-204.

[9] Солдатов, А. П. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение на прямой в исключительном случае с произвольными порядками нулей/ А. П. Солдатов, Т. М. Урбанович// Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: AMADE — 2011: Материалы 6-ой международной конференции, посвященной памяти проф. А. А. Килбаса. — Минск: Изд. Центр БГУ, 2012. — С. 195-206.

[10] Урбанович, Т. М. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение на гладком замкнутом контуре в исключительном случае с произвольными порядками нулей/ Т. М. Урбанович// Материалы международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. — С. 448.

[11] Урбанович, Т. М. Исключительный случай характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в весовых классах/ Т. М. Урбанович// Математические заметки Якутского государственного университета. — 2012. — Т. 19, выпуск 2. — С. 155-161.

[12] Урбанович, Т. М. К теории сингулярных уравнений с ядром

Коши в исключительном случае с произвольными порядками нулей/ Т. М. Урбанович// Крымская осенняя математическая школа. Двадцать третья ежегодная международная конференция. Тезисы докладов. — Симферополь: КНЦ НАНУ, 2012. — С. 68-69.

[13] Урбанович, Т. М. К решению характеристического сингулярного интегрального уравнения на вещественной прямой в исключительном случае с произвольными порядками нулей/ Т. М. Урбанович// Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. — 2012. — № 17 (136), выпуск 28. — С. 102-112.

[14] Урбанович, Т. М. К теории сингулярных уравнений с ядром Коши в исключительном случае в весовых классах Гельдера/ Т. М. Урбанович// Четвертая Международная конференция молодых учёных по дифференциальным уравнениям и их приложениям имени Я. Б. Лопатинского. Сборник материалов. — Донецк: Донецкий Национальный университет, 2012. — С. 84-85.

[15] Урбанович, Т. М. Исключительный случай сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши в весовых классах Гельдера/ Т. М. Урбанович// Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы Второй Международной конференции молодых учёных. — Нальчик: ООО «Редакция журнала «Эльбрус», 2012. — С. 232-235.

Подписано в печать 24.01.2013. Times New Roman.
Формат $60 \times 84/16$. Усл. п. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 180.
Оригинал-макет тиражирован в ИПК НИУ «БелГУ»
Белгородского государственного национального
исследовательского университета
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.