№11(82)2010
Выпуск 19
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1995 г.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics Physics

Учредитель:
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный университет»

Издатель:
Белгородский государственный университет.
Издательство БелГУ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Главный редактор
Дятченко Л.Я.
ректор Белгородского государственного университета, доктор социологических наук, профессор

Зам.главного редактора
Пересыпкин А.К.
проректор по научной работе Белгородского государственного университета, канд. педагогических наук, профессор

Ответственные секретари
Московскин В.М.
доктор географических наук, профессор кафедры мировой экономики Белгородского государственного университета

Боруха С.Ю.
доцент кафедры педагогики Белгородского государственного университета, кандидат педагогических наук

СОДЕРЖАНИЕ

Рамки применимости кинематического подхода в описании параметрического рентгеновского излучения релятивистских электронов в кристаллах. ***С.В. Блажевич, А.В. Носков*** *5*

Неустойчивость по Ляпунову положений равновесия профилей в воздушном потоке. ***В.И. Ванько*** *21*

Алгебра последовательностей коэффициентов степенных рядов аналитических функций. ***Ю.П. Вирченко, Н.Н. Витохина*** *28*

О наработке ^{60}Co на нейтронном генераторе. ***А.Н. Довбня, Э.Л. Купленников, В.А. Цымбал, В.В .Красильников*** *62*

Структура и механические свойства наноструктурного листа из титана ВТ1-0, полученного холодной прокаткой. ***Н.В. Лопатин, Г.С. Дьяконов, С.В. Жеребцов, Г.А. Салищев*** *69*

Закономерности изменения микротвёрдости технически чистого титана, подверженного различному механико-термическому воздействию. ***Н.В. Камышанченко, И.С. Никулин, Д.П. Кузнецов, М.С. Кунгурцев, И.М. Неклюдов, О.И. Волчок*** *78*

Получение карбонат-замещённого гидроксилапатита из водных растворов. ***Е.А. Корнеева*** *88*

Доменная переориентация нематика в структуре Si/нематик/ITO . ***С.И. Кучеев, Ю.С. Тучина*** *95*

Влияние движения среды на термодиффузиофотофорез крупных твёрдых аэрозольных частиц сферической формы в вязких газообразных средах. ***Н.В. Малай, Е.Р. Щукин*** *101*

Влияние движения среды на диффузиофоретическое движение крупной испаряющейся капли сферической формы в вязкой газообразной среде. ***К.С. Рязанов*** *109*

Построение гаусовской флуктуационной модели равновесного теплового излучения. ***М.А. Сапрыкин, Ю.П. Вирченко*** *116*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ЖУРНАЛА

Главный редактор серии
Вирченко Ю.П.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Заместитель главного редактора
Малай Н.В.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Ответственный секретарь
Внуков И.Е.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Члены редколлегии

Насонов Н.Н.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Красильников В.В.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Сыщенко В.В.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Чеканов Н.А.
доктор физико-математических наук (Белгородский государственный университет)

Модифицированный локальный потенциал для вычисления энергии ионизации атомов. ***А.С. Старовойтов, А.Г. Шкловский*** *126*

Приближённое аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат. ***Н.Н. Миронова*** *135*

Влияние температуры отпуска на механические свойства стали 10Х9В1М1 ФБР. ***А.Ю. Кипелова, М.В. Однобокова, И.В. Дудзич*** *138*

Сведения об авторах *142*

Информация для авторов *145*

Редактор *Т.Г.Лагутина*
Оригинал-макет
Ю.П. Вирченко

E-mail: virch@bsu.edu.ru
Подписано в печать 17.06.2010.
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia, Impact
Усл. п. л. 17,2
Тираж 500 экз.
Заказ 148

Подписные индексы в каталоге агентства «Роспечать» – 81631, в объединенном каталоге «Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован в издательстве Белгородского государственного университета
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

© Белгородский государственный университет, 2010

№ 11 (82) 2010
Issue 19

SCIENTIFIC REVIEWING JOURNAL

Founded in 1995

Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

Founder:
State educational establishment of higher professional education
«Belgorod State University»

Publisher:
Belgorod State University
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media ПИ № ФС 77-21121 May 19, 2005.

Editorial board of journal

Editor-in-chief
L.J. Djatchenko
Rector of Belgorod State University, doctor of sociological sciences, professor

Deputy editor-in-chief
A.P. Peresypkin
Vice-rector for scientific research of Belgorod State University, candidate of pedagogical sciences

Assistant Editors
V.M. Moskovkin
Doctor of geographical sciences, professor of world economy department Belgorod State University
S.Yu. Borukha
Associate professor of Pedagogics department of Belgorod State University, candidate of pedagogical sciences

Editorial board of journal series

Editor-in-chief

Yu.P.Virchenko
Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

Deputies of editor-in-chief

N.V.Malay
Doctor of physico-mathematical sciences, Professor(Belgorod State University)

Responsible secretary

I.E.Vnukov
Doctor of physico-mathematical sciences, Professor(Belgorod State University)

CONTENTS

Applicability of kinematic approach for description of parametric X-ray irradiation of relativistic electrons in crystals.
S.V. Blazhevich, A.V. Noskov *5*

Lyapunov instability of profile equilibrium positions in air stream. ***V.I. Vanko*** *21*

Algebra of power series coefficients of analytic functions.
Yu.P. Virchenko, N.N. Vitokhina *28*

On production ^{60}Co at neutron generator. ***A.N. Dovbnya, E.L. Kuplennikov, V.A. Tsymbal, V.V. Krasil'nikov*** *62*

Structure and mechanical properties of nanostructured sheet of titanium VT1-0 produced by cold rolling. ***N.V. Lopatin, G.S. Djyakonov, S.V. Zherebtsov, G.A. Salishchev*** *69*

Some regularities of the microhardness variing in CP-titanium under various mechanical and thermal stresses.
N.V. Kamyshanchenko, I.S. Nikulin, D.P. Kuznetsov, M.S.Kungurtsev, I.M. Neklyudov, O.I. Volchok *78*

Obtaining of carbonate-substituted hydroxylapatite by water solutions. ***E.A. Korneyeva*** *88*

Domain reorientation of nematic in the Si/nematic/ITO structure. ***S.I. Kucheev, Yu.S. Tuchina*** *95*

Influence of medium movement on thermal diffusion phoresis of large hard spray particles of spherical form in viscous gas media. ***N.V. Malay, E.R. Shchukin*** *101*

Influence of medium movement on diffusiophoresis of large vapor drop of spherical form in viscous caseous medium.
K.S. Ryazanov *109*

Gaussian fluctuation model of equilibrium thermal irradiation.
M.A. Saprykin, Yu.P. Virchenko *116*

Modified local potential for calculation of atomic ionization energies.
A.S. Starovoitov, A.G. Shklovskii *126*

Members of editorial board:

N.N.Nasonov
Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

V.V.Krasilnikov
Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

V.V.Sushchenko
Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

N.A.Chekanov
Doctor of physico-mathematical sciences,
Professor (Belgorod State University)

Approximated analytic solution of velocity linearized Stokes equation in spheroidal coordinate system. ***N.N. Mironova*** *135*

Influence of tempering temperature on 10Kh9V1M1 FBR steel mechanical properties. ***A.Yu. Kipelova, M.V. Odnobokova, I.V. Dudzich*** *138*

Information about Authors *142*

Information for Authors *145*

Editor T.G. Lagutina
Dummy layout by Yu.P. Virchenko
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 17.06.2010
Format 60×84/8
Typeface Georgia, Impact
Printer's sheets 17,2
Circulation 500 copies
Order 148

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue – 81631,
In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at
Belgorod State University Publishing House
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

© Belgorod State University, 2010

УДК 539.18

РАМКИ ПРИМЕНИМОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ОПИСАНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛАХ

С.В. Блажевич, А.В. Носков

Белгородский государственный университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: blazhevich@bsu.edu.ru

Рассматривается параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластинку в геометрии процесса рассеяния Лауэ в случае асимметричного и симметричного (как частный случай) отражения поля частицы относительно поверхности кристаллической пластинки. На основе двухволнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ. Проведен сравнительный анализ формул параметрического рентгеновского излучения в динамическом и кинематическом приближении. На основе полученного выражения для угловой плотности ПРИ проведена интерпретация результатов эксперимента по ПРИ релятивистских электронов на Майнцком микротроне MAMI. Показано, что в эксперименте проявляется динамический эффект аномального фотопоглощения (эффект Бормана) в ПРИ.

Ключевые слова: параметрическое рентгеновское изучение, кристаллическая пластинка, рассеяние Лауэ.

1. Введение

Когда быстрая заряженная частица пересекает монокристалл, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, порождая параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) [1-3].

В настоящее время существует два подхода к описанию ПРИ: кинематический [4,5] и динамический [2,3,6]. Необходимо отметить, что кинематический подход учитывает взаимодействие каждого атома только с первичной, или преломленной волной в кристалле. В этом подходе, в отличие от динамического, пренебрегают взаимодействием атома с тем волновым полем, которое создается в кристалле совокупным рассеянием на всех других атомах, то есть не учитывается многоволновое рассеяние, в частности, взаимодействие элементарных волн с преломленной.

В последнее время существенный прогресс в описании когерентного излучения релятивистских электронов в кристаллах достигнут в динамическом подходе [7-11]. Ярким подтверждением объективности и целесообразности динамической теории в ПРИ является экспериментальное наблюдения рефлекса параметрического рентгеновского излучения вдоль скорости релятивистского электрона [12], который не предсказывает кинематическая теория.

Также необходимо отметить заметное влияние асимметрии отражения поля относительно поверхности кристаллической пластинки на спектрально-угловую плотность излучения. В кинематической теории асимметрия влияет только на соотношение пути заряженной частицы в кристаллической пластинке и пути излученного фотона. Динамическая теория ПРИ релятивистских электронов предсказывает также существенное влияние

асимметрии отражения на сам процесс формирования излучения, что приводит к изменению спектра ПРИ [10].

Таким образом, задача о рамках применимости кинематической теории ПРИ релятивистских электронов в кристаллах, решаемая в данной работе, является актуальной.

В настоящей работе на основе двухволнового приближения динамической теории дифракции [13] получено выражение, описывающее спектрально-угловую плотность ПРИ, в случае асимметричного относительно поверхности кристаллической пластинки отражения поля частицы в кристалле. Проводится сравнительный анализ формул ПРИ в динамическом и кинематическом подходе как для случая тонкого, так и для толстого кристалла с целью установления критериев, определяющих рамки применимости формул кинематической теории.

2. Спектрально-угловое распределение параметрического рентгеновского излучения в динамическом приближении

Рассмотрим излучение быстрой заряженной частицы пересекающей монокристаллическую пластинку с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ (рис. 1). При этом будем рассматривать уравнения для Фурье-образа электромагнитного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) = \int dt\; d^3\mathbf{r}\; \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \exp\left(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}\right) . \tag{1}$$

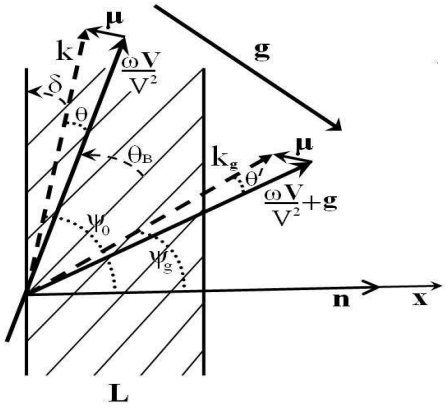


Рис. 1. Геометрия процесса излучения: θ' – угол излучения, θ_B – угол Брэгга (угол между скоростью электрона $\mathbf{V}$ и атомными плоскостями), δ – угол между поверхностью и рассматриваемыми атомными плоскостями кристалла, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k_g} = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ – волновые векторы подающего и дифрагированного фотона.

Поскольку поле релятивистской частицы с хорошей степенью точности можно считать поперечным, то падающая $\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega)$ и дифрагированная $\mathbf{E}_g(\mathbf{k},\omega)$ электромагнитные волны

определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) &= E_0^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + E_0^{(2)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_0^{(2)},\\ \mathbf{E}_g(\mathbf{k},\omega) &= E_g^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + E_g^{(2)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_1^{(2)}.\end{aligned} \tag{2}$$

Единичные векторы поляризации $\mathbf{e}_0^{(1)}$, $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ выбираются такими, что $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_0^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}$, а векторы $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k_g} = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. При этом векторы $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ лежат в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k_g}$ (π-поляризация), а векторы $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ-поляризация); $\mathbf{g}$ – вектор обратной решетки, определяющий систему отражающих атомных плоскостей кристалла.

Система уравнений для Фурье-образа электромагнитного поля в двухволновом приближение динамической теории дифракции имеет следующий вид [14]:

$$\begin{cases}(\omega^2(1+\chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2\chi_{-\mathbf{g}}C^{(s)}E_{\mathbf{g}}^{(s)} = 8\pi^2 ie\omega\theta V P^{(s)}\delta(\omega - \mathbf{kV}),\\ \omega^2\chi_{\mathbf{g}}C^{(s)}E_0^{(s)} + (\omega^2(1+\chi_0) - k_{\mathbf{g}}^2)E_{\mathbf{g}}^{(s)} = 0,\end{cases} \tag{3}$$

где $\chi_{\mathbf{g}}$, $\chi_{-\mathbf{g}}$ – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости кристалла по векторам обратной решетки $\mathbf{g}$:

$$\chi(\omega,\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}}\chi_{\mathbf{g}}(\omega)\exp(i\mathbf{gr}) = \sum_{\mathbf{g}}\left(\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)\right)\exp(i\mathbf{gr})\,. \tag{4}$$

Будем рассматривать кристалл с центральной симметрией ($\chi_{\mathbf{g}} = \chi_{-\mathbf{g}}$). В выражении (4) величины $\chi'_{\mathbf{g}}$ и $\chi''_{\mathbf{g}}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\chi'_{\mathbf{g}} &= \chi'_0\,(F(\mathbf{g})/Z)\,(S(\mathbf{g})/N_0)\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,g^2u_\tau^2\right),\\ \chi''_{\mathbf{g}} &= \chi''_0\exp\left(-\frac{1}{2}\,g^2u_\tau^2\right),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\chi_0 = \chi'_0 + i\chi''_0$ – средняя диэлектрическая восприимчивость, $F(\mathbf{g})$ – форм-фактор атома, содержащего Z электронов, $S(\mathbf{g})$ – структурный фактор элементарной ячейки, содержащей N_0 атомов, u_τ – среднеквадратичная амплитуда тепловых колебаний атомов кристалла. В работе рассматривается рентгеновская область частот ($\chi'_{\mathbf{g}} < 0$, $\chi'_0 < 0$).

Величины $C^{(s)}$ и $P^{(s)}$ в системе (3) определены следующим образом:

$$\begin{aligned}C^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)}\cdot\mathbf{e}_1^{(s)}\,,\quad C^{(1)} = 1,\quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B,\\ P^{(s)} &= \mathbf{e}_0^{(s)}\cdot(\boldsymbol{\mu}/\mu)\,,\quad P^{(1)} = \sin\varphi\,,\quad P^{(2)} = \cos\varphi\,,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega\mathbf{V}/V^2$ – составляющая импульса виртуального фотона, перпендикулярная скорости частицы $\mathbf{V}$ ($\mu = \omega\theta/|\mathbf{V}|$, где $\theta \ll 1$ – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{V}$), θ_B – угол между скоростью электрона и системой кристаллографических плоскостей (угол Брэгга), φ – азимутальный угол излучения, отсчитывается от плоскости, образованной векторами $\mathbf{V}$ и $\mathbf{g}$, величина вектора обратной решетки определяется выражением $g = 2\omega_B\sin\theta_B/V$,

ω_B – частота Брэгга. Угол между вектором $\omega\mathbf{V}/V^2$ и волновым вектором падающей волны $\mathbf{k}$ обозначен θ, а угол между вектором $\omega\mathbf{V}/V^2+\mathbf{g}$ и волновым вектором дифрагированной волны $\mathbf{k_g}$ обозначен θ'. Система уравнений (3) при параметре $s=1$ описывает поля σ-поляризованные, а при $s=2\pi$-поляризованные.

Решим следующее из системы (3) дисперсионное уравнение для рентгеновских волн в кристалле

$$(\omega^2(1+\chi_0)-k^2)(\omega^2(1+\chi_0)-k_{\mathbf{g}}^2)-\omega^4\chi_{-\mathbf{g}}\chi_{\mathbf{g}}C^{(s)^2}=0 \tag{7}$$

стандартными методами динамической теории [13].

Будем искать проекции волновых векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k_g}$ на ось X, совпадающую с вектором $\boldsymbol{n}$ (см. рис. 1) в виде

$$k_x=\omega\cos\psi_0+\frac{\omega\chi_0}{2\cos\psi_0}+\frac{\lambda_0}{\cos\psi_0},\quad k_{\mathbf{g}x}=\omega\cos\psi_{\mathbf{g}}+\frac{\omega\chi_0}{2\cos\psi_{\mathbf{g}}}+\frac{\lambda_{\mathbf{g}}}{\cos\psi_{\mathbf{g}}}\,. \tag{8}$$

При этом будем использовать известное соотношение, связывающее динамические добавки λ_0 и $\lambda_{\mathbf{g}}$ для рентгеновских волн [13]:

$$\lambda_{\mathbf{g}}=\frac{\omega\beta}{2}+\lambda_0\frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0}\,, \tag{9}$$

где $\beta=\alpha-\chi_0\,(1-\gamma_{\mathbf{g}}/\gamma_0)$, $\alpha=\omega^{-2}(k_{\mathbf{g}}^2-k^2)$, $\gamma_0=\cos\psi_0$, $\gamma_{\mathbf{g}}=\cos\psi_{\mathbf{g}}$, ψ_0 – угол между волновым вектором подающей волны $\mathbf{k}$ и вектором нормали к поверхности пластинки $\boldsymbol{n}$, $\psi_{\mathbf{g}}$ – угол между волновым вектором $\mathbf{k}_g$ и вектором $\boldsymbol{n}$ (см. рис. 1). Комплексные векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k_g}$ пропорциональны вещественному единичному вектору с коэффициентами пропорциональности:

$$k=\omega\sqrt{1+\chi_0}+\lambda_0,\quad k_{\mathbf{g}}=\omega\sqrt{1+\chi_0}+\lambda_{\mathbf{g}}\,. \tag{10}$$

Подставим (8) в (7), учитывая (9) и $\mathbf{k}_{||}\approx\omega\sin\psi_0$, $\mathbf{k}_{\mathbf{g}||}\approx\omega\sin\psi_{\mathbf{g}}$, получим выражения для динамических добавок:

$$\lambda_{\mathbf{g}}^{(1,2)}=\frac{\omega}{4}\left(\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\chi_{\mathbf{g}}\chi_{-\mathbf{g}}C^{(s)^2}\frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0}}\right),$$

$$\lambda_0^{(1,2)}=\omega\frac{\gamma_0}{4\gamma_{\mathbf{g}}}\left(-\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\chi_{\mathbf{g}}\chi_{-\mathbf{g}}C^{(s)^2}\frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0}}\right). \tag{11}$$

Так как $|\lambda_0|\ll\omega$, $|\lambda_{\mathbf{g}}|\ll\omega$, то можно показать, что $\theta\approx\theta'$ (см. рис. 1), и поэтому в дальнейшем угол θ' будем обозначать θ.

Решение системы уравнений (3) для дифрагированного поля в кристалле представим в виде

$$E_{\mathbf{g}}^{(s)cr}=-\frac{8\pi^2ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\cdot\frac{\omega^2\chi_{\mathbf{g}}C^{(s)}}{4\left(\gamma_0^2/\gamma_{\mathbf{g}}^2\right)\left(\lambda_{\mathbf{g}}-\lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}\right)\left(\lambda_{\mathbf{g}}-\lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}\right)}\,\delta\left(\lambda_{\mathbf{g}}-\lambda_{\mathbf{g}}^{*}\right)+$$

$$+E_{\mathbf{g}}^{(s)^{(1)}}\delta(\lambda_{\mathbf{g}}-\lambda_{\mathbf{g}}^{(1)})+E_{\mathbf{g}}^{(s)^{(2)}}\delta(\lambda_{\mathbf{g}}-\lambda_{\mathbf{g}}^{(2)})\,, \tag{12}$$

где $\lambda_0^*=\omega\left(\gamma^{-2}+\theta^2-\chi_0\right)/2$, $\lambda_{\mathbf{g}}^*=\omega\beta/2+(\gamma_{\mathbf{g}}/\gamma_0)\lambda_0^*$, $\gamma=\sqrt{1-V^2}$ – Лоренц-фактор частицы, $E_g^{(s)^{(1)}}$ и $E_{\mathbf{g}}^{(s)^{(2)}}$ – свободные дифрагированные поля в кристалле.

Для поля в вакууме перед кристаллом решение системы (3)имеет вид

$$E_0^{(s)vac} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_{\mathbf{g}}}\left(\beta - \frac{2}{\omega}\lambda_{\mathbf{g}}\right) - \chi_0\right)\right]^{-1} \delta\left(\lambda_{\mathbf{g}} - \lambda_{\mathbf{g}}^*\right) . \tag{13}$$

В вакууме дифрагированное поле позади кристалла имеет вид

$$E_{\mathbf{g}}^{(s)vac} = E_{\mathbf{g}}^{(s)Rad}\delta\left(\lambda_{\mathbf{g}} + \frac{\omega\chi_0}{2}\right) , \tag{14}$$

где $E_{\mathbf{g}}^{(s)Rad}$ – амплитуда поля когерентного излучения вблизи направления Брэгга.

Из второго уравнения системы (3) следует выражение, связывающее дифрагированное и падающее поля в кристалле:

$$E_0^{(s)cr} = \frac{2\omega\lambda_{\mathbf{g}}}{\omega^2\chi_{\mathbf{g}}C^{(s)}}\, E_{\mathbf{g}}^{(s)cr} . \tag{15}$$

Для определения амплитуды дифрагированного $E_{\mathbf{g}}^{(s)Rad}$ поля воспользуемся обычными граничными условиями на входной и выходной поверхностях кристаллической пластинки:

$$\int E_0^{(s)vac}\, d\lambda_{\mathbf{g}} = \int E_0^{(s)cr} d\lambda_{\mathbf{g}} , \quad \int E_{\mathbf{g}}^{(s)cr} d\lambda_{\mathbf{g}} = 0 ,$$

$$\int E_{\mathbf{g}}^{(s)cr} e^{i(\lambda_{\mathbf{g}}/\gamma_{\mathbf{g}})L} d\lambda_{\mathbf{g}} = \int E_{\mathbf{g}}^{(s)vac} e^{i(\lambda_{\mathbf{g}}/\gamma_{\mathbf{g}})L} d\lambda_{\mathbf{g}} . \tag{16}$$

Получим выражение для поля излучения:

$$E_{\mathbf{g}}^{(s)Rad} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\left(\frac{\omega^2\chi_{\mathbf{g}}\, C^{(s)} e^{i\left(\omega\chi_0/2+\lambda_{\mathbf{g}}^*\right)(L/\gamma_{\mathbf{g}})}}{2\omega(\gamma_0/\gamma_{\mathbf{g}})\left(\lambda_{\mathbf{g}}^{(1)} - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}\right)}\right) \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\omega}{2(\gamma_0/\gamma_{\mathbf{g}})\left(\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}\right)} - \frac{\omega}{\chi_0\omega + 2\lambda_0^*}\right)\left(1 - \exp\left[-i\frac{\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(2)}}{\gamma_{\mathbf{g}}}L\right]\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\omega}{2(\gamma_0/\gamma_{\mathbf{g}})\left(\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}\right)} - \frac{\omega}{\chi_0\omega + 2\lambda_0^*}\right)\left(1 - \exp\left[-i\frac{\lambda_{\mathbf{g}}^* - \lambda_{\mathbf{g}}^{(1)}}{\gamma_{\mathbf{g}}}L\right]\right)\right] . \tag{17}$$

Слагаемые в квадратных скобках выражения (17) соответствуют двум различным ветвям возбуждаемых рентгеновских волн в кристалле.

Для дальнейшего анализа излучения динамические добавки $\lambda_{\mathbf{g}}^{(1,2)}$ (11) представим в виде

$$\lambda_{\mathbf{g}}^{(1,2)} = \frac{\omega\left|\chi_{\mathbf{g}}'\right| C^{(s)}}{2}\left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2} \pm\right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon - 2i\rho^{(s)}\left(\frac{(1-\varepsilon)}{2}\,\xi^{(s)} + \kappa^{(s)}\varepsilon\right) - \rho^{(s)^2}\left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{4} + \kappa^{(s)^2}\varepsilon\right)}\right) , \tag{18}$$

где

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1-\varepsilon}{2\nu^{(s)}},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{\alpha}{2\left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}} = \frac{2\sin^2\theta_B}{V^2\left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}}\left(1 - \frac{\omega(1-\theta\cos\varphi\mathrm{ctg}\theta_B)}{\omega_B}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_{\mathbf{g}}}{\gamma_0} = \frac{\cos\psi_{\mathbf{g}}}{\cos\psi_0}, \quad \nu^{(s)} = \frac{\chi'_{\mathbf{g}} C^{(s)}}{\chi'_0}, \quad \rho^{(s)} = \frac{\chi''_0}{\left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}}, \quad \kappa^{(s)} = \frac{\chi''_{\mathbf{g}} C^{(s)}}{\chi''_0}. \tag{19}$$

Так как в области рентгеновских частот выполняется неравенство

$$2\sin^2\theta_B / V^2\left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)} \gg 1,$$

то $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстрой функцией от частоты ω, поэтому для дальнейшего анализа спектра ПРИ очень удобно рассматривать $\eta^{(s)}(\omega)$ как спектральную переменную, характеризующую частоту ω. Важным параметром в выражении (18) является параметр ε, который определяет степень асимметрии отражения поля относительно поверхности пластинки. Отметим, что в симметричном случае волновые векторы падающих и дифрагированных фотонов составляют с поверхностью пластинки равные углы (см. рис. 2), а в случае асимметричного отражения – неравные углы. При этом в симметричном случае $\varepsilon = 1$ и $\delta = \pi/2$, а в асимметричном $\varepsilon \neq 1$ и $\delta \neq \pi/2$.

Представим параметр асимметрии в виде

$$\varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \tag{20}$$

где θ_B – угол между скоростью электрона и системой кристаллографических плоскостей. Отметим, что угол падения электрона на поверхность пластинки $\delta - \theta_B$ увеличивается, если параметр ε уменьшается, и наоборот (см. рис. 2). Заметим, что параметр асимметрии (20) представляет собой отношение длины пути электрона в пластинке ($L_{e^-} = L/\sin(\delta - \theta_B)$) к максимальной длине пути фотона в кристалле ($L_f = L/\sin(\delta + \theta_B)$), сформированного вблизи входной поверхности мишени.

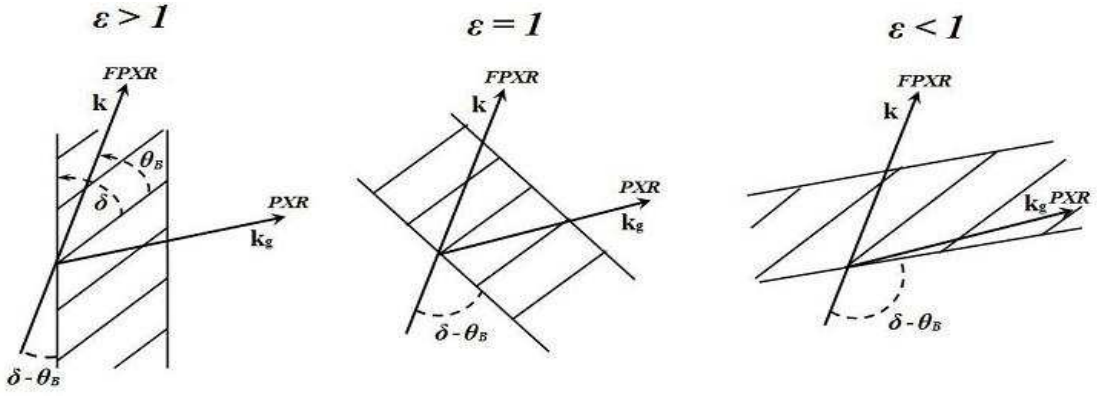


Рис. 2. Асимметричные ($\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$) отражения излучения от кристаллической пластинки. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует симметричному отражению.

Параметр $\nu^{(s)}$ характеризует степень отражения волн от системы параллельных атомных плоскостей в кристалле, которая обусловливается характером интерференции волн, отраженных от атомов разных атомных плоскостей (конструктивная, если ($\nu^{(s)} \approx 1$) или деструктивная, если ($\nu^{(s)} \approx 0$)).

Параметр поглощения $\rho^{(s)}$ может быть представлен как отношение длины экстинкции $L_{ext}^{(s)} = \left(\omega \left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}\right)^{-1}$ к длине поглощения $L_{abs} = \left(\omega\chi''_0\right)^{-1}$ рентгеновских волн в кристалле. Необходимо отметить, что на глубине, равной длине экстинкции, энергия первичной волны полностью перекачивается во вторичную волну, распространяющуюся в брэгговском направлении.

Выражение для амплитуды поля излучения в направлении Брэгга (17), используя (18), запишем в виде двух слагаемых:

$$E_{\mathbf{g}}^{(s)Rad} = E_{PXR}^{(s)} + E_{DTR}^{(s)}\,, \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} E_{PXR}^{(s)} = {} & \frac{4\pi^2 ieV}{\omega} \cdot \frac{\theta P^{(s)}}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0} \times \\ & \times \left(\frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \cdot \frac{1 - \exp\left[-ib^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) - b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(2)}\right]}{\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} - i\rho^{(s)}\Delta^{(2)}} - \right. \\ & \left. - \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \cdot \frac{1 - \exp\left[-ib^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) - b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right]}{\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} - i\rho^{(s)}\Delta^{(1)}} \right) \times \\ & \times \exp\left[i\left(\frac{\omega\chi_0}{2} + \lambda_{\mathbf{g}}^*\right)\frac{L}{\gamma_{\mathbf{g}}}\right], \end{aligned} \tag{21b}$$

$$\begin{aligned} E_{DTR}^{(s)} = {} & \frac{4\pi^2 ieV}{\omega}\theta P^{(s)}\left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0}\right)\frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \times \\ & \times \left(\exp\left[-ib^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) - b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-ib^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) - b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(2)}\right] \right) \times \\ & \times \exp\left[i\left(\frac{\omega\chi_0}{2} + \lambda_{\mathbf{g}}^*\right)\frac{L}{\gamma_{\mathbf{g}}}\right], \end{aligned} \tag{21c}$$

где

$$\Delta^{(2)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}\frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} + \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}\,,$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}\frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}\,,$$

$$\sigma^{(s)} = \frac{1}{\left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}} \left(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0\right) \equiv \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|} + 1\right),$$

$$b^{(s)} = \frac{\omega \left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}}{2} \frac{L}{\gamma_0}. \tag{22}$$

Выражение (21b) представляет амплитуду поля ПРИ, а выражение (21c) описывает амплитуду поля ДПИ, возникающего вследствие дифракции на системе атомных плоскостей кристалла переходного излучения, рождаемого на входной поверхности. Выделение амплитуд излучений ПРИ и ДПИ из общей амплитуды является важным результатом, так как это дает возможность рассмотреть интерференцию этих двух механизмов излучения. Однако в данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только механизма ПРИ.

Параметр $b^{(s)}$ можно представить в виде

$$b^{(s)} = \frac{L}{2L_{ext}^{(s)} \sin\left(\delta - \theta_B\right)}. \tag{23}$$

Откуда видно, что он равен половине пути электрона в пластинке, выраженного в длинах экстинкции $L_{ext}^{(s)} = \left(\omega \left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)}\right)^{-1}$.

Выход ПРИ формируется в основном только одной из ветвей, точнее, первой в выражении (18), соответствующей второму слагаемому в (21b). Как нетрудно убедиться непосредственно, только в этом слагаемом обращается в нуль реальная часть знаменателя. Решение соответствующего уравнения

$$\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}{\varepsilon} = 0 \tag{24}$$

определяет частоту ω_*, в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов ПРИ, излучаемых под фиксированным углом наблюдения.

Подставляя (21b) в хорошо известное [14] выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения

$$\omega \frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^{2} \left|E_{\mathbf{g}}^{(s)Rad}\right|^2, \tag{25}$$

получим выражение для спектрально-угловой плотности ПРИ:

$$\omega \frac{d^2N_{PXR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{P^{(s)^2}\theta^2}{\left(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0\right)^2} R_{PXR}^{(s)}, \tag{26a}$$

$$R_{PXR}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1 + e^{-2b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}} - 2e^{-b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}} \cos\left(b^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)^2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \rho^{(s)^2}\Delta^{(2)}}. \tag{26b}$$

Выражение (26) составляет главный результат данной работы. Оно получено в двухволновом приближении динамической теории дифракции с учетом поглощения излучения в среде и ориентации дифрагирующих атомных плоскостей кристалла относительно поверхности кристаллической пластинки.

Далее полученная динамическая формула (26) сравнивается с хорошо известной кинематической [4,5]. Определены критерии ограничения использования кинематической формулы ПРИ.

3. Сравнительный анализ кинематической и динамической формул для тонкого кристалла

Выражение, описывающее спектр ПРИ (26), в случае тонкой мишени $\left(b^{(s)}\rho^{(s)} \ll 1\right)$, когда коэффициентом поглощения $\rho^{(s)}$ можно пренебречь, принимает следующий вид:

$$R_{PXR}^{(s)} = 4\left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon}}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{b^{(s)}}{2}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)}-\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)}-\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2}. \tag{27}$$

Для лучшего проявления динамических эффектов, будем рассматривать кристаллическую пластину такой толщины, чтобы длина пути электрона в пластинке $L/\sin(\delta-\theta_B)$ во много раз превышала длину экстинкции рентгеновских волн в кристалле $L_{ext}^{(s)} = \left(\omega\left|\chi'_{\mathbf{g}}C^{(s)}\right|\right)^{-1}$, то есть $b^{(s)} \gg 1$.

Проинтегрировав (26) по частотной функции $\eta^{(s)}(\omega)$, запишем выражение, описывающее угловую плотность ПРИ:

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2\left|\chi'_{\mathbf{g}}\right|C^{(s)}}{8\pi^2\sin^2\theta_B} \cdot \frac{P^{(s)^2}\theta^2}{(\theta^2+\gamma^{-2}-\chi'_0)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{PXR}^{(s)}\, d\eta^{(s)}(\omega). \tag{28}$$

Так как при условии $b^{(s)} \gg 1$, спектральный пик ПРИ очень узок, то для интегрирования (28) можно использовать хорошо известную аппроксимацию $\sin^2(Tx)/x^2 \to \pi T\delta(x)$. Формула для углового распределения ПРИ, следующая из (28), после интегрирования принимает вид

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)din}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B{\chi'_g}^2C^{(s)^2}P^{(s)^2}}{4\pi\sin^2\theta_B} \cdot \frac{L}{\sin(\delta-\theta_B)}. \tag{29}$$

Запишем хорошо известное выражение, описывающее угловую плотность ПРИ в кинематическом приближении (см., например, [5,16]),

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B{\chi'_{\mathbf{g}}}^2C^{(s)^2}P^{(s)^2}}{4\pi\sin^2\theta_B} \cdot \frac{\theta^2}{(\theta^2+\gamma^{-2}-\chi'_0)^2}\,\Gamma(\varepsilon),$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_B\chi''_0}\left(1-\exp\left[-\frac{\omega_B\chi''_0L}{\varepsilon\sin(\delta-\theta_B)}\right]\right). \tag{30}$$

Видно, что коэффициент асимметрии ε, входящий в кинематическое выражение, содержится только в геометрическом факторе $\Gamma(\varepsilon)$. В случае тонкого не поглощающего кристалла, геометрический фактор есть путь электрона в кристаллической мишени. Следовательно,

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}\,. \tag{31}$$

Отсюда кинематическое выражение, описывающее угловую плотность ПРИ, принимает вид

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B {\chi'_{\mathbf{g}}}^2 C^{(s)^2} P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2\theta_B} \cdot \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0)^2} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}\,. \tag{32}$$

Важно отметить, что в динамической формуле, в отличие от кинематической, асимметрия ε (угол δ) входит не только в выражение, описывающее путь электрона в пластинке (31), но также в сомножитель, описывающий угловое распределение ПРИ, что является основой для сравнения кинематической и динамической формул для случая тонкого кристалла.

Для дальнейшего анализа удобно представить выражения (29) и (32) следующим образом

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)din}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B \left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)} P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2\theta_B} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}\, F^{din}\,, \tag{33a}$$

$$F^{din} = \nu^{(s)} \frac{\varepsilon^2\theta^2/\left|\chi'_0\right|}{\nu^{(s)^2} + \varepsilon\left(\theta^2/\left|\chi'_0\right| + \left(\gamma^2\left|\chi'_0\right|\right)^{-1} + 1\right)^2}\,, \tag{33b}$$

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_B \left|\chi'_{\mathbf{g}}\right| C^{(s)} P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2\theta_B} \cdot \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}\, F^{kin}\,, \tag{34a}$$

$$F^{kin} = \nu^{(s)} \frac{\theta^2/\left|\chi'_0\right|}{\left(\theta^2/\left|\chi'_0\right| + \left(\gamma^2\left|\chi'_0\right|\right)^{-1} + 1\right)^2}\,. \tag{34b}$$

Функции (33b) и (34b) описывают угловую плотность ПРИ. Необходимо отметить, что динамический подход в отличие от кинематического учитывает влияние асимметрии на угловую часть ПРИ.

3.1. Симметричное отражение. Рассмотрим сначала случай симметричного отражения $\varepsilon = 1$. В случае небольшой энергии излучающих частиц $\gamma \le \left|\chi'_0\right|^{-1/2} \approx \omega/\omega_p$ (ω_p – плазменная частота) следует приближенное равенство $F_{din} \approx F_{kin}$ для всех углов наблюдения θ.

При достаточно большой энергии $\gamma \gg \omega/\omega_p$ для слабых отражений (например, $\nu^{(s)} \approx 0,3$) $F_{din} \approx F_{kin}$. В случае же сильных отражений (например, $\nu^{(s)} \approx 0,9$) угловые зависимости, построенные по кинематической и динамической формулам, несколько отличаются, что демонстрируют кривые, представленные на рис. 3. В этом случае кинематические формулы дадут погрешность абсолютного выхода фотонов, поэтому результаты достаточно точных экспериментов по измерению абсолютного выхода ПРИ необходимо сравнивать с динамической формулой (29).

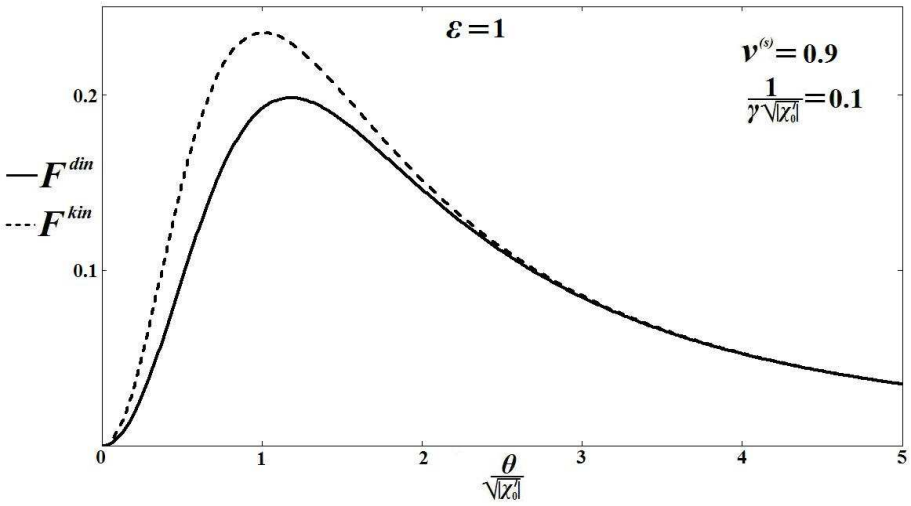


Рис 3. Сравнение угловых плотностей ПРИ, вычисленных по динамической и кинематической формулам. Кинематическая формула дает погрешность при данных условиях.

3.2. Асимметричное отражение. При усилении асимметрии, которая связана с уменьшением (при $\varepsilon < 1$) или увеличением (при $\varepsilon > 1$) угла падения $\delta - \theta_B$ электрона на мишень (см. рис. 2), погрешность кинематической формулы возрастает, что демонстрируется кривыми, представленными на рис. 4.

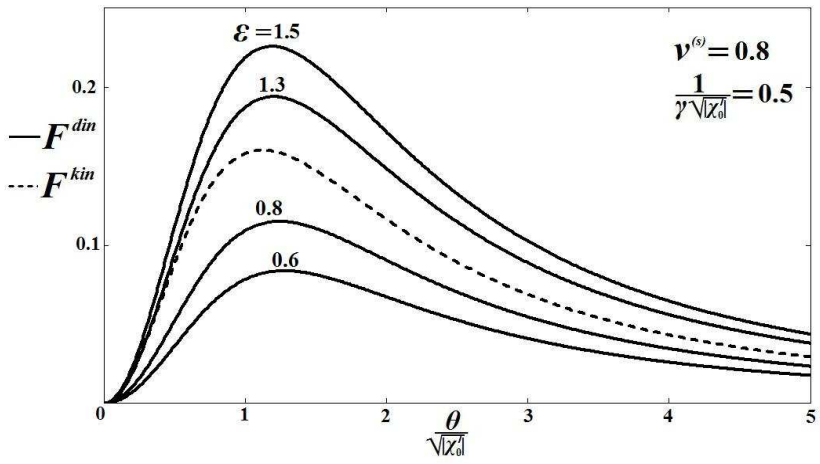


Рис. 4. Угловая плотность ПРИ для различной асимметрии. Демонстрируется увеличение погрешности кинематической формулы при увеличении асимметрии.

В случае сильной асимметрии ($\varepsilon \gg 1$), когда угол падения электрона на мишень ($\delta - \theta_B$) мал, из (33b) и (34b) для Лоренц-фактора релятивистского электрона, как больше, так и меньше ω/ω_p, следует отношение

$$\frac{F_{din}}{F_{kin}} = \varepsilon \,. \tag{35}$$

Таким образом, при сильной асимметрии угловая плотность ПРИ в ε раз превышает плотность, предсказываемую кинематической формулой (см. рис. 5). Поэтому, даже в случае

тонкого непоглащающего кристалла возникает необходимость учета динамических эффектов в ПРИ.

4. Сравнительный анализ кинематической и динамической формул для толстого поглощающего кристалла

Для сравнительного анализа удобно представить выражения (26) и (30) следующим образом

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)din}}{d\Omega} = \frac{e^2 P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2\theta_B} F_{abs}^{din}\,, \tag{36a}$$

$$F_{abs}^{din} = \nu^{(s)} \frac{\theta^2/\left|\chi_0'\right|}{\left(\theta^2/\left|\chi_0'\right| + \left(\gamma^2\left|\chi_0'\right|\right)^{-1} + 1\right)^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{PXR}^{(s)}\, d\eta^{(s)}(\omega)\,, \tag{36b}$$

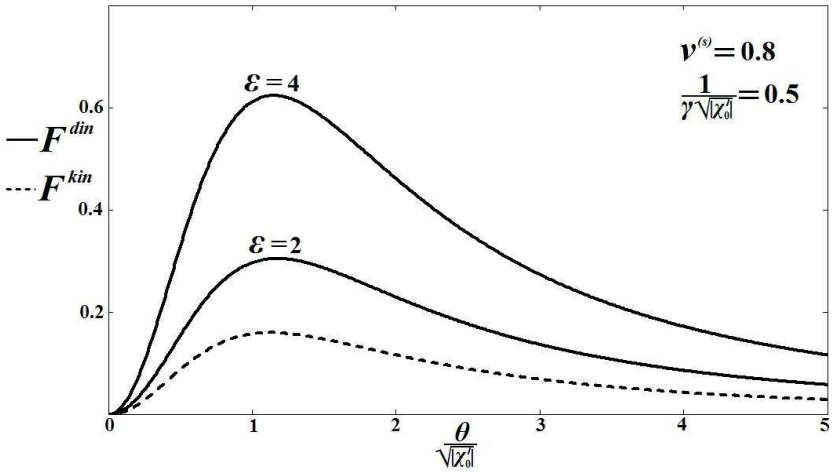


Рис. 5. При сильной асимметрии угловая плотность ПРИ в ε раз превышает плотность, предсказываемую кинематической формулой.

$$R_{PXR}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon}}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1 + e^{-L_f\mu^{(s)}} - 2e^{-L_f\mu^{(s)}/2}\cos\left(\frac{L_{e-}}{2L_{ext}}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)}-\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)}-\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{L_{ext}^2\mu^{(s)^2}}{\varepsilon^2}}\,, \tag{36c}$$

$$\frac{dN_{PXR}^{(s)kin}}{d\Omega} = \frac{e^2 P^{(s)^2}}{4\pi \sin^2\theta_B} F_{abs}^{kin}\,, \tag{37a}$$

$$F_{abs}^{kin} = \nu^{(s)} \frac{\theta^2/\left|\chi_0'\right|}{\left(\theta^2/\left|\chi_0'\right| + \left(\gamma^2\left|\chi_0'\right|\right)^{-1} + 1\right)^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho^{(s)}}\left(1 - e^{-L_f\mu_0}\right)\,, \tag{37b}$$

где

$$\mu^{(s)} = \mu_0 \left(\frac{\varepsilon+1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2}+\varepsilon}} - \frac{\varepsilon\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2}+\varepsilon}} \right),$$

$$\mu_0 = \omega_B \chi_0'', \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi_0'|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi_0'|} + 1 \right). \tag{38}$$

Здесь $\mu^{(s)}$ есть эффективный коэффициент поглощения фотонов в кристалле, зависящий от параметра асимметрии ε. Параметр $\kappa^{(s)}$ определяет степень проявления эффекта аномального низкого фотопоглощения (эффекта Бормана) [15] в прохождении рентгеновских волн через кристалл. Физика эффекта заключается в образовании падающей и рассеянной рентгеновскими волнами стоячей волны, пучности которой расположены в середине пространства между соседними атомными плоскостями, где электронная плотность кристалла, а следовательно, и фотопоглощение, являются минимальными. При этом в кристалле образуются две волны, одна из которых поглощается аномально сильно, а другая аномально слабо (для ПРИ амплитуды волн, слагаемые в выражении (21b)). Выражение (36a) описывает ветвь ПРИ, которая поглощается аномально слабо.

Как и в случае свободных рентгеновских волн необходимым условием проявления данного эффекта в ПРИ является близость по величине мнимых частей соответствующих коэффициентов разложения диэлектрической восприимчивости кристалла в ряд Фурье по векторам обратной решетки ($\kappa^{(s)} \approx 1$). В этом случае $\mu^{(s)}$ (38) принимает минимальное значение. Необходимо напомнить, что параметр $\kappa^{(s)}$ зависит от выбора системы параллельных дифрагирующих атомных плоскостей кристалла, частоты излучения, а также от его поляризации.

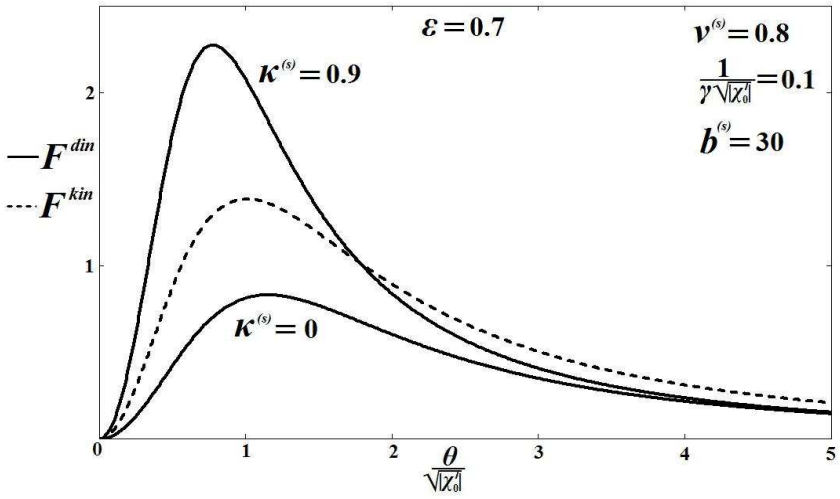


Рис. 6. Деформации угловой плотности ПРИ за счет разного эффективного коэффициента поглощения для разных углов наблюдения θ.

Так как решение уравнения (24) определяет частоту ω_*, в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов ПРИ, излучаемых под фиксированным углом наблюдения:

$$\xi^{(s)}(\omega_*) = \frac{1 - \varepsilon\sigma^{(s)2}}{2\sigma^{(s)}}, \tag{39}$$

то эффективный коэффициент поглощения также зависит от угла наблюдения θ. Таким образом, учет поглощения в динамической теории может привести к деформации угловой плотности ПРИ (см. рис. 6).

Необходимо еще раз отметить, что в кинематической формуле от асимметрии зависит только геометрия процесса, а коэффициент поглощения μ_0 соответствует значению в аморфной среде. В динамической формуле (36а) эффективный коэффициент поглощения $\mu^{(s)}$ зависит не только от выбора системы дифрагирующих атомных плоскостей кристалла (параметр $\kappa^{(s)}$), а также от асимметрии и угла наблюдения. При этом эффективная длина поглощения фотона соответствует $1/\mu^{(s)}$.

5. Интерпретация результатов эксперимента по ПРИ релятивистских электронов на майнцком микротроне MAMI

В работе [16] опубликованы результаты экспериментального исследования спектрально-углового распределения параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) электронов с энергией 855 MeV. Следует отметить высокое качество электронного пучка ускорителя (малые поперечные размеры и малую расходимость) и детектирующей аппаратуры, позволившее авторам [16] получить угловое распределение рентгеновских фотонов в абсолютных величинах с высокой точностью и высоким угловым разрешением. Опубликованные экспериментальные результаты мы сравнили с расчётами углового распределения, проведенными нами, как по хорошо известной кинематической формуле (30), так и по полученной нами динамической (26). Как видно из рис. 7, кривая, полученная по кинематической формуле (пунктирная линия 1), расходится с экспериментальными результатами. Кривая, построенная по нашей динамической формуле с учётом отражения фотонов на системе плоскостей [11] асимметричного относительно поверхности кристалла (сплошная линия 2), полностью совпадает с экспериментом. Важно отметить, что условия данного эксперимента соответствуют условию заметного проявления эффекта аномально низкого фотопоглощения (эффект Бормана) в ПРИ в ассиметричном случае [11]. Для демонстрации этого на рисунке приведены результаты расчёта по нашей динамической формуле в предположении, что эффект Бормана отсутствует (сплошная линия 3).

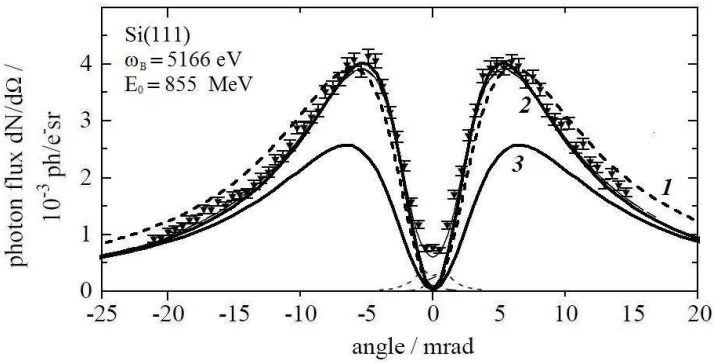


Рис. 7. Проявления динамического эффекта Бормана в ПРИ.

Таким образом, можно утверждать, что динамический эффект Бормана в ПРИ проявляется в эксперименте.

6.Заключение

На основе двухволнового приближения динамической теории дифракции получено аналитическое выражение для спектрально-углового распределения ПРИ в случае асимметричного по отношению к поверхности мишени отражения поля релятивистского электрона. Проведен сравнительный анализ формул параметрического рентгеновского излучения в динамическом и кинематическом приближении в случае симметричного и асимметричного отражений.

Для случая тонкого кристалла нами показано, что при симметричном отражении в области энергии излучающих частиц $\gamma \gg \omega/\omega_p$ кинематическая формула ПРИ дает погрешность даже в случае тонкого непоглощающего кристалла, а в случае $\gamma < \omega/\omega_p$ кинематическая и динамическая теории ПРИ дают одинаковые результаты. Нами также показано, что при увеличении асимметрии отражения погрешность кинематической формулы для ПРИ возрастает. Показано, что для сильной асимметрии ($\varepsilon \gg 1$) угловая плотность, рассчитанная по кинематической формуле, оказывается в ε раз меньше реальной, вычисленной по динамической формуле. Таким образом, даже в случае тонкого непоглащающего кристалла возникает необходимость учета динамических эффектов в ПРИ. Наконец, нами показано, что в случае толстого поглощающего кристалла в динамической теории, в отличие от кинематической, коэффициент поглощения ПРИ в кристалле зависит от асимметрии отражения и направления распространения фотона, что может привести к деформации углового распределения.

В рамках развитой теории в работе проведена интерпретация результатов эксперимента по регистрации ПРИ релятивистских электронов на микротроне MAMI в Майнце. Показано, что эффект аномального фотопоглощения (эффект Бормана) в ПРИ имел место в данном эксперименте.

В заключение мы благодарим профессора И.Е.Внукова за ценные дискуссии по теме, изучаемой в работе.

Литература

1. Тер-Микаэлян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях / М.Л. Тер-Микаэлян. – АН АрмССР: Ереван, 1969. – 460с.

2. Гарибян Г.М., Ян Ши // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С.930.

3. Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. // ЖЭТФ. – 1971. – 61. – С.944.

4. Nitta H. // Phys.Lett.A. – 1991. – 158. – P.270.

5. Feranchuk I.D., Ivashin A.V. // J.Physique. – 1985. – 46. – P.1981.

6. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. // J.Physique. – 1983. – 44. – P.913.

7. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res B. – 2003. – 201. – P.97.

8. Nasonov N.N., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2003. – 201. – P.67.

9. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2006. – 252. – P.69.

10. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2008. – 266. – P.3770.

11. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. In Phys. Res. B. – 2008. – 266. – P.3777.

12. Алейник А.Н., Балдин А.Н., Богомазова Е.А., Внуков И.Е. и др. // Письма в ЖЭТФ. – 2004. – 80. – С.447.

13. Пинскер З.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах // З.Г. Пинскер. – М.: Наука, 1974. – 372с.

14. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях // В.А. Базылев. – М: Наука, 1987. – 272с.

15. Borrmann G. // Zh.Phys. – 1941. – 42. – P.157.

16. Brenzinger K.-H., Herberg C., Limburg B., Backe H. and al. // Phys.A. – 1997. – 358. – P.107.

APPLICABILITY OF KINEMATIC APPROACH FOR DESCRIPTION OF PARAMETRIC X-RAY IRRADIATION OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN CRYSTALS

S.V. Blazhevich, A.V. Noskov

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: blazhevich@bsu.edu.ru

The parametric X-ray irradiation of relativistic electron crossing the single crystal film in frameworks of the Laue geometry of the scattering process is considered. It is studied in the case of asymmeric and symmetric (as the particular case) reflection of the particle field relative to the crystal surface. On the basis of the two-wave approximation of the dynamical difraction theory, the epressions describing the spectral angular density of the parametric X-ray irradiation are obtained. It is done the comparative analysis of parametric X-ray irradiation formulas at the dynamical and kinematic approximation. On the basis of the obtained expession of the angular density, it is fulfilled the interpretation of experimental results obtained at the Minz accelerator. It is shown that the dynamical effect of the abnormal photoabsorption (the Borman effect) takes place at the parametric X-ray irradiation experiments.

Key words: parametric X-ray irradiation, crystal film, Laue scattering.

УДК 532.72

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРОФИЛЕЙ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

В.И. Ванько

МГТУ им. Н.Э. Баумана
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия, e-mail: vvanko@mail.ru

В статье излагаются результаты работ по аэроупругости, проводимых в течение последнего десятилетия на кафедре «Прикладная математика» МГТУ им.Баумана.

Ключевые слова: аэродинамические коэффициенты, аэродинамическая устойчивость, авторотация, срыв потока.

1. Основным методом определения аэродинамических характеристик является эксперимент по продувке конструкции в аэродинамической трубе. Рассмотрим следующий пример (в данной работе для иллюстрации наших утверждений используются эксперименты, поставленные в лаборатории промышленной аэродинамики ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского [1]): в аэродинамическую трубу помещён брус ромбического поперечного сечения длиной $l = 2$м; диагонали ромба $a = 0,5$м, $b = 0,375$м; нижний конец бруса опирается на шаровой шарнир, брус удерживается в вертикальном положении двумя горизонтальными пружинами, прикреплёнными к верхнему сечению. Собственная частота колебаний модели $\nu = 4$Гц, скорость набегающего потока $V_\infty = 20$м/с. Нулевой угол атаки соответствует положению бруса, при котором большая диагональ поперечного сечения параллельна скорости потока.

При проведении исследований для каждого фиксированного значения угла атаки α измерялась максимальная величина амплитуды колебаний верхнего сечения бруса; значения безразмерной величины амплитуды $\bar{A} = A/a$ откладывали по оси ординат (см. рис. 1). Построенная зависимость $\bar{A} = \bar{A}(\alpha)$ показывает существование интервала углов атаки $[\alpha_1, \alpha_2]$, в котором происходит резкое увеличение, а затем падение амплитуды $\bar{A}(\alpha)$ колебаний. Возникновение ветрового резонанса при этом исключено, так как значение динамического числа Струхаля $Sh_\text{Д} = \nu a/V_\infty = 0,1$ меньше его кинематического значения $Sh_\text{К} = 0,2$.

В литературе наличие интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$ связывают со срывом потока с профиля и называют потерей аэродинамического демпфирования. Это явление характерно не только для плохообтекаемых, но также и для крыловых профилей [2].

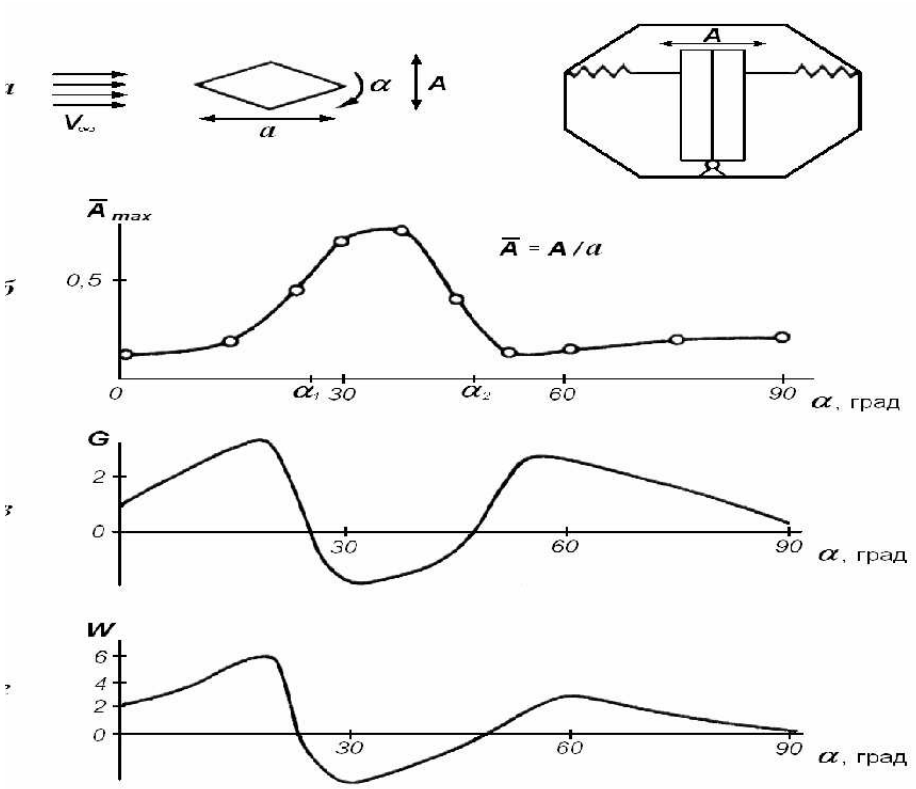


Рис. 1.

2. В экспериментальной работе [3] изучалось поведение модели биплана в воздушном потоке при условии, что модель имеет одну степень свободы — возможны только крутильные колебания вокруг поперечной оси. Было отмечено наличие интервала углов $[\alpha_1, \alpha_2]$, в котором наблюдалось резкое возрастание (а затем столь же резкое падение) амплитуды крутильных колебаний — авторотация. Упомянутые эксперименты были обработаны Х. Глауэртом [4], который вывел необходимое условие авторотации:

$$G(\alpha) = C_y' + C_x < 0\,. \tag{2.1}$$

Здесь C_y, C_x — стационарные аэродинамические коэффициенты подъёмной силы и лобового сопротивления; штрихом в работе обозначаются производные по углу атаки α.

С развитием средств передачи электроэнергии на большие расстояния на линиях электропередачи (ЛЭП) стали отмечаться явления больших (с амплитудой до 10 м) колебаний проводов между опорами. Такие колебания были названы галопированием (пляской) проводов. Дж. Ден-Гартог [5], изучая поведение плохообтекаемого профиля (полукруг) с одной степенью свободы (колебания поперёк потока), вывел необходимое условие галопирования, которое также имеет вид (2.1).

Итак, неравенство (2.1) является необходимым условием «больших» колебаний с одной степенью свободы — авторотации и галопирования.

Условие Глауэрта – Ден-Гартога подтверждено в многочисленных экспериментах [1] и нашло приложение в строительном деле: при проектировании высотных сооружений, подверженных ветровым нагрузкам, необходимо сориентировать поперечное сечение конструкции так, чтобы углы атаки по отношению к господствующим ветрам были бы вне интервала неустойчивости $[\alpha_1, \alpha_2]$ [6].

В работе [7] при имитации поведения провода ЛЭП под действием ветра рассмотрены движения профиля (с упруго-вязкими связями) с тремя степенями свободы — движения по осям Ox, Oy и вращение вокруг центра масс. Выяснены условия существования статических решений системы уравнений движения: если профиль является несущим ($C_y \neq 0$), то положения равновесия существуют при любой скорости ветра $V_\infty > 0$.

При изучении устойчивости по Ляпунову положений равновесия получены следующие результаты:

• условие (2.1) является достаточным условием неустойчивости модели с одной степенью свободы, если не учитывать вязкое сопротивление связей;

• выведено включающее в себя только аэродинамические характеристики профиля условие неустойчивости положений равновесия (для трёх степеней свободы):

$$W(\alpha) = C_x(C'_y + C_x) + C_y(C_y - C'_x) < 0\,. \tag{2.2}$$

Таблица 1

α,град	C_x	C_y	$G(\alpha)$	$W(\alpha)$
0	0,70	0,00	1,50	2,23
10	0,64	0,15	2,02	3,36
20	0,60	0,41	3,24	5,86
25	0,60	0,64	–2,04	–3,82
35	0,80	0,25	–1,49	–1,79
45	0,83	–0,15	–1,46	–1,91
50	0,80	–0,35	1,83	2,07
60	0,80	–0,10	2,29	2,48
70	0,98	0,10	1,32	1,26
80	1,10	0,13	0,53	0,01

В [8] отмечается, что для профилей при определённых углах атаки выполняется неравенство $C_y - C'_x < 0$. Поэтому в тех интервалах угла атаки, где $C_y > 0$, второе слагаемое в (2.2) отрицательно, и, вследствие этого, интервал углов атаки, где равновесие может быть неустойчиво по (2.2) шире соответствующего интервала, вычисленного по (2.1).

В табл. 1 в первых двух колонках приводятся данные по исследованию аэродинамических коэффициентов C_x и C_y ромбовидного профиля (см. пример в п.1); в двух последних колонках представлены результаты вычисления величин $G(\alpha)$ и $W(\alpha)$, их отрицательные значения подчёркнуты. Видно, что в интервале $\alpha \in [25°, 45°]$ происходит потеря устойчивости по обоим условиям, что соответствует экспериментальным данным (см. рис. 1).

В работе [9] приводятся результаты обработки экспериментальных данных по исследованию прямоугольного, квадратного и близкого к астроиде профилей.

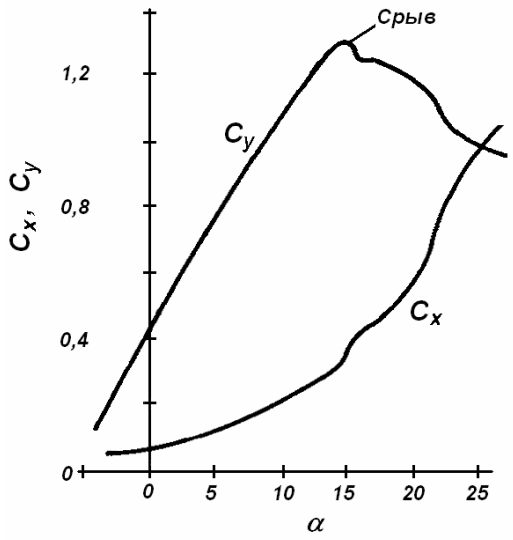


Рис. 2.

В табл. 2 приведены характеристики для профиля крыла самолёта (хорошо обтекаемый профиль с большим значением аэродинамического качества — отношения $K = C_y/C_x$, $C_x \neq 0$), вычисленные по данным испытаний, представленным в [2] в виде графиков (см. рис. 2). Условие $G(\alpha) < 0$ является «необходимым», т.к. выполняется вслед за срывом потока с профиля при $\alpha = 14,75°$; $W(\alpha) < 0$ — «достаточное» условие, т.к. его выполнение предшествует срыву потока.

Таблица 2

α, град	C_x	C_y	$K = C_y/C_x$	$G(\alpha)$	$W(\alpha)$
0	0,0777	0,4440	5,7141	3,267	28,521
5	0,1332	0,7437	5,8333	3,323	31,812
10	0,2220	1,0545	4,7500	4,050	13,113
13	0,2775	1,2210	4,4000	3,467	7,197
14	0,3108	1,2765	4,1071	8,849	–31,117
14,75	0,3718	1,2876	3,4632	–4,454	–21,445
15	0,3829	1,2654	3,3048	–2,169	–11,645
...	...	...	...	<0	<0
25	0,9546	0,9546	1,0000	–0,637	–2,178

3. В работе [10] при обсуждении аэродинамических характеристик т.н. расщеплённого токоведущего провода ЛЭП, являющегося (в поперечном сечении) системой круговых профилей, была сформулирована гипотеза об аддитивности характеристик подобных конструкций: коэффициенты $C_y^{(K)}$, $C_x^{(K)}$ системы профилей как целого есть алгебраические

суммы соответствующих коэффициентов отдельных профилей:

$$C_y^{(K)} = \sum_{i=1}^{n} C_{yi}\,, \quad C_x^{(K)} = \sum_{i=1}^{n} C_{xi}\,, \quad K^{(K)} = C_y^{(K)}/C_x^{(K)}\,. \tag{3.1}$$

Для экспериментальной проверки гипотезы (3.1) была изготовлена модель — система из четырёх круговых цилиндров: $d = 35$мм, $l = 900$мм, шаг расщепления $h = 400$мм (рис. 3а). Цилиндры фиксировались двумя круглыми шайбами диаметром $D = 760$ мм. Плоские шайбы устраняли перетекание потока по торцам модели, что вместе с большим относительным удлинением цилиндров ($l/d \approx 25,7$) создавало условия, близкие к условиям плоской задачи. Продувка модели производилась в аэродинамической трубе Т–1 ЦАГИ. По экспериментальным данным $C_y^{(K)}$, $C_x^{(K)}$ построена кривая $K^{(K)} = K_{\text{эксп}}^{(K)}(\alpha)$. Для вычисления теоретических значений $K_{\text{теор}}^{(K)}(\alpha)$, согласно гипотезе (3.1), использовались формулы, приведённые в [11]. На рис. 3б, 3в даны графики $K_{\text{эксп}}^{(K)}(\alpha)$ и $K_{\text{теор}}^{(K)}(\alpha)$ соответственно; в табл. 3 приведены результаты вычисления $C_x^{(K)}$, $C_y^{(K)}$, $K_{\text{эксп}}^{(K)}(\alpha)$, $G(\alpha)$, $W(\alpha)$.

Из таблицы видно, что интервал углов атаки, в котором $W(\alpha) < 0$, шире такового, где $G(\alpha) < 0$, о чём упоминалось выше.

Таблица 3

α, рад	$C_x^{(K)}$	$C_y^{(K)}$	$K_{\text{эксп}}^{(K)}$	$G(\alpha)$	$W(\alpha)$
0,01	3,4266	0,0140	0,0041	7,7776	2,2666
0,05	3,4602	0,2218	0,0641	9,4016	2,6651
0,11	3,7046	0,4610	0,1244	4,5846	1,0542
0,15	4,0090	0,4096	0,1022	0,9390	0,0347
0,17	4,1879	0,3330	0,0795	–0,0471	–0,1739
0,19	4,3704	0,2402	0,0550	–0,3266	–0,1850
0,21	4,5420	0,1451	0,0320	0,0925	–0,0410
0,23	4,6860	0,0622	0,0133	1,0865	0,2064
0,25	4,7820	0,0011	0,0002	1,7280	0,3480
...	...	...	...	> 0	> 0
0,76	4,2964	–0,0250	–0,0058	6,1598	1,4300
$\pi/4$	4,2942	0,0	0,0		1,29

Отметим, что в [11] разработана методика вычисления аэродинамических характеристик произвольных систем круговых профилей, а также сформулированы некоторые рекомендации по повышению аэродинамической устойчивости конструкций.

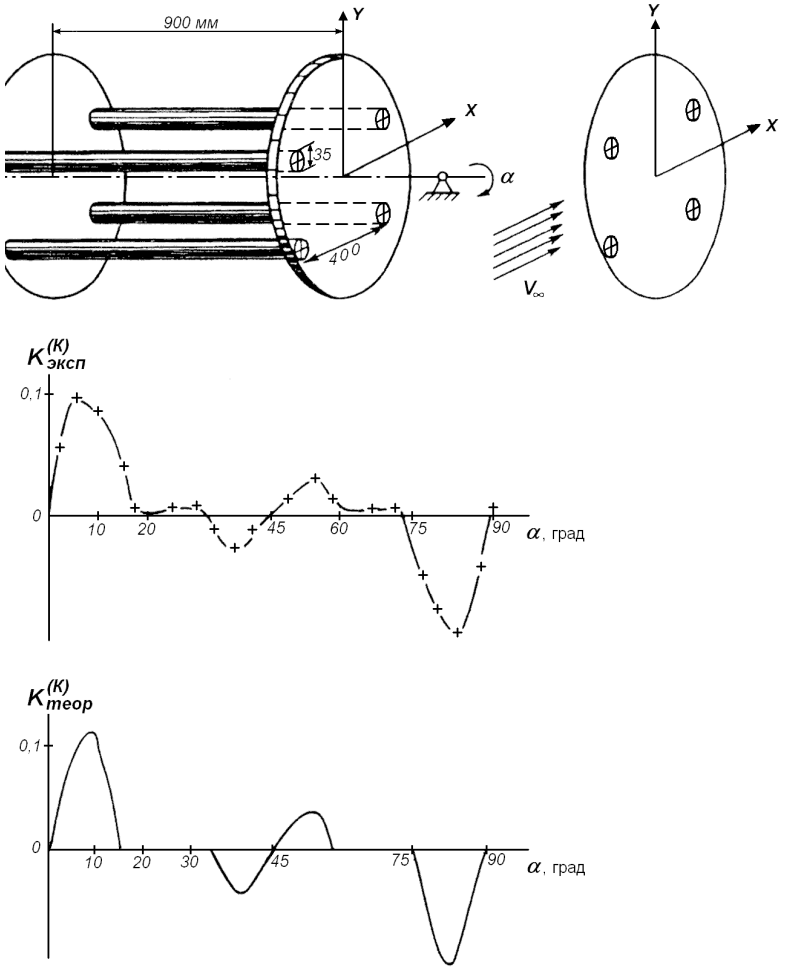


Рис. 3.

Литература

1. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидроаэродинамика отрывного обтекания тел / К.К. Федяевский. — М.: Машиностроение, 1977. — 198 с.

2. Чжен П. Отрывные течения / П.Чжен. — М.: Мир, 1973. Т.2. -— 280 с.

3. Relf E.H., Lavender T. The auto-rotation of stalled aerofoils // Great Britain Advisory Committee for Aeronautics (GBACA)/ Reports & Memoranda. — Okt. 1918. – N549. — P.9.

4. Glauert H. The rotation of an aerofoil about a fixed axis // GBACA. R&M. — March 1919. – N595. -— P.8.

5. Den-Hartog J.P. Transmission line's vibrations due to sleet // Transactions AIEE. -— 1932. – 51. -— P.1074-1076

6. Руководство по расчёту сооружений на действие ветра. — М.: Стройиздат, 1978. — 124 с.

7. Ванько В.И. Математическая модель пляски провода ЛЭП // Изв. вузов. Энергетика. — 1991. – № 11. — С.36-42.

8. Бетц А. Прикладная теория крыла. Аэродинамика / А.Бетц. — М.: Оборонгиз, 1940. Т.IV. -— 464 с.

9. Ванько В.И., Соловьёва Е.В. Об условиях аэродинамической неустойчивости положений равновесия профилей // Прикл. механика и техн. физика. — 1996. – 37;5. — С.29-34.

10. Астахов Ю.Н., Ванько В.И., Овчинников В.В. Разработка системы проектирования расщепленной фазы для компактных ЛЭП // Известия РАН. Энергетика. — 1993. – 4. — С.52-59.

11. Ванько В.И., Соловьёва Е.В., Феоктистов В.В. Аэродинамические характеристики расщеплённых проводов для линий электропередачи // Изв. РАН. — 1994. – №4. — С.104-111.

LYAPUNOV INSTABILITY OF PROFILE EQUILIBRIUM POSITIONS IN AIR STREAM

V.I. Vanko

Bauman MSTU

2d Bauman St., 5, Moscow, 105005, Russia, e-mail: vvanko@mail.ru

Some results concerning the aeroelasticity obtained during last decade at the «Applied mathematics» cathedra of Bauman MSTU are proposed.

Key words: aerodynamical coefficients, aerodynamical stability, autorotation, flow destruction.

УДК 517.987

АЛГЕБРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1)]

Ю.П. Вирченко, Н.Н. Витохина

Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Строится алгебра преобразований последовательностей из $\mathbb{C}^{\infty}$. Разработанный алгебраический формализм применяется для вычисления коэффициентов разложения суперпозиций аналитических функций, определённых степенными рядами.

Ключевые слова: аналитические функции, степенные ряды, операция свёртки, суперпозиции функций.

1. Введение. Составным элементом решения многих математических задач является анализ функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, определённых посредством их разложений в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{1}$$

с наборами коэффициентов $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ и сходящихся в окрестности некоторой фиксированной точки z_0. В процессе анализа приходится выполнять различные операционные действия с этими функциями: их дифференцирование и интегрирование, обращение и различные алгебраические преобразования, решение дифференциальных уравнений, в которых функции $f(z)$ присутствуют в качестве коэффициентов и т.д. Все эти действия приходится осуществлять в терминах разложений (1), оперируя только наборами $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$, и результатом этих действий снова являются степенные ряды.

Помимо вопросов, связанных собственно с функциями $f(z)$, на которые необходимо получать ответ в результате анализа их коэффициентов, например, о значениях функций в определённых точках или об оценке этих значений при изменении аргумента z в некоторой области, об асимптотическом поведении в окрестностях различных точек, о расположении и характере их особенностей, часто объектом исследования являются не сами функции, а только определяющие их коэффициенты. Наиболее важными примерами в этом отношении могут служить так называемые производящие функции, которые появляются в некоторых задачах аналитической теории чисел [1], в задачах комбинаторики [2], в теории специальных функций [3], в задачах теории вероятностей, связанных с распределениями вероятностей дискретных случайных величин [4], в том числе в задачах математической физики (см., например, [5], [6]). Центральной проблемой в этих задачах является вычисление (в общем случае, приближённое) набора коэффициентов $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ либо их оценка. Обычно, решение тех задач, для которых в качестве инструмента исследования вводится производящая функция, состоит в том, что подыскивается последовательность простых, в смысле их явной выполнимости, математических операций, которые позволяют либо найти производящую функцию явно, а затем разложить в степенной ряд, либо свести её вычисление к решению какого-либо уравнения, которому она удовлетворяет и которое

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

позволяет получить требуемую информацию о её коэффициентах. Возможны, однако, случаи, когда даже конструирование указанной последовательности операций, упрощающей получение явного вида производящей функции, не позволяет произвести все указанные выше вычисления, и приходится на каждом этапе оперировать только со степенными рядами. В этом случае возникает проблема приближённого выполнения всех необходимых операций над рядами с контролируемой оценкой точности, которая понимается как оценка точности приближений последовательности её коэффициентов разложения.

В настоящей работе мы изложим некоторые базовые положения алгебраического исчисления последовательностей коэффициентов степенных рядов, которое упрощает и унифицирует многие операции, связанные с преобразованиями степенных рядов. По-видимому, это исчисление может иметь многочисленные применения. Уверенность в этом придаёт тот факт, что похожие алгебраические построения получили распространение в статистической механике (см., например, [7]) и конструктивной квантовой теории поля (см., например, [8]). В этой работе мы применяем разработанную алгебраическую технику к вычислению коэффициентов a_k и/или их оценке, равномерной по номеру $k \in \mathbb{N}_+$ для функций $f(z)$, которые являются результатом суперпозиции $f_n(f_{n-1}(...f_2(f_1(z))...))$ последовательности функций $\langle f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)\rangle$, $z \in \mathbb{C}$, заданных рядами

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} (z - z_0)^k \,, \quad j = 1 \div n \,,$$

сходящимися в окрестности точки z_0. Естественно, предполагается, что каждый из этих рядов имеет ненулевой радиус сходимости r_j, $j = 1 \div n$, соответственно. При этом для результирующей функции $f(z)$ вычисляются коэффициенты определяющего её ряда, также имеющего ненулевой радиус сходимости. Применение предлагаемой техники позволяет получить алгебраический алгоритм вычисления коэффициентов суперпозиции произвольной совокупности аналитических функций, заданных в виде степенных рядов, и найти эффективные оценки величины их коэффициентов a_k, $k \in \mathbb{N}_+$.

2. Линейное многообразие $\mathbb{C}^\infty$. Мы начинаем изложение с линейного многообразия $\mathbb{C}^\infty$ бесконечных последовательностей $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ комплексных чисел (в связи с дальнейшими применениями вводимых обозначений, мы нумеруем компоненты последовательностей метками из $\mathbb{N}_+ = \langle 0, 1, 2, ...\rangle$), которые в дальнейшем называем элементами всякий раз, когда нет необходимости указывать их математическую природу. Линейные операции на многообразии $\mathbb{C}^\infty$ и нулевой элемент $\mathbf{0} = \langle a_k = 0; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ определены естественным образом. А именно, если $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ и $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ – любые две последовательности из $\mathbb{C}^\infty$, то последовательности $\mathsf{a} + \mathsf{b}$ и $\lambda\mathsf{a}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ определяются формулами

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = \langle a_k + b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \,, \quad \lambda\mathsf{a} = \langle \lambda a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \,. \tag{2}$$

Образ естественной инъекции линейного многообразия $\mathbb{C}^{n+1}$ конечных последовательностей $\langle a_k; k = 0 \div n\rangle$ длины $(n+1)$ в $\mathbb{C}^\infty$, определяемых по формуле

$$\langle a_k; k = 0 \div n\rangle \mapsto \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle = \begin{cases} b_k = a_k & , \text{если } k = 0 \div n \,, \\ b_k = 0 & , \text{если } k > n \,, \end{cases}$$

является линейным подмногообразием в $\mathbb{C}^\infty$, которое мы обозначим $\mathbb{C}^\infty_n$.

Теоретико-множественный предел расширяющейся последовательности $\langle \mathbb{C}_n^\infty; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ представляет собой линейное подмногообразие в $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из финитных последовательностей $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$, у которых все $a_k = 0$, начиная с достаточно большого номера k. Это подмногообразие мы обозначаем посредством $\mathbb{C}^{(0)}$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{C}_n^\infty = \mathbb{C}^{(0)} . \tag{3}$$

Для каждого элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ любую из его компонент a_k, $k \in \mathbb{N}_+$ можно рассматривать как соответствующую проекцию на $\mathbb{C}$. Мы будем записывать этот факт в виде $a_k = (\mathsf{a})_k$. Кроме того, для каждого элемента $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ из $\mathbb{C}^\infty$ обозначим посредством $\mathsf{a}^{(n)}$ его проекцию на $\mathbb{C}_n^\infty$, где $\left(\mathsf{a}^{(n)}\right)_k = a_k$ при $k \le n$ и $\left(\mathsf{a}^{(n)}\right)_k = 0$ при $k > n$.

3. Линейное многообразие полиномов. Введём теперь в рассмотрение линейные многообразия $\mathfrak{L}_n$, $n \in \mathbb{N}_+$, $\dim \mathfrak{L}_n = n+1$ полиномов $p(z)$, $z \in \mathbb{C}$ степени, не превосходящей n,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k , \quad \deg p(z) \le n , \tag{4}$$

с естественными линейными операциями над полиномами

$$\begin{aligned} \lambda p(z) \qquad &= \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k z^k , \quad \lambda \in \mathbb{C} , \\ p(z) + q(z) \quad &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) z^k , \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k .$$

Теоретико-множественный предел расширяющейся последовательности $\langle \mathfrak{L}_n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ представляет собой линейное многообразие, обозначаемое нами

$$\mathfrak{L}^{(0)} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n .$$

Оно состоит из всех полиномов без ограничения на степень.

Формула (4) определяет отображение $\mathsf{F} : \mathbb{C}^{(0)} \mapsto \mathfrak{L}^{(0)}$, которое является биекцией. Связи линейных операций над полиномами с линейными операциями над последовательностями из $\mathbb{C}^{(0)}$, которые следуют из формул (5), указывают на то, что это отображение линейно и поэтому оно устанавливает изоморфизм между $\mathbb{C}^{(0)}$ и $\mathfrak{L}^{(0)}$. При этом каждому элементу $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ из $\mathbb{C}^{(0)}$ сопоставляется полином $p(z)$ степени $n = \max\{k : a_k \neq 0\}$. Образ этого элемента будем обозначать $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $z \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$p(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}] , \tag{6}$$

где

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k , \tag{7}$$

и, ввиду (5), для любых двух элементов $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^{(0)}$, $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$ и числа $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения

$$\begin{array}{ll} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}+\mathsf{b}] & = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}] + \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,, \\ \mathsf{F}[z|\lambda\mathsf{a}] & = \lambda\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,. \end{array} \tag{8}$$

4. Операция свёртки. Введём на многообразии $\mathbb{C}^\infty$ бинарную операцию, которая называется *свёрткой* последовательностей и которую будем обозначать символом $*$. Операция свёртки сопоставляет любым двум элементам $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ элемент $\mathsf{a}*\mathsf{b}$ с компонентами

$$(\mathsf{a} * \mathsf{b})_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\,, \quad k \in \mathbb{N}_+\,. \tag{9}$$

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Если* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$, *то* $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$. *При этом если* $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty_m$, $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty_n$, *то* $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty_{m+n}$.

□ При $k > m+n$ в формуле (9) все слагаемые равны нулю: либо потому что $k \geq j > m$ и $a_j = 0$, либо потому что $j \leq m$, но при этом $k - j > n$ и $b_{k-j} = 0$. ■

Отображение F мультипликативно на $\mathbb{C}^{(0)}$, то есть справедлива

Т е о р е м а 2. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$ *имеет место тождество*

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{10}$$

□ Так как для элементов $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$, в силу теоремы 1, ряды, определяющие $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$, $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, конечны, то обоснованы их следующие алгебраические преобразования

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}] = \sum_{l=0}^{\infty} z^l (\mathsf{a} * \mathsf{b})_l = \sum_{l=0}^{\infty} z^l \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k \sum_{l=k}^{\infty} z^{l-k} b_{l-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l b_l\right) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,. \quad ■$$

Алгебраические свойства свёртки описываются следующим утверждением.

Т е о р е м а 3. *Операция свёртки коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна относительно сложения на* $\mathbb{C}^\infty$, *т.е. для любых трёх элементов* $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathbb{C}^\infty$ *имеют место тождества*

$$\mathsf{a} * \mathsf{b} = \mathsf{b} * \mathsf{a}\,, \quad (\mathsf{a} * \mathsf{b}) * \mathsf{c} = \mathsf{a} * (\mathsf{b} * \mathsf{c})\,, \tag{11}$$

$$(\mathsf{a} + \mathsf{b}) * \mathsf{c} = \mathsf{a} * \mathsf{c} + \mathsf{b} * \mathsf{c}\,. \tag{12}$$

Кроме того, для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ *и любых* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ *выполняется тождество*

$$(\lambda\mathsf{a}) * \mathsf{b} = \lambda(\mathsf{a} * \mathsf{b})\,. \tag{13}$$

□ Первое тождество в (11) получается заменой переменной суммирования j на $(k-j)$ в (9). Тождества (12) и (13) очевидны. Доказательство второго тождества в (11) проще всего доказать, воспользовавшись изоморфизмом между линейными многообразиями $\mathbb{C}^{(0)}$

и $\mathfrak{L}^{(0)}$. В этом случае левой и правой частям этого тождества соответствует один и тот же полином $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{c}]$. Таким образом, оно верно для элементов из $\mathbb{C}^{(0)}$.

Пусть теперь $\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}$ – произвольные элементы из $\mathbb{C}^{\infty}$. Зафиксируем число $n\in\mathbb{N}$ и определим для него проекции $\mathsf{a}^{(n)}$, $\mathsf{b}^{(n)}$, $\mathsf{c}^{(n)}$ этих последовательностей, которые являются элементами из $\mathbb{C}^{(0)}$.

Для любого $\mathsf{h}\in\mathbb{C}^{\infty}$ справедливо $(\mathsf{h})_k=(\mathsf{h}^{(n)})_k$ при $k=0\div n$. Поэтому для любых $\mathsf{f},\mathsf{g}\in\mathbb{C}^{\infty}$ имеет место $(\mathsf{f}*\mathsf{g})^{(n)}=\left(\mathsf{f}^{(n)}*\mathsf{g}^{(n)}\right)^{(n)}$. Так как $\mathsf{a}^{(n)}$, $\mathsf{b}^{(n)}$, $\mathsf{c}^{(n)}\in\mathbb{C}^{(0)}$ для любых $\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}\in\mathbb{C}^{(0)}$, то это равенство приводит к тому, что доказываемое тождество справедливо для проекций на $\mathbb{C}^{\infty}_n$, $n\in\mathbb{N}$,

$$((\mathsf{a}*\mathsf{b})*\mathsf{c})^{(n)}=\left((\mathsf{a}^{(n)}*\mathsf{b}^{(n)})^{(n)}*\mathsf{c}^{(n)}\right)^{(n)}=$$

$$=\left(\mathsf{a}^{(n)}*(\mathsf{b}^{(n)}*\mathsf{c}^{(n)})^{(n)}\right)^{(n)}=(\mathsf{a}*(\mathsf{b}*\mathsf{c}))^{(n)}\,.$$

Ввиду произвольности числа $n\in\mathbb{N}$, имеет место равенство всех компонент с любым номером k соответствующих друг другу левых и правых частей равенств (11)-(13). ■

5. Алгебра $\mathbb{C}^{\infty}$. Теорема 3 указывает на то, что свёртка играет роль "умножения"на линейном многообразии $\mathbb{C}^{\infty}$. При наличии такого умножения, $\mathbb{C}^{\infty}$ превращается в коммутативную алгебру над полем $\mathbb{C}$, которую мы будем обозначать тем же символом $\mathbb{C}^{\infty}$.

В алгебре $\mathbb{C}^{\infty}$ имеется единица e, которая представляется последовательностью $\mathsf{e}=\langle 1,0,0,...\rangle$, так как для любого $\mathsf{a}\in\mathfrak{L}$ выполняются соотношения

$$\mathsf{a}*\mathsf{e}=\mathsf{e}*\mathsf{a}=\mathsf{a}\,, \tag{14}$$

например, $(\mathsf{a}*\mathsf{e})_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_ke_{n-k}=a_ne_0=a_n$. Для элемента e, в соответствии с (7), имеем $\mathsf{F}[z|\mathsf{e}]=1$.

Очевидно, что подмножество $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}=\{\mathsf{a}\in\mathbb{C}^{\infty}:(\mathsf{a})_0=0\}$ является линейным подмногообразием в $\mathbb{C}^{\infty}$, т.е. оно замкнуто относительно линейных операций. Кроме того, оно замкнуто относительно операции свёртки, так как на основании (9) имеем

$$(\mathsf{a}*\mathsf{b})_0=a_0b_0=0 \tag{15}$$

для любой пары a и b элементов из $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$. Следовательно, многообразие $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$ вместе с операцией свёртки образует подалгебру (без единицы) алгебры $\mathbb{C}^{\infty}$. Её мы будем обозначать тем же символом $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$.

Подалгебра $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$ является идеалом алгебры $\mathbb{C}^{\infty}$, т.е. для любого $\mathsf{a}\in\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$ и любого $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{\infty}$ имеет место $\mathsf{a}*\mathsf{b}\in\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$, что следует из (15).

В связи с особой ролью подалгебры $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$ введём полезную для дальнейших построений операцию проектирования произвольного элемента $\mathsf{a}\in\mathbb{C}^{\infty}$ на подалгебру $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$. А именно, будем обозначать посредством $\bar{\mathsf{a}}$ проекцию элемента $\mathsf{a}=\langle a_n;n\in\mathbb{N}_+\rangle$, $\bar{\mathsf{a}}\equiv\mathsf{a}+(-a_0)\mathsf{e}=\langle 0,a_1,a_2,...\rangle$. Таким образом, по определению,

$$\mathsf{a}=a_0\mathsf{e}+\bar{\mathsf{a}}\,. \tag{16}$$

Алгебра $\mathbb{C}^{\infty}$ является алгеброй без деления. В самом деле, из выполнимости равенства $\mathsf{a}*\mathsf{b}=\mathsf{e}$ для некоторой пары a и b элементов из $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$ следует $(\mathsf{a}*\mathsf{b})_0=a_0b_0=1$, что невозможно в том случае, когда $\mathsf{a}\in\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$. Следовательно, элементы из $\bar{\mathbb{C}}^{\infty}$ не имеют обратных.

Однако, подалгебра $\bar{\mathbb{C}}^\infty$ является максимальным идеалом в алгебре $\mathbb{C}^\infty$, то есть имеет место

Т е о р е м а 4. *Для любого элемента* $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}^\infty$ *существует единственный обратный ему элемент* b, *удовлетворяющий равенствам*

$$\mathsf{a} * \mathsf{b} = \mathsf{b} * \mathsf{a} = \mathsf{e}\,. \tag{17}$$

□ Определим компоненты последовательности $\mathsf{b} = \langle b_n : n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ рекуррентно следующей формулой

$$b_n = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} b_{n-k} a_k\,, \quad n = 1, 2, \dots\,, \tag{18}$$

где $a_0 \neq 0$, если $\mathsf{a} \notin \bar{\mathbb{C}}^\infty$. При этом положим $b_0 = a_0^{-1}$. Очевидно, что таким образом определённый элемент b удовлетворяет (17), так как $a_0 b_0 = 1$, и для любого $n \in \mathbb{N}$, выполняется тождество

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n-k} a_k = 0\,. \tag{19}$$

С другой стороны, если для некоторого элемента $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^\infty$ выполняется (17) при заданном $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}^\infty$, то $a_0 b_0 = 1$ и выполняется тождество (19), из которого следует (18). Таким образом, элемент b определяется равенствами (17) единственным образом. ■

В связи с доказанной теоремой введем обозначение a^{-1} для элемента, обратного элементу $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}^\infty$. Для него имеют место равенства

$$\mathsf{a}^{-1} * \mathsf{a} = \mathsf{a} * \mathsf{a}^{-1} = \mathsf{e}\,, \tag{20}$$

и его компоненты определяются формулами

$$(\mathsf{a}^{-1})_0 = a_0^{-1}\,,$$

$$(\mathsf{a}^{-1})_n = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{a}^{-1})_{n-k} a_k\,, \quad n = 1, 2, \dots\,. \tag{21}$$

Будем далее использовать следующие сокращённые обозначения для степеней любого элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$:

$$\mathsf{a}^0 = \mathsf{e}, \quad \mathsf{a}^1 = \mathsf{a}, \quad \mathsf{a} * \mathsf{a} = \mathsf{a}^2\,, \ \dots\,, \quad \mathsf{a}^n * \mathsf{a} = \mathsf{a}^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{22}$$

Из определения степени элемента $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ непосредственно следует

Т е о р е м а 5. *Компоненты* $(\mathsf{a}^n)_m$, $m \in \mathbb{N}_+$ *степеней* $n \in \mathbb{N}$ *элемента* $\mathsf{a} = \langle a_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ *определяются формулой*

$$(\mathsf{a}^n)_m = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0: \\ k_1 + \dots + k_n = m}} a_{k_1} \dots a_{k_n}\,, \quad m = 1, 2, \dots\,. \tag{23}$$

□ Доказательство этого утверждения проведём индукцией по n, начиная с $n = 2$. При $n = 2$ имеем

$$(\mathsf{a}^2)_m = \sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} = \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0: \\ k_1 + k_2 = m}} a_{k_1} a_{k_2}\,.$$

Пусть для n-й степени формула (23) верна. На основе рекуррентного определения степени построим индукционный шаг к значению $(n+1)$:

$$(\mathsf{a}^{n+1})_m = (\mathsf{a}^n * \mathsf{a})_m = \sum_{j=0}^{m} (\mathsf{a}^n)_j \, a_{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geq 0: \\ k_1+\ldots+k_n=j}} a_{k_1}\ldots a_{k_n} \right) \cdot a_{m-j} =$$

$$= \sum_{\substack{j,k_{n+1} \geq 0: \\ j+k_{n+1}=m}} a_{k_{n+1}} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \geq 0: \\ k_1+\ldots+k_n=j}} a_{k_1}\ldots a_{k_n} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{n+1} \geq 0: \\ k_1+\ldots+k_{n+1}=m}} a_{k_1}\ldots a_{k_{n+1}} \, . \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Если* $\mathsf{a} \in \bar{\mathbb{C}}^{\infty}$, *то для степеней этого элемента имеет место формула*

$$(\mathsf{a}^n)_m = \sum_{\substack{n > j_1,\ldots,j_n \geq 1: \\ j_1+\ldots+j_n=m}} a_{j_1}\ldots a_{j_n} \, , \tag{24}$$

и поэтому

$$(\mathsf{a}^n)_m = 0 \tag{25}$$

для всех $m > n$.

6. Полиномы в алгебре $\mathbb{C}^{\infty}$**.** На алгебре $\mathbb{C}^{\infty}$ определены выражения вида

$$p(\mathsf{b}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{b}^k \, , \tag{26}$$

представляющие собой *полиномы* от элементов $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{\infty}$. Каждому полиному такого типа сопоставим полином $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ над $\mathbb{C}$, который является образом последовательности $\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ... \rangle$ при отображении F, $p(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$. Пусть элемент b принадлежит алгебре $\mathbb{C}^{(0)}$. Сопоставим этому элементу полином $q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$. Так как $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{(0)}$, то элемент $p(\mathsf{b})$ также содержится в $\mathbb{C}^{(0)}$. Поэтому образ $\mathsf{F}[z|p(\mathsf{b})]$ этого элемента при отображении F также является полиномом. В этом случае возникает вопрос о связи между всеми введёнными полиномами. Для формулировки ответа на этот вопрос введём следующие определения. Обозначим посредством $(p \circ q)(z)$ операцию *суперпозиции* двух полиномов $p(z)$ и $q(z)$, результатом которой является полином $p(q(z))$, то есть

$$(p \circ q)(z) = p(q(z)) \, . \tag{27}$$

Линейное многообразие $\mathfrak{L}^{(0)}$, снабжённое этой операцией, является полугруппой с единицей, представленной полиномом $p(z) = z$.

Кроме того, введём бинарную операцию двух последовательностей $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^{(0)}$ и $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{\infty}$, которую также будем называть их суперпозицией и обозначать тем же символом $\circ$. Результатом $\mathsf{a} \circ \mathsf{b}$ применения этой операции к паре $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle$ является элемент из $\mathbb{C}^{\infty}$, которая представляется полиномом $p(\mathsf{b})$ вида (26), то есть

$$\mathsf{a} \circ \mathsf{b} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{b}^k \, . \tag{28}$$

Ответ на поставленный выше вопрос даёт утверждение о мультипликативности отображения F относительно операции суперпозиции.

Т е о р е м а 6. *Имеет место следующая формула суперпозиции*

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}] = (p\circ q)(z)\,. \tag{29}$$

□ Согласно определению полинома $p(\mathsf{b})$, линейности и мультипликативности отображения F на алгебре $\mathbb{C}^{(0)}$, получаем

$$\mathsf{F}[z|p(\mathsf{b})] = \mathsf{F}[z|\sum_{k=0}^{n} a_k\mathsf{b}^k] = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathsf{F}[z|\mathsf{b}^k] = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\right)^k =$$

$$= \mathsf{F}\left[\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]|\mathsf{a}\right] = p(q(z))\,. \quad \blacksquare$$

Таким образом, имеется два группоида с элементами соответственно из $\mathbb{C}^{(0)}$ и $\mathfrak{L}^{(0)}$ и с операцией суперпозиции $\circ$, причём на $\mathfrak{L}^{(0)}$ эта операция ассоциативна. Согласно доказанной теореме, между этими группоидами имеется изоморфизм, устанавливаемый отображением F. По этой причине операция суперпозиции ассоциативна на $\mathbb{C}^{(0)}$. Иными словами, из доказанной теоремы вытекает

С л е д с т в и е. *Многообразие $\mathbb{C}^{(0)}$ вместе с операцией суперпозиции на нём является полугруппой с единицей $\mathsf{i} = \langle 0,1,0,0,....\rangle$. При этом $z = \mathsf{F}[z|\mathsf{i}]$.*

□ В самом деле, пусть имеются три полинома p, q и r. Они определяются, соответственно элементами a, b и c из $\mathbb{C}^{(0)}$ так, что $p(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $q(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ и $r(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{c}]$. Тогда суперпозиции полиномов $p\circ(q\circ r)$ соответствует, согласно определению, элемент $\mathsf{a}\circ(\mathsf{b}\circ\mathsf{c})\in\mathbb{C}^{(0)}$, $(p\circ(q\circ r))(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ(\mathsf{b}\circ\mathsf{c})]$, а суперпозиции полиномов $(p\circ q)\circ r$ соответствует элемент $(\mathsf{a}\circ\mathsf{b})\circ\mathsf{c}\in\mathbb{C}^{(0)}$, $((p\circ q)\circ r)(z) = \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}\circ\mathsf{b})\circ\mathsf{c}]$. Ввиду ассоциативности суперпозиции полиномов $p(z)$, $q(z)$, $r(z)$, получаем равенство $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ(\mathsf{b}\circ\mathsf{c})] = \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}\circ\mathsf{b})\circ\mathsf{c}]$, которое влечёт равенство $\mathsf{a}\circ(\mathsf{b}\circ\mathsf{c}) = (\mathsf{a}\circ\mathsf{b})\circ\mathsf{c}$. ■

Заметим, что, как и при всяком изоморфном (или гомоморфном) отображении одной полугруппы на другую, единица i полугруппы $\mathbb{C}^{(0)}$ отображается посредством F в единицу полугруппы $\mathfrak{L}^{(0)}$.

Утверждение теоремы 6 непосредственно обобщается на произвольную последовательность полиномов $\langle p_1(z), p_2(z), ..., p_n(z)\rangle$. Справедлива

Т е о р е м а 7. *Пусть задана последовательность полиномов $\langle p_j(z)\in\mathfrak{L}^{(0)}; j = 1\div n\rangle$, определяемых посредством последовательности $\langle\mathsf{a}_n, ..., \mathsf{a}_2, \mathsf{a}_1\rangle$, то есть $p_j(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_j]$, $j = 1\div n$. Имеет место формула суперпозиции*

$$(p_n\circ ...\circ p_2\circ p_1)(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_n\circ ...\circ\mathsf{a}_2\circ\mathsf{a}_1]\,. \tag{30}$$

□ Доказательство проводится индукцией по n. Согласно теореме 6, утверждение верно при $n = 2$, где $p(z) = p_2(z)$, $q(z) = p_1(z)$. Индукционный шаг от n к $(n+1)$ строится также на основе утверждения этой теоремы, положив $p(z) = p_{n+1}(z)$, $q(z) = (p_n\circ ...\circ p_2\circ p_1)(z)$, $\mathsf{a} = \mathsf{a}_{n+1}$, $\mathsf{b} = \mathsf{a}_n\circ ...\circ\mathsf{a}_2\circ\mathsf{a}_1$,

$$(p_{n+1}\circ(p_n\circ ...\circ p_2\circ p_1))(z) = (p\circ q)(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}] =$$

$$= \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_{n+1}\circ(\mathsf{a}_n\circ ...\circ\mathsf{a}_2\circ\mathsf{a}_1)]\,. \quad \blacksquare$$

Формула (30) принципиально решает задачу об алгоритме последовательного вычисления коэффициентов полинома, являющегося суперпозицией $p_n(p_{n-1}(...(p_1(z))...))$ произвольного набора $\langle p_1(z), p_2(z), ..., p_n(z)\rangle$ полиномов. Они представляют собой компоненты элемента $\mathsf{a}_n \circ ... \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1 \in \mathbb{C}^{(0)}$ с соответствующим номером.

7. Аналитические функции в $\mathbb{C}^\infty$. Нашей следующей задачей является обобщение построенного алгоритма на бесконечные последовательности из $\mathbb{C}^\infty$, то есть распространение на эти последовательности теорем 2,6,7. Первым шагом на этом пути является введение понятия *аналитической функции* $g(\mathsf{a})$ *на алгебре* $\mathbb{C}^\infty$. Пусть $g(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$, определяемая степенным рядом

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

с ненулевым радиусом сходимости. Тогда для каждого $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ значение аналитической функции $g(\mathbf{a})$ на $\mathbb{C}^\infty$ даётся рядом (мы не вводим для функций, определяемых на $\mathbb{C}^\infty$, каких-либо обозначений, отличных от функций на $\mathbb{C}$, подразумевая, что смысл используемого функционального обозначения всегда ясен из смысла её аргумента):

$$g(\mathsf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathsf{a}^n\,; \quad b_n \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}_+ \tag{31}$$

в том случае, когда он покомпонентно сходится, т.е. по определению для каждого $m \in \mathbb{N}_+$ должен сходиться ряд

$$\left(g(\mathsf{a})\right)_m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\mathsf{a}^n\right)_m\ . \tag{32}$$

Если ряды (32) сходятся для всех $m \in \mathbb{N}_+$, то введенное понятие об аналитической функции на $\mathbb{C}^\infty$ можно рассматривать как обобщение определения операции суперпозиции двух элементов a и b, данного нами ранее, согласно (28), для финитных последовательностей из $\mathbb{C}^{(0)}$. Тогда, сохраняя прежнее обозначение для этой операции, формулу (31) можно записать в эквивалентном виде

$$\mathsf{b} \circ \mathsf{a} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathsf{a}^n\,; \quad b_n \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}_+\,. \tag{33}$$

Ряды (31) заведомо сходятся покомпонентно в том случае, когда $\mathsf{a} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$, так как, ввиду (25), они являются конечными. При этом каждая n-я компонента значения функции $g(\mathsf{a})$ вычисляется на основе конечного ряда

$$\left(g(\mathsf{a})\right)_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\mathsf{a}^k\right)_n\ . \tag{34}$$

В общем случае на вопрос о существовании значений аналитической функции g на $\mathbb{C}^\infty$ отвечает следующее утверждение.

Т е о р е м а 8. *Пусть элемент* $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ *такой, что его нулевая компонента* a_0 *находится внутри круга сходимости ряда* $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. *Тогда существует значение соответствующей аналитической функции (31), равное*

$$g(\mathsf{a}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(a_0)\, \bar{\mathsf{a}}^l \,. \tag{35}$$

□ Так как a_0 находится внутри круга сходимости, то по признаку Коши

$$|a_0| \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} < 1 \,.$$

Поэтому ряды $\sum\limits_{k=l}^{\infty} b_k \dfrac{a_0^{k-l} k!}{(k-l)!}$, определяющие значения l-х производных функции g в точке a_0, также сходятся. Это следует из оценки

$$|a_0| \limsup_{k\to\infty} \left| b_k \frac{k!}{(k-l)!} \right|^{1/k} = |a_0| \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} < 1 \,.$$

Ввиду сходимости рядов для производных, имеем

$$g(\mathsf{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathsf{a}^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(a_0 \mathsf{e} + \bar{\mathsf{a}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \bar{\mathsf{a}}^l a_0^{k-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=l}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-l)!} a_0^{k-l} \right) \bar{\mathsf{a}}^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(a_0)\, \bar{\mathsf{a}}^l \,.$$

Таким образом, каждая ненулевая компонента элемента из $\mathbb{C}^\infty$, являющегося значением аналитической функции g на элементе a, может быть представлена как соответствующая компонента значения на элементе $\bar{\mathsf{a}} \in \bar{\mathbb{C}}^\infty$ другой аналитической функции, которая порождается функцией

$$g_+(z, a_0) = g(z + a_0) - g(a_0) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l g^{(l)}(a_0)/l! \,,$$

аналитической в окрестности нуля. Последнее же значение заведомо существует ввиду конечности, согласно (35), каждого из определяющих их рядов. ■

З а м е ч а н и е. 1. Формулу (35) можно рассматривать как альтернативное выражение для вычисления суперпозиции двух элементов b и a из $\mathbb{C}^\infty$:

$$\mathsf{b} \circ \mathsf{a} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(a_0)\, \bar{\mathsf{a}}^l \,. \tag{36}$$

8. Топология в $\mathbb{C}^\infty$. В предыдущем пункте мы при построении аналитических функций на $\mathbb{C}^\infty$ использовали понятие покомпонентной сходимости. Тем самым мы ввели конкретный тип топологии в $\mathbb{C}^\infty$. Введение топологии на $\mathbb{C}^\infty$ превращает это линейное многообразие в линейное топологическое пространство. В этом пространстве имеется счётное

семейство окрестностей $U_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ элемента $\mathbf{0}$ с рациональными метками $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n$ и $n\in\mathbb{N}_+$, где

$$U_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n}=\{\mathsf{a}\in\mathbb{C}^\infty:|a_k|<\varepsilon_k,k=0\div n\},$$

то есть выполнена первая аксиома счётности. Тогда семейство открытых множеств $U_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}+\mathsf{a}$, где элементы a выбираются из $\mathbb{C}^\infty_n$, $n\in\mathbb{N}_+$ и имеют рациональные компоненты, образует счётную базу. Следовательно, введенное топологическое пространство сепарабельно.

Топология с указанной выше базой эквивалентна топологии счётно-нормированного пространства, у которого последовательность функционалов $\langle\mathsf{N}_m(\cdot);m\in\mathbb{N}\rangle$,

$$\mathsf{N}_m(\mathsf{a})=\sum_{k=0}^{m}|a_k|,\quad \mathsf{a}\in\mathbb{C}^\infty,\ m\in\mathbb{N}$$

на $\mathbb{C}^\infty$ является соответствующей счётной системой согласованных полунорм.

Замечательно то, что $*$-произведение в $\mathbb{C}^\infty$ определяет непрерывное отображение в описанной топологии покомпонентной сходимости, и поэтому при наличии операции умножения на $\mathbb{C}^\infty$ это сепарабельное топологическое пространство является сепарабельной топологической алгеброй.

Непрерывность произведения следует из того, что каждая n-компонента $(\mathsf{a}*\mathsf{b})_n$ произведения двух сомножителей a и b, согласно (9), определяется только компонентами этих сомножителей с номерами, не превосходящими n.

Топология покомпонентной сходимости очень грубая. Однако, несмотря на то, что база топологии имеет мощность $\aleph_0$, и при этом мощность множества $\mathbb{C}^\infty$ равна $\aleph_1^{\aleph_1}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_1}=2^{\aleph_1}=\aleph_2$, соответствующее линейное топологическое пространство $\mathbb{C}^\infty$ является отделимым, так как у двух различных последовательностей a и b из $\mathbb{C}^\infty$ всегда имеется первая отличающая их компонента с некоторым номером n. Поэтому при достаточно малой величине ε_n открытые множества $U_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n}+\mathsf{a}$ и $U_{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n}+\mathsf{b}$ разделяют a, и b.

9. Отношение порядка на $\mathbb{C}^\infty$. При нахождении априорных оценок остатков рядов, представляемых отображением $\mathsf{F}[z|\cdot]$, удобно использовать понятие о неравенствах на $\mathbb{C}^\infty$, т.е. считать порождающее многообразие полуупорядоченным. Это достигается соглашением о том, что если все компоненты a_k, $k\in\mathbb{N}_+$ элемента a неотрицательны, то, по определению, $\mathsf{a}\geq 0$. Тогда будем полагать, что два элемента a и b сравнимы, и писать $\mathsf{a}\geq\mathsf{b}$, если $\mathsf{a}+(-1)\mathsf{b}\geq 0$.

Для любого элемента $\mathsf{a}=\langle a_n;n\in\mathbb{N}_+\rangle\in\mathbb{C}^\infty$ обозначим $|\mathsf{a}|=\langle|a_n|;n\in\mathbb{N}_+\rangle$. Тогда $|\lambda\mathsf{a}|=|\lambda|\cdot|\mathsf{a}|$. Очевидно, что $|\mathsf{a}|\geq\mathsf{a}$ для любого элемента $\mathsf{a}\in\mathbb{C}^\infty$.

В соответствии с введённым соглашением для операции сложения и операции $*$ имеют место также неравенства

$$|\mathsf{a}+\mathsf{b}|\leq|\mathsf{a}|*|\mathsf{b}|,\quad |\mathsf{a}*\mathsf{b}|\leq|\mathsf{a}|*|\mathsf{b}| \tag{37}$$

при любых $\mathsf{a},\mathsf{b}\in\mathbb{C}^\infty$, то есть справедливы числовые неравенства для всех компонент последовательностей, стоящих в обеих их частях. Второе из неравенств (37) влечёт выполнение для любой степени $n\in\mathbb{N}_+$ и любого элемента $\mathsf{a}\in\mathbb{C}^\infty$ неравенства

$$|\mathsf{a}^n|\leq|\mathsf{a}|^n. \tag{38}$$

10. Пространства $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$. Перейдём теперь к распространению теорем 2, 6 и 7 на произвольное линейное многообразие всевозможных аналитических функций с общим множеством аналитичности. Для этого нам придётся, в частности, ввести другую топологию, так как отображение F, как указано в замечании 2, не является непрерывным относительно использованной нами ранее топологии покомпонентной сходимости.

Пусть $\mathfrak{A}$ – линейное многообразие с естественными линейными операциями функций комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, аналитических в каком-либо круге ненулевого радиуса с центром в точке $z = 0$. Таким образом, каждая функция из $\mathfrak{A}$ представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{39}$$

с набором коэффициентов $\langle a_k \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ таких, что

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} < \infty\,. \tag{40}$$

Согласно признаку Коши сходимости степенных рядов, это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд (39), построенный на основе последовательности $\langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ коэффициентов, принадлежал $\mathfrak{A}$. В связи с этим определим множество $\mathfrak{C} \subset \mathbb{C}^\infty$, состоящее из всех последовательностей $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle$ с компонентами $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_+$, для которых имеет место (40).

Степенной ряд (39), ввиду однозначности определения коэффициентов степенного разложения любой аналитической функции из $\mathfrak{A}$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$. Таким образом, многообразия $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$ изоморфны, и поэтому каждому набору операций, производимых с аналитическими функциями из $\mathfrak{A}$, можно сопоставить набор операций с соответствующими им последовательностями коэффициентов разложения из $\mathfrak{C}$. Как и в случае многообразия $\mathbb{C}^{(0)}$, отображение, осуществляющее это соответствие, будем обозначать посредством $\mathsf{F}[z|\cdot]$. Формула (38) при таком соглашении принимает вид $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$.

Линейным операциям над функциями $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ соответствуют линейные операции над последовательностями $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle \in \mathbb{C}^\infty$, $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+ \rangle \in \mathbb{C}^\infty$ определяющих их коэффициентов, которые выполняются по формулам (2). Так как в результате применения линейных операций над аналитическими функциями из $\mathfrak{A}$ снова получается аналитическая функция из $\mathfrak{A}$ (при этом сумма двух аналитических функций является аналитической в общем круге сходимости составляющих её слагаемых), то линейные операции над элементами из $\mathfrak{C}$ не выводят за пределы $\mathfrak{C}$. Таким образом, множество $\mathfrak{C}$ является линейным подмногообразием многообразия $\mathbb{C}^\infty$. Это многообразие, согласно (40), характеризуется тем, что на нём функционал

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}] \equiv \max\{|a_0|, \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^{1/k}\} \tag{41}$$

принимает конечные значения.

Заметим, что функционал $\mathsf{D}[\cdot]$ обладает следующим очевидным свойством

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}] = \mathsf{D}[|\mathsf{a}|]\,, \quad \mathsf{a} \in \mathfrak{C}$$

и монотонно возрастает по каждому направлению в пространстве $\mathfrak{C}$, то есть $\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}]$ — возрастающая функция от $\lambda > 0$ при фиксированном элементе a.

Элементы a из $\mathfrak{C}$ допускают другую характеризацию. А именно, для каждого из них существует число $\rho \in (0, \infty)$, для которого конечно значение функционала

$$||\mathsf{a}||_\rho \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}_+} \frac{|a_n|}{\rho^n}\,. \tag{42}$$

Каждое из множеств $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}$, $\rho \in (0, \infty)$, состоящее из элементов $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$, для которых $||\mathsf{a}||_\rho < \infty$, инвариантно относительно линейных операций, то есть является линейным многообразием. Семейство всех многообразий $\mathfrak{C}_\rho$ линейным образом упорядочено так, что $\mathfrak{C}_{\rho'} \subset \mathfrak{C}_\rho$ при $\rho' < \rho$. Очевидным образом функционал (42) при каждом допустимом значении ρ является нормой на $\mathfrak{C}_\rho$, и это многообразие полно относительно этой нормы, то есть является банаховым пространством. Таким образом, принадлежность элементов $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ к многообразию $\mathfrak{C}$ можно характеризовать двояким образом: либо посредством бесконечного множества норм $||\cdot||_\rho$, $\rho \in (0, \infty)$, либо посредством функционала $\mathsf{D}[\cdot]$. Точно также топологию многообразия $\mathfrak{C}$ можно вводить двояким образом. Проанализируем сначала последнюю возможность.

Т е о р е м а 9. *Функционал* $dist[\cdot,\cdot] : \mathfrak{C}\times\mathfrak{C} \mapsto [0, \infty)$, *определяемый формулой* $dist[\mathsf{a}, \mathsf{b}] = \mathsf{D}[\mathsf{a}-\mathsf{b}]$ *для каждой пары* a *и* b *элементов из* $\mathfrak{C}$, *является расстоянием на* $\mathfrak{C}$.(Далее мы будем часто употреблять термин расстояние по отношению к одному элементу $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, понимая под этим его расстояние до нуля, $\mathrm{dist}[\mathsf{a}, \mathbf{0}] = \mathsf{D}[\mathsf{a}]$.)

□ Для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить выполнимость неравенства треугольника, то есть что для любых двух последовательностей $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ имеет место неравенство

$$\mathsf{D}[\mathsf{a} + \mathsf{b}] \le \mathsf{D}[\mathsf{a}] + \mathsf{D}[\mathsf{b}]\,. \tag{43}$$

Оно вытекает из элементарного неравенства

$$\left(a^{1/k} + b^{1/k}\right)^k \ge a + b\,, \quad a \ge 0, b \ge 0\,,$$

которое показывает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$|a_k + b_k|^{1/k} \le (|a_k| + |b_k|)^{1/k} \le |a_k|^{1/k} + |b_k|^{1/k}$$

и, следовательно,

$$\sup_k |a_k + b_k|^{1/k} \le \sup_k |a_k|^{1/k} + \sup_k |b_k|^{1/k}\,.$$

Так как, кроме того, $|a_0 + b_0| \le |a_0| + |b_0|$, то отсюда следует (43). ■

Многообразие $\mathfrak{C}$, снабжённое расстоянием (41), превращается в полное метрическое пространство, за которым мы сохраняем то же самое обозначение. Доказательство полноты $\mathfrak{C}$ проводится по стандартной схеме.

Т е о р е м а 10. *Многообразие* $\mathfrak{C}$ *полно относительно метрики, порождаемой расстоянием* $\mathsf{D}[\cdot]$.

□ Положим $\langle \mathsf{a}_l \in \mathfrak{C}; l \in \mathbb{N}\rangle$ – фундаментальная последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число N такое, что при $l, m > N$ имеет место неравенство $\mathsf{D}[\mathsf{a}_l - \mathsf{a}_m] < \varepsilon$. Следовательно, для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|(\mathsf{a}_l)_k - (\mathsf{a}_m)_k| < \varepsilon^k \tag{44}$$

и $|(\mathsf{a}_l)_0 - (\mathsf{a}_m)_0| < \varepsilon$. Поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}_+$ числовая последовательность $\langle (\mathsf{a}_l)_k; l \in \mathbb{N}\rangle$ фундаментальна, и у неё существует предел

$$a_k = \lim_{l\to\infty} (\mathsf{a}_l)_k \,.$$

Тем самым определён элемент $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathbb{C}^\infty$. Переходя в (44) к пределу $l \to \infty$, находим $|(\mathsf{a}_m)_k - a_k| \le \varepsilon^k$, $k \in \mathbb{N}$ и $|(\mathsf{a}_m)_0 - a_0| < \varepsilon$, то есть $\mathsf{D}[\mathsf{a}_m - \mathsf{a}] \le \varepsilon$. Воспользовавшись неравенством треугольника, имеем $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le \mathsf{D}[\mathsf{a}_m] + \varepsilon$. Следовательно, $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ и, ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, $\mathsf{a}_m \to \mathsf{a}$ при $m \to \infty$. ■

Топология в $\mathfrak{C}$ гораздо более тонкая по сравнению с топологией в $\mathbb{C}^\infty$. Это приводит к тому, что пространство $\mathfrak{C}$, в отличие от $\mathbb{C}^\infty$, несепарабельно. В самом деле, рассмотрим множество последовательностей $\{\langle \alpha_k \in \{0,1\}; k \in \mathbb{N}_+\rangle\} \subset \mathfrak{C}$. Мощность этого множества равна $\aleph_1$. В то же время любые два различных элемента a и a' из этого множества находятся на единичном расстоянии $\mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{a}'] = 1$. Наличие такой несчётной системы элементов указывает на отсутствие в $\mathfrak{C}$ счётного всюду плотного множества, то есть на его несепарабельность. Разумеется, как и во всяком метрическом пространстве, первая аксиома счётности в $\mathfrak{C}$ выполняется.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\mathsf{a} \in \mathbb{C}^\infty$ и $\mathsf{a}^{(n)}$ – проекция этого элемента на $\mathbb{C}^\infty_n$. Тогда, очевидно, что любая функция $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ является продолжением по непрерывности последовательности полиномов $\langle \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]; n \in \mathbb{N}\rangle$ при $n \to \infty$. Это следует из оценки

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{a}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \,.$$

В общем же случае (при покомпонентной сходимости в $\mathbb{C}^\infty$ произвольной последовательности $\langle \mathsf{a}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ к элементу a) сходимость последовательности функций $\langle \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_n]; n \in \mathbb{N}\rangle$ при $n \to \infty$ к функции $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, конечно же, не имеет места. Для того чтобы это имело место, дополнительно, как известно, требуется выполнимость условия покомпонентной равномерности сходимости последовательности $\langle \mathsf{a}_n; n \in \mathbb{N}\rangle$.

Вообще говоря, расстояние $\mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{a}^{(n)}] = \sup_{k>n} |a_k|^{1/k}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. По этой причине выясним, что представляет из себя пополнение $\mathfrak{C}^{(0)}$ в топологии, порождаемой расстоянием $\mathsf{D}[\cdot]$, многообразия $\mathbb{C}^{(0)}$, которое содержится в $\mathfrak{C}$. Ответ на этот вопрос даёт следующая

Т е о р е м а 11. *Метрическое пространство $\mathfrak{C}^{(0)}$ характеризуется тем, что для каждого его элемента $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$ выполняется*

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 0 \,, \tag{45}$$

и множество значений образа $\mathsf{F}[z|\cdot]$ отображения F, получаемого продолжением по непрерывности относительно расстояния $\mathsf{D}[\cdot]$ с многообразия $\mathbb{C}^{(0)}$ на $\mathfrak{C}^{(0)}$, представляет собой линейное многообразие $\mathfrak{A}^{(0)}$ целых функций от $z \in \mathbb{C}$.

□ Пусть a – элемент из $\mathbb{C}^\infty$, не являющийся финитным, для которого имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{D}[\mathsf{a} - \mathsf{a}^{(n)}] = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |a_k|^{1/k} = 0 \,.$$

Тогда для фиксированного $\varepsilon > 0$, имеем $|a_k| < \varepsilon^k$ при $k > n$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_k|^{1/k} \le \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности ε, этот предел равен нулю. Обратное утверждение доказывается обращением всех утверждений в этом рассуждении.

Радиус сходимости функции, определяемой рядом (39), у которого коэффициенты удовлетворяют (45), бесконечен, то есть соответствующая функция $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ целая. Наконец, равномерно в любом замкнутом круге, содержащем $z \in \mathbb{C}$, с центром в нуле и радиусом, меньшим радиуса сходимости, имеем

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{a}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathsf{D}^k[\mathsf{a} - \mathsf{a}^{(n)}] \cdot |z|^k \to 0$$

при $n \to \infty$. ■

Выявим теперь связь между пространством $\mathfrak{C}$ и семейством пространств $\mathfrak{C}_\rho$, $\rho \in (0, \infty)$. Прежде всего заметим, что выбор значений неотрицательного параметра ρ может быть ограничен счётным множеством $\rho \in \{2^{-k}; k \in \mathbb{Z}\}$, так как $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}_\sigma$ при $\sigma > \rho$. Далее, для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ имеет место неравенство

$$||\mathsf{a}||_\rho \ge ||\mathsf{a}||_\sigma\,, \text{ если } \sigma > \rho \tag{46}$$

(равенство имеет место только в том случае, если $\mathsf{a} = \lambda\mathsf{e}$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Поэтому все нормы $||\cdot||_\rho$, $\rho \in (0, \infty)$ сравнимы друг с другом (см., например, [9]), и при $\sigma > \rho$ норма $||\cdot||_\rho$ не слабее нормы $||\cdot||_\sigma$.

При получении оценок, основанных на нормах $||\cdot||_\rho$, полезно иметь в виду, что

$$||\mathsf{a}||_\rho \le \max\{|a_0|, \rho^{-1}||\bar{\mathsf{a}}||_\rho\}\,, \tag{47}$$

а также

$$||\bar{\mathsf{a}}||_\sigma \le \frac{\rho}{\sigma}||\bar{\mathsf{a}}||_\rho \tag{48}$$

при $\sigma > \rho$ для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$.

Очевидно, что

$$|a_n| \le \rho^n||\mathsf{a}||_\rho\,, \tag{49}$$

и поэтому для любого $\rho > 0$ имеет место включение $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}$, так как

$$\sup_n |a_n|^{1/n} \le \rho \sup_n [||\mathsf{a}||_\rho]^{1/n} < \infty\,.$$

С другой стороны, для любого элемента из $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ справедливо $|a_n| \le \mathsf{D}^n[\mathsf{a}]$, $n \in \mathbb{N}$, то есть $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_{\mathsf{D}[\mathsf{a}]}$ и поэтому имеет место включение $\mathfrak{C} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}_{2^k}$. Принимая во внимание оба полученных включения, можно утверждать, что

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}_{2^k}\,. \tag{50}$$

Пространства $\mathfrak{C}_\rho$ несепарабельны, так как в каждом из них с данным значением ρ присутствует несчётное семейство последовательностей $\{\langle a_n = \alpha_n\rho; n \in \mathbb{N}_+\rangle; \alpha_m \in \{0,1\}, m \in \mathbb{N}_+\}$, попарные расстояния между которыми равны ρ.

Рассмотрим семейство множеств $\{V_{\rho,\varepsilon} = \{\mathsf{a} : ||\mathsf{a}||_\rho < \varepsilon\}; \rho, \varepsilon \in (0,\infty)\}$. При фиксированном значении ρ семейство $V_{\rho,\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ является образующим семейством окрестностей нуля топологии в $\mathfrak{C}_\rho$. Так как имеет место формула (50), то введём на многообразии $\mathfrak{C}$ топологию, положив в качестве образующего семейства окрестностей нуля указанное выше семейство множеств $\{V_{\rho,\varepsilon}; \rho > 0, \varepsilon > 0\}$.

Имеет место включение $V_{\rho,\varepsilon'} \subset V_{\rho,\varepsilon}$ при $\varepsilon' < \varepsilon$. Кроме того, при $\rho > \rho'$ имеет место включение $V_{\rho',\varepsilon} \subset V_{\rho,\varepsilon}$. Следовательно, указанное семейство окрестностей может быть заменено на эквивалентное ему, с точки зрения формирования топологии, семейством $V_{\rho,\varepsilon}$ с рациональными значениями $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$.

Т е о р е м а 12. *Топология метрического пространства $\mathfrak{C}$ эквивалентна топологии линейного топологического пространства, определяемой на многообразии $\mathfrak{C}$ на основе семейства $\{V_{\rho,\varepsilon} = \{\mathsf{a} : ||\mathsf{a}||_\rho < \varepsilon\}; \rho, \varepsilon \in (0,\infty)\}$ окрестностей нуля.*

□ Докажем, что каждая окрестность $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon\}$ нуля в пространстве $\mathfrak{C}$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ содержит множество $V_{\rho,\varepsilon}$ с подходящей величиной $\rho > 0$, а также для любых $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon'\}$, содержащаяся в $V_{\rho,\varepsilon}$. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon \le 1$.

Так как для каждого элемента $\mathsf{a} \in V_{\rho,\varepsilon}$ выполняется $|a_n| < \varepsilon\rho^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, и поэтому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{1/n} = \rho \sup_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon^{1/n} = \rho\,,$$

то $V_{\rho,\varepsilon} \subset \{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon\}$ при $\rho < \varepsilon$.

С другой стороны, так как для любого элемента из $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon'\}$ имеет место $|a_n| < \varepsilon'^n$, $n \in \mathbb{N}$, $|a_0| < \varepsilon'$, то, выбирая $\varepsilon' < \varepsilon \min\{1,\rho\}$ при фиксированных $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$, можно утверждать, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_+} (|a_n|/\rho^n) \le \max\{\sup_{n\in\mathbb{N}} (\varepsilon'/\rho)^n, \varepsilon'\} \le \max\{(\varepsilon/\rho)\min\{1,\rho\}, \varepsilon\} = \varepsilon\,,$$

то есть $\mathsf{a} \in V_{\rho,\varepsilon}$. Ввиду произвольности элемента a, $\{\mathsf{a} : \mathsf{D}[\mathsf{a}] < \varepsilon'\} \subset V_{\rho,\varepsilon}$. ■

Из доказанной теоремы следует, в частности, что операция умножения на число λ непрерывна в топологии пространства $\mathfrak{C}$. Поэтому функция $\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}]$ от $\lambda \in \mathbb{R}_+$ стремится к нулю при $\lambda \to 0$. Однако, её скорость сходимости к нулю существенно зависит от элемента a, то есть от направления в пространстве $\mathfrak{C}$. Она не пропорциональна λ, как это имеет место в нормированном пространстве. В частности, если элемент a такой, что $\mathsf{D}[\mathsf{a}] = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, то функция $\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}]$ стремится к нулю медленнее любой степени $|\lambda|^\alpha$, $\alpha > 0$ при $\lambda \to 0$. В общем случае можно лишь утверждать, что

$$\mathsf{D}[\lambda\mathsf{a}] = \max\{|\lambda a_0|, \sup_{n\in\mathbb{N}} (|\lambda| \cdot |a_n|)^{1/n} \le \begin{cases} |\lambda|\mathsf{D}[\mathsf{a}], & |\lambda| \ge 1\,; \\ \mathsf{D}[\mathsf{a}], & |\lambda| \le 1\,. \end{cases}$$

Заметим, что утверждение теоремы 12, несмотря на счётность семейства окрестностей $V_{\rho,\varepsilon}$, которым можно ограничиться при построении топологии, не противоречит несепарабельности пространства $\mathfrak{C}$, ввиду несепарабельности каждого из пространств $\mathfrak{C}_\rho$.

Таким образом, пространство $\mathfrak{C}$ может быть представлено в виде расширяющегося семейства $\{\mathfrak{C}_\rho; \rho \in (0,\infty)\}$ банаховых пространств с нормами $||\cdot||_\rho$ так, что $\mathfrak{C}_\rho \subset \mathfrak{C}_{\rho'}$ при $\rho' > \rho$. Параметр ρ, маркирующий банаховы пространства и соответствующие им нормы, мы будем называть *показателем*. При наличии свойства подчинённости норм $||\cdot||_\rho > ||\cdot||_{\rho'}$ с показателями, связанными отношением $\rho' > \rho$, топология $\mathfrak{T}_\rho$ пространства $\mathfrak{C}_\rho$ сильнее топологии $\mathfrak{T}_{\rho'}$, $\mathfrak{T}_\rho \supset \mathfrak{T}_{\rho'}$. При этом топология $\mathfrak{T}$ метрического пространства $\mathfrak{C}$ представляется в виде теоретико-множественного предела

$$\mathfrak{T} = \lim_{\rho\to 0} \mathfrak{T}_\rho \,.$$

Теорема 12 указывает также на то, что линейное топологическое пространство $\mathfrak{C}$ является пространством Фреше. Действительно, во-первых, оно полно, и его топология метризуема и, во-вторых, так как она эквивалентна топологии, порождаемой счётным множеством норм, то она локально выпукла [10].

Наконец, отметим, что при исследовании алгебры последовательностей коэффициентов аналитических функций расстояние $\mathsf{D}[\cdot]$ важно ввиду следующего утверждения.

Т е о р е м а 13. *Функционал* $\mathsf{F}[z|\cdot]$ *непрерывен на всех элементах пространства* $\mathfrak{C}$ *в метрике* $\mathsf{D}[\cdot]$ *и при всех значениях* z*, при которых сходится ряд, определяющий* $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$.

Он непрерывен также на пространстве $\mathfrak{C}_\rho$ *относительно* $||\cdot||_\rho$ *для любого значения* $\rho > 0$*, при всех* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и и при любом* z*, для которого* $|z|\rho < 1$.

□ При указанных в условии теоремы значениях z для всех элементов $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$, при которых $\mathsf{D}[\mathsf{a}-\mathsf{b}] < \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$, можно утверждать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z|^n \varepsilon^n$. Тогда

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]| = |\mathsf{F}[z|\mathsf{a}-\mathsf{b}]| \le$$

$$\le |b_0 - a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n |(\mathsf{a}-\mathsf{b})_n| \le \mathsf{D}[\mathsf{b}-\mathsf{a}] \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \mathsf{D}[\mathsf{a}-\mathsf{b}]^{n-1}\right) \le$$

$$\le \varepsilon \left[1 + |z|(1-\varepsilon|z|)^{-1}\right] .$$

Для доказательства непрерывности относительно нормы $||\cdot||_\rho$ заметим, что для всех элементов a и b из $\mathfrak{C}_\rho$ при указанных в условии теоремы значениях z имеет место оценка

$$|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]| = |\mathsf{F}[z|\mathsf{a}-\mathsf{b}]| \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n |(\mathsf{a}-\mathsf{b})_n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \rho^n ||\mathsf{a}-\mathsf{b}||_\rho \le (1-\rho|z|)^{-1} ||\mathsf{a}-\mathsf{b}||_\rho \,,$$

которая показывает, что при достаточно малой разности $||\mathsf{a}-\mathsf{b}||_\rho < \varepsilon$ разность $|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]| < \varepsilon(1-\rho|z|)^{-1}$ также мала. ■

11. Алгебра $\mathfrak{C}$. Рассмотрим свойства операции свёртки в применении к элементам из $\mathfrak{C}$. Очевидно, что операция свёртки оставляет инвариантным многообразие $\mathfrak{C}$, то есть для любых двух элементов $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ выполняется $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \mathfrak{C}$. Конечность нормы произведения $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ легко усматривается, приняв во внимание, что для достаточно большого

значения $\rho > 0$, при котором конечны нормы $||\mathsf{a}||_\rho$, $||\mathsf{b}||_\rho$, выполняется неравенство (49), и, следовательно,

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \le (n+1)\rho^n ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\rho \,.$$

Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n|^{1/n} \le \rho \sup_n \left((n+1)||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\rho\right)^{1/(n+1)} < \infty \,,$$

и поэтому

$$\mathsf{D}[\mathsf{a} * \mathsf{b}] < \infty \,.$$

Таким образом, снабдив пространство $\mathfrak{C}$ операцией умножения, роль которого выполняет свёртка двух последовательностей, мы получим коммутативную алгебру с единицей $\mathsf{e} \in \mathfrak{C}$ над полем $\mathbb{C}$. Эту алгебру будем обозначать тем же символом $\mathfrak{C}$.

Заметим, что подмногообразие $\bar{\mathfrak{C}} = \{\mathsf{a} \in \mathfrak{C} : (\mathsf{a})_0 = 0\}$ также инвариантно относительно $*$-умножения, потому что: во-первых, произведение $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ двух элементов a и b из $\mathfrak{C}^{(0)}$ обязано принадлежать $\mathfrak{C}$, так как $\bar{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{C}$; во-вторых, $a_0 = b_0 = 0$, $(\mathsf{a} * \mathsf{b})_0 = a_0 b_0 = 0$. Тогда многообразие $\bar{\mathfrak{C}}$, при наличии операции $*$-умножения, является подалгеброй (без единицы) алгебры $\mathfrak{C}$, для которой мы сохраним обозначение $\bar{\mathfrak{C}}$.

Соотношение между подалгеброй $\bar{\mathfrak{C}}$ и основной алгеброй $\mathfrak{C}$ такое же, как и между подалгеброй $\bar{\mathbb{C}}$ и алгеброй $\mathbb{C}^\infty$, а именно, $\bar{\mathfrak{C}}$ является идеалом алгебры $\mathfrak{C}$, так как для любого $\mathsf{a} \in \bar{\mathfrak{C}}$ и любого $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ имеет место $\mathsf{a} * \mathsf{b} \in \bar{\mathfrak{C}}$.

Покажем, что отображение $\mathsf{F}[z|\cdot]$ является мультипликативным на алгебре $\mathfrak{C}$, как это имело место на алгебре $\mathbb{C}^{(0)}$.

Т е о р е м а 14. *Для любых двух наборов* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ *при значениях* $z \in \mathbb{C}$, *принадлежащих общему кругу сходимости рядов* $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ *и* $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, *имеет место тождество*

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\,\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] \,. \tag{51}$$

□ Докажем, что ряд, определяющий $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$, сходится. Обозначим посредством r_a радиус сходимости первого ряда и r_b – второго ряда. Для определённости положим $r_b > r_a$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = r_a^{-1}, \quad \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = r_b^{-1} \,.$$

Следовательно, при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_+$, за исключением, может быть, конечного числа начальных компонент элементов a и b, согласно признаку Коши, выполняются неравенства $|a_k| < (r_a - \varepsilon)^{-k}$, $|b_k| < (r_b - \varepsilon)^{-k}$. Это означает, что конечны нормы $C_a = ||\mathsf{a}||_{(r_a-\varepsilon)^{-1}}$, $C_b = ||\mathsf{b}||_{(r_b-\varepsilon)^{-1}}$, и при всех $k \in \mathbb{N}_+$ имеют место неравенства (49): $|a_k| < C_a(r_a - \varepsilon)^{-k}$, $|b_k| < C_b(r_b - \varepsilon)^{-k}$. Они позволяют оценить сверху компоненты свёртки элементов a и b:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} C_a(r_a - \varepsilon)^{-k} C_b(r_b - \varepsilon)^{k-n} =$$

$$= C_a C_b (r_a - \varepsilon)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r_a - \varepsilon}{r_b - \varepsilon}\right)^k < C_a C_b (r_a - \varepsilon)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_a - \varepsilon}{r_b - \varepsilon}\right)^k =$$

$$= C_a C_b (r_a - \varepsilon)^{-n} \left(1 - \frac{r_a - \varepsilon}{r_b - \varepsilon}\right)^{-1} .$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} |(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n|^{1/n} \le (r_a - \varepsilon)^{-1} . \tag{52}$$

Если же $r_a = r_b$, то

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| \le C_a C_b (n+1)(r_a - \varepsilon)^{-n} .$$

Поэтому формула (52) остаётся верной и в этом случае.

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (52) следует, что ряд $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}*\mathsf{b}]$ имеет конечный радиус сходимости, и он не меньше, чем r_a.

Для произвольно выбранного числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим проекции $\mathsf{a}^{(n)}$ и $\mathsf{b}^{(n)}$. Согласно теореме 2, имеет место равенство для полиномов

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}^{(n)}] .$$

Так как n в этом равенстве произвольно, перейдём к пределу $n \to \infty$ при z, принадлежащем общему кругу сходимости всех трёх рядов, которые определяют функции $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ и $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$. Согласно замечанию 2, этот предельный переход можно пронести в правой части равенства под знак отображения F. Это приводит к равенству

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] .$$

Покажем, что предел можно пронести под знак отображения F в левой части. Для этого заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}[z|(\mathsf{a} * \mathsf{b})^{(n)}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}] .$$

Тогда

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] = \lim_{n\to\infty} \left(\mathsf{F}[z|(\mathsf{a} * \mathsf{b})^{(n)}] - \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(n)} * \mathsf{b}^{(n)}]\right) ,$$

где в левой части стоит аналитическая в круге с радиусом r_a функция, являющаяся пределом последовательности полиномов. Для фиксированного значения $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты разложения в степенной ряд функций, стоящих под знаком предельного перехода, равны нулю, когда $k = 0 \div n$. Следовательно, для каждого фиксированного значения номера k коэффициент разложения предельной функции равен нулю, что приводит к равенству (51). Отсюда следует, что радиус сходимости ряда, определяющего функцию $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$, равен r_a, так как таким свойством обладает функция в правой части (51). ■

Теперь мы в состоянии доказать, что подалгебра $\bar{\mathfrak{C}}$ является максимальным идеалом в алгебре $\mathfrak{C}$, т.е. верна

Т е о р е м а 15. *Для любого* $\mathsf{a} \notin \bar{\mathfrak{C}}$ *существует единственный обратный элемент* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$, *удовлетворяющий равенствам*

$$\mathsf{a} * \mathsf{b} = \mathsf{b} * \mathsf{a} = \mathsf{e} . \tag{53}$$

□ Если $\mathsf{a} \in \mathfrak{C} \setminus \bar{\mathfrak{C}}$, то он, наверняка содержится в $\mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}$. Поэтому в $\mathbb{C}^\infty \setminus \bar{\mathbb{C}}$ существует обратный элемент b, удовлетворяющий (53). Покажем, что он содержится в $\mathfrak{C}$.

Так как $\mathsf{a} \notin \bar{\mathfrak{C}}$, то аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ не обращается в ноль в этой точке, $\mathsf{F}[0|\mathsf{a}] \neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точки $z = 0$ функция $(\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1}$ также является аналитической, то есть $(\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1} \in \mathfrak{L}$. Поэтому, ввиду изоморфизма между многообразиями $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}$, найдётся элемент $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$ такой, что $(\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1} = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$. Отсюда следует, что

$$\mathsf{F}[z|\mathsf{e}] = 1 = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]\mathsf{F}[z|\mathsf{b}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]\,.$$

Сравнивая левую и правую части выписанной цепочки равенств, снова воспользовавшись изоморфизмом между многообразиями $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}$, заключаем, что элемент b удовлетворяет равенствам (53). ■

Для обратного элемента к элементу $\mathsf{a} \in \mathfrak{C} \setminus \bar{\mathfrak{C}}$ мы сохраним прежнее обозначение a^{-1}.

12. Аналитические функции в $\mathfrak{C}$. В п.7 мы ввели понятие об *аналитических функциях* $g(\mathsf{a})$ на $\mathbb{C}^\infty$. Выясним теперь, при каких условиях эти функции принимают значения в алгебре $\mathfrak{C}$ и их областью определения является $\mathfrak{C}$. Ответ на этот вопрос даёт следующая

Т е о р е м а 16. *Для любой аналитической функции $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}] \in \mathfrak{L}$, где $\mathsf{a} = \langle a_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathfrak{C}$, и любого элемента $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle \in \mathfrak{C}$ такого, что его компонента b_0 находится в круге сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, значения аналитической функции*

$$f(\mathsf{b}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{b}^k$$

принадлежат $\mathfrak{C}$. При этом для любых $z \in \mathbb{C}$ таких, что число $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ находится в круге сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, имеет место формула

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \mathsf{F}[z|f(\mathsf{b})]\,. \tag{54}$$

□ Так как b_0 находится внутри круга сходимости ряда $f(z)$, то при достаточно малых по модулю $z \in \mathbb{C}$ число $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$ также находится в круге сходимости этого ряда. Следовательно, для этих z сходится ряд

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]\right)^k\,. \tag{55}$$

В условиях теоремы, используя линейность и мультипликативность отображения $\mathsf{F}[z|\cdot]$, этот ряд преобразуется следующим образом

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{F}[z|\mathsf{b}^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{F}[z|a_k\mathsf{b}^k] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mathsf{F}[z|\sum_{k=0}^{m} a_k \mathsf{b}^k] = \lim_{m\to\infty} \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]\,, \tag{56}$$

где мы воспользовались для краткости обозначений определением (33) операции суперпозиции элементов из $\mathbb{C}^\infty$.

Остаётся доказать, что предел можно пронести под знак отображения F. Для этого заметим, что в замыкании достаточно малой окрестности точки b_0 ряд (55) сходится равномерно к аналитической функции $f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])$, которая ограничена в этой окрестности некоторой постоянной C, то есть $|\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]| < C$. Следовательно, последовательность функций

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])^k \equiv \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]\,, \quad m \in \mathbb{N}$$

равномерно ограничена по m в этой окрестности.

Для каждой пары $m, n \in \mathbb{N}$ введём в рассмотрение полиномы $\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]$ степени $n \in \mathbb{N}$. Так как для каждого фиксированного $l = 0 \div n$ имеет место $([\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]^{(n)})_l = (\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})_l$, то каждая такая компонента стремится к $(\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_l$ при $m \to \infty$ согласно теореме 8. Тогда полиномы $\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]$ стремятся при $n \to \infty$ к $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}]$ поточечно, и поэтому последовательность полиномов $\langle \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]; m \in \mathbb{N} \rangle$также является равномерно ограниченной по m при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ в той же окрестности точки $z = 0$.

Таким образом, на основании приведенного рассуждения последовательность функций $\langle\, \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]; m \in \mathbb{N} \,\rangle$ является равномерно ограниченной в замыкании достаточно малой окрестности точки $z = 0$. Кроме того, эта последовательность разностей является сходящейся, так как первое слагаемое сходится согласно (55), (56), а второе – ввиду того, что каждый из коэффициентов полиномов

$$\mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}] = \sum_{l=1}^{n} z^l \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \mathsf{b}^k \right)_l$$

имеет предел

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{b}^k \right)_l = (f(\mathsf{b}))_l = (\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_l\,.$$

Таким образом, к последовательности $\langle\, \mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b}] - \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}]; m \in \mathbb{N} \,\rangle$ применима теорема Витали [11], согласно которой предел всякой сходящейся и равномерно ограниченной в замкнутой области последовательности аналитических функций является аналитической функцией. Следовательно, каждая функция

$$u_n(z) = \lim_{m\to\infty} \left(\mathsf{F}[z| \sum_{k=0}^{m} \mathsf{b}^k a_k] - \mathsf{F}[z|(\mathsf{a}^{(m)} \circ \mathsf{b})^{(n)}] \right)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

– аналитическая в малой окрестности точки $z = 0$. Кроме того, $u_n^{(l)}(0) = 0$ при $l = 0, 1, ..., n$, так как этим свойством обладает каждая из функций под знаком предельного перехода.

Используя (55), (56), представим функцию $f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])$ в виде

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) = u_n(z) + \lim_{m\to\infty} \sum_{l=0}^{n} z^l \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \mathsf{b}^k \right)_l = \mathsf{F}[z|(\mathsf{a} \circ \mathsf{b})^{(n)}] + u_n(z)\,.$$

Вычислим на основании этого представления производную n-го порядка функции $f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])$ в точке $z = 0$:

$$\left(\frac{d^n}{dz^n} f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]) \right)_{z=0} = \left(\frac{d^n}{dz^n} \sum_{l=0}^{n} z^l (f(\mathsf{b}))_l \right)_{z=0} = n!(\mathsf{a} \circ \mathsf{b})_n\,.$$

Таким образом, последовательность $\langle(\mathsf{a}\circ\mathsf{b})_n; n\in\mathbb{N}_+\rangle$ является последовательностью коэффициентов разложения аналитической функции $\lim\limits_{m\to\infty}\mathsf{F}[z|\mathsf{a}^{(m)}\circ\mathsf{b}]$ в степенной ряд. Тогда при достаточно малых по модулю $z\in\mathbb{C}$ имеем

$$f(\mathsf{F}[z|\mathsf{b}])=\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]=\mathsf{F}[z|f(\mathsf{b})]\,,$$

что завершает доказательство формулы (54) в круге достаточно малого радиуса. Распространение этой формулы на весь круг сходимости ряда, определяющего функцию $\mathsf{F}[z|f(\mathsf{b})]$, достигается аналитическим продолжением. ■

П р и м е р 1. Рассмотрим аналитическую функцию $g(\mathsf{a})$, определяемую, согласно (31), формулой

$$g(\mathsf{a})=(\mathsf{e}-\mathsf{a})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{a}^n\,, \tag{57}$$

на основе аналитической функции $g(z)=(1-z)^{-1}$. Эта функция, наверняка, имеет смысл для $\mathsf{a}\in\bar{\mathfrak{C}}$. Однако, её значения также определены для тех $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}$, у которых $|a_0|<1$. Для этой функции формула (54) даёт

$$\mathsf{F}[z|(\mathsf{e}-\mathsf{a})^{-1}]=(1-\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1}\ . \tag{58}$$

Тогда при $a_0=0$ m-й коэффициент ряда по степеням z для функции $f(z)=(1-\mathsf{F}[z|\mathsf{a}])^{-1}$ равен

$$\big((\mathsf{e}-\mathsf{a})^{-1}\big)_m=\sum_{n=0}^{m}(\mathsf{a}^n)_m\ . \tag{59}$$

Коэффициенты разложения функции $(\mathsf{e}-\mathsf{a})^{-1}$ в ряд положительны. Используя определение неравенств на алгебре $\mathfrak{C}$ и применяя первое из неравенств (37) и неравенство (38), находим

$$|\,(\mathsf{e}-\mathsf{a})^{-1}\,|=|\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{a}^n|\le\sum_{n=0}^{\infty}|\mathsf{a}^n|\le\sum_{n=0}^{\infty}|\mathsf{a}|^n\le(\mathsf{e}-|\mathsf{a}|)^{-1}\,,$$

так как $|\mathsf{e}|=\mathsf{e}$.

Таким образом, для любого $\mathsf{a}\in\bar{\mathfrak{C}}$ имеет место

$$|(\mathsf{e}-\mathsf{a})^{-1}|\le(\mathsf{e}-|\mathsf{a}|)^{-1}\,. \tag{60}$$

13. Топологические свойства алгебры $\mathfrak{C}$. Для получения оценок на основе введённых выше метрических характеристик пространства $\mathfrak{C}$ изучим их связь с операцией $*$-умножения. Прежде всего рассмотрим свойства умножения по отношению к расстоянию $\mathsf{D}[\cdot]$.

Т е о р е м а 17. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}$, $\mathsf{b}\in\mathfrak{C}$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}*\mathsf{b}]\le\begin{cases}2\max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}],\mathsf{D}[\mathsf{b}]\} & ,\min\{\mathsf{D}[\mathsf{a}],\mathsf{D}[\mathsf{b}]\}\le 2\,;\\ \mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}] & ,\min\{\mathsf{D}[\mathsf{a}],\mathsf{D}[\mathsf{b}]\}\ge 2\,.\end{cases} \tag{61}$$

□ Положим, для определённости, что $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le \mathsf{D}[\mathsf{b}]$. Справедливы следующие неравенства

$$|\,(\mathsf{a}*\mathsf{b})_n\,| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{n} \mathsf{D}^k[\mathsf{a}]\mathsf{D}^{n-k}[\mathsf{b}]\,. \tag{62}$$

Найдём максимум по x функции $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$ вещественной переменной x в области при $y \ge x \ge 0$. Так как производная по x неотрицательна, то максимум достигается на краю области, а именно – при $x = y$, и он равен

$$\max\left\{\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}; x \le y\right\} = (n+1)y^n\,.$$

Тогда максимум выражения в правой части (62) достигается при $\mathsf{D}[\mathsf{a}] = \mathsf{D}[\mathsf{b}]$:

$$|(\mathsf{a}*\mathsf{b})_n| \le (n+1)\mathsf{D}^n[\mathsf{b}]\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |(\mathsf{a}*\mathsf{b})_n|^{1/n} \le \mathsf{D}[\mathsf{b}] \sup_{n\in\mathbb{N}}\{(n+1)^{1/n}\} = 2\mathsf{D}[\mathsf{b}]\,.$$

Так как $|a_0 b_0| = |a_0| \cdot |b_0| \le \mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}]$, то

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}*\mathsf{b}] \le \max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}], 2\mathsf{D}[\mathsf{b}]\} = \begin{cases} 2\mathsf{D}[\mathsf{b}] & ,\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le 2 \\ \mathsf{D}[\mathsf{a}]\mathsf{D}[\mathsf{b}] & ,\mathsf{D}[\mathsf{a}] \ge 2 \end{cases}\,. \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Для степеней произвольного элемента* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ *имеет место неравенство*

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}^n] \le \begin{cases} \mathsf{D}^n[\mathsf{a}] & ,\text{если } \mathsf{D}[\mathsf{a}] \ge 2\,; \\ 2^{n-1}\mathsf{D}[\mathsf{a}] & ,\text{если } \mathsf{D}[\mathsf{a}] \le 2\,. \end{cases} \tag{63}$$

□ При $n = 2$ неравенство (63) имеет вид (61) при $\mathsf{b} = \mathsf{a}$. Индукционный шаг по порядку степени n при $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \le 2$ даёт

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}^{n+1}] = \mathsf{D}[\mathsf{a}*\mathsf{a}^n] \le 2\max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{a}^n]\} \le 2^n\mathsf{D}[\mathsf{a}]\,,$$

так как по предположению индукции $\mathsf{D}[\mathsf{a}^n] \le 2^{n-1}\mathsf{D}[\mathsf{a}]$ и, следовательно, в любом случае $\max\{\mathsf{D}[\mathsf{a}], \mathsf{D}[\mathsf{a}^n]\} \le 2^{n-1}\mathsf{D}[\mathsf{a}]$.

При $\mathsf{D}[\mathsf{a}] \ge 2$, рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}^{n+1}] \le \mathsf{D}[\mathsf{a}] \cdot \mathsf{D}[\mathsf{a}^n] \le \mathsf{D}^n[\mathsf{a}]\,. \quad \blacksquare$$

Алгебра $\mathfrak{C}$ обладает неприятным свойством. Оказывается, что топология метрического пространства $\mathfrak{C}$ настолько сильна, что $\mathfrak{C}$ не является топологической алгеброй относительно этой топологии. На это указывает следующий пример.

П р и м е р 2. Рассмотрим элемент $\mathsf{b} = \langle b_l > 0; l \in \mathbb{N}_+\rangle$ алгебры $\mathfrak{C}$ с положительными компонентами, для которого существует число $\lambda > 0$ такое, что $b_l \ge \lambda^l$, $l \in \mathbb{N}_+$. Пусть $\langle \mathsf{a}_n = \langle 0, \lambda_n^l; l \in \mathbb{N}\rangle \in \mathfrak{C}; n \in \mathbb{N}\rangle$ – последовательность элементов алгебры, стремящаяся

к нулю относительно расстояния $\mathsf{D}[\cdot]$. Так как $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших номерах n имеем $\lambda_n < \lambda$, и поэтому справедливы следующие оценки снизу

$$(\mathsf{a}_n * \mathsf{b})_l = \sum_{k=0}^{l} (\mathsf{a}_n)_k \, b_{l-k} \geq \lambda^l \sum_{k=1}^{l} (\lambda_n/\lambda)^k = \lambda_n \lambda^{l-1} \, \frac{1-(\lambda_n/\lambda)^l}{1-\lambda_n/\lambda} \, .$$

Тогда

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}_n * \mathsf{b}] \geq \lambda \sup_l \left[x \, \frac{1-x^l}{1-x} \right]^{1/l} \equiv C(\mathsf{b}) > 0 \, , \quad x = \lambda_n/\lambda < 1 \, ,$$

так как

$$\lim_{l\to\infty} \left[x \, \frac{1-x^l}{1-x} \right]^{1/l} = 1 \, .$$

Таким образом, существует число $C(\mathsf{b}) > 0$, для которого имеет место

$$\mathsf{D}[\mathsf{a}_n * \mathsf{b}] \geq C(\mathsf{b}) > 0 \, ,$$

в то время как $\mathsf{D}[\mathsf{a}_n] \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим также, что норма $||\cdot||_\rho$ элементов $\mathsf{a}_n * \mathsf{b}$ с показателем $\rho < \lambda$ в приведенном примере равна бесконечности. Наоборот, при $\rho \geq \lambda$, $||\mathsf{a}_n * \mathsf{b}||_\rho \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, в общем случае, операция $*$-умножения не является непрерывной на $\mathfrak{C}$. Однако, она становится непрерывной в некотором более узком смысле относительно более слабой топологии $\mathfrak{T}_\rho$ с подходящим показателем ρ, порождающее семейство окрестностей нуля которой получается таким ограничением семейства $\{V'_{\rho',\varepsilon}; \rho' > 0, \varepsilon' > 0\}$, которое состоит из окрестностей $V_{\rho',\varepsilon'}$ с $\rho' > \rho$. Для точной формулировки утверждения введём следующее понятие.

Величину $\tau(\mathsf{a}) = \sup\{\rho : ||\mathsf{a}||_\rho < \infty\}$ назовём *показателем* элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$. Элемент a содержится в $\mathfrak{C}_\rho$, если $\rho > \tau(\mathsf{a})$. При этом норма $||\mathsf{a}||_{\tau(\mathsf{a})}$ может быть как конечной, так и бесконечной. Обратная величина $\tau^{-1}(\mathsf{a})$ является радиусом сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$. Справедлива

Т е о р е м а 18. *Для каждой пары элементов* a *и* b *из* $\mathfrak{C}$ *имеет место равенство* $\tau(\mathsf{a} * \mathsf{b}) = \max\{\tau(\mathsf{a}), \tau(\mathsf{b})\}$.

□ Доказательство основано на формуле (51). Она применима при любом z внутри общего круга сходимости рядов $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ и $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, то есть при $|z| < \min\{\tau^{-1}(\mathsf{a}), \tau^{-1}(\mathsf{b})\}$. Тогда ряд $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$ также сходится. Обратное рассуждение тоже верно. Поэтому радиусом сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a} * \mathsf{b}]$ является $\min\{\tau^{-1}(\mathsf{a}), \tau^{-1}(\mathsf{b})\}$. ■

Из неё также следует, что непрерывность операции умножения имеет смысл изучать только относительно нормы $||\cdot||_\rho$, у которой показатель ρ не меньше, чем максимальный показатель сомножителей. В то же время, если взять квадрат элемента $\mathsf{a} = \langle \sigma^n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle \in \mathfrak{C}_\sigma$ с $||\mathsf{a}||_\sigma = 1$, то он уже не содержится в $\mathfrak{C}_\sigma$, так как $(\mathsf{a}^2)_n = \sigma^n(n+1)$, а содержится в $\mathfrak{C}_{\sigma+\varepsilon}$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Этот пример указывает на то, что показатель нормы должен быть строго больше показателей сомножителей. Такое свойство непрерывности является следствием следующего утверждения.

Т е о р е м а 19. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$ *с* $\rho < \sigma$, *их произведение* $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ *содержится в* $\mathfrak{C}_\sigma$ *и имеет место неравенство*

$$||\mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma \leq \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1} ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma \, . \tag{64}$$

□ Утверждение теоремы следует из следующей цепочки неравенств:

$$|(\mathsf{a}*\mathsf{b})_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k|\cdot|b_{n-k}| \le ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma \sum_{k=0}^{n} \rho^k \sigma^{n-k} <$$

$$< \sigma^n ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma \left(1-\rho/\sigma\right)^{-1} .$$

Откуда

$$||\mathsf{a}*\mathsf{b}||_\sigma \le ||\mathsf{a}||_\rho ||\mathsf{b}||_\sigma \left(1-\rho/\sigma\right)^{-1} . \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Пусть* $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}_\rho$ *и число* $\sigma>\rho$. *Тогда имеет место неравенство*

$$||\mathsf{a}^l||_\sigma \le ||\mathsf{a}||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{a}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^{l-1}, \quad l\in\mathbb{N}. \tag{65}$$

□ Доказательство проводится индукцией по $l\in\mathbb{N}$. Индукционный шаг от значения l к $(l+1)$ строится на основе формулы (64), где полагается $\mathsf{b}=\mathsf{a}^l$, и для этого элемента предполагается, что он содержится в $\mathfrak{C}_\sigma$ и для его нормы справедливо неравенство (65). Используя это неравенство, имеем

$$||\mathsf{a}^{l+1}||_\sigma = ||\mathsf{a}*\mathsf{b}||_\sigma \le \frac{||\mathsf{a}||_\rho||\mathsf{b}||_\sigma}{1-\rho/\sigma} \le ||\mathsf{a}||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{a}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^{l}, \quad l\in\mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

Несмотря на то, что произведения всех пар элементов из пространства $\mathfrak{C}_\sigma$ таких, что, по крайней мере, один элемент пары имеет конечную норму $||\cdot||_\rho$, $\rho<\sigma$, принадлежат $\mathfrak{C}_\sigma$, как показывает пример, приведенный выше, пространство $\mathfrak{C}_\sigma$ не замкнуто относительно $*$-умножения. Иными словами, никакое из пространств $\mathfrak{C}_\rho$, $\rho>0$ не является алгеброй, и это приводит к некоторому неудобству при получении априорных оценок в терминах нормы $||\cdot||_\rho$ с фиксированным значением показателя. Вместе с тем, на основании теоремы 18, линейное многообразие $\mathfrak{P}_\tau$, состоящее из элементов, показатели которых превосходят $\tau>0$, является подалгеброй алгебры $\mathfrak{C}$ и, более того, её идеалом.

Из теоремы 19 немедленно вытекает

Т е о р е м а 20. *Пусть* $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}_\rho$ *и* $\mathsf{b}\in\mathfrak{C}_\sigma$. *Тогда двухместная функция* $f(\mathsf{x},\mathsf{y})=(\mathsf{a}+\mathsf{x})*(\mathsf{b}+\mathsf{y})$, $\rho<\sigma$ *непрерывна в точке* $\langle\mathsf{x},\mathsf{y}\rangle=\langle\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle$ *относительно нормы* $||\cdot||_\sigma$ *при ограничении этой функции на такие* x *и* y, *которые подчинены условиям* $\rho>\tau(\mathsf{x})\ge\tau(\mathsf{a})$ *и* $\sigma>\tau(\mathsf{y})\ge\tau(\mathsf{b})\}$ *соответственно.*

□ Пусть a и b – элементы из $\mathfrak{C}$ и числа ρ,σ такие, что $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}_\rho$, $\mathsf{b}\in\mathfrak{C}_\sigma$, $\rho<\sigma$. Тогда $\mathsf{a}*\mathsf{b}\in\mathfrak{C}_\sigma$. В условиях теоремы $\mathsf{x}\in\mathfrak{C}_\rho$, $\mathsf{y}\in\mathfrak{C}_\sigma$ и $\mathsf{a}*\mathsf{y}\in\mathfrak{C}_\sigma$, $\mathsf{b}*\mathsf{x}\in\mathfrak{C}_\sigma$.

Пусть, далее, число $\varepsilon>0$ произвольно. Используя (64), оценим сверху норму изменения функции при $||\mathsf{x}||_\rho<\varepsilon$, $||\mathsf{y}||_\sigma<\varepsilon$:

$$||(\mathsf{a}+\mathsf{x})*(\mathsf{b}+\mathsf{y})-\mathsf{a}*\mathsf{b}||_\sigma = ||\mathsf{a}*\mathsf{y}+\mathsf{b}*\mathsf{x}+\mathsf{x}*\mathsf{y}||_\sigma \le$$

$$\le ||\mathsf{a}*\mathsf{y}||_\sigma + ||\mathsf{b}*\mathsf{x}||_\sigma + ||\mathsf{x}*\mathsf{y}||_\sigma \le$$

$$\le \left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1} \left[||\mathsf{a}||_\rho||\mathsf{y}||_\sigma + ||\mathsf{b}||_\sigma||\mathsf{x}||_\rho + ||\mathsf{x}||_\rho||\mathsf{y}||_\sigma\right] \le$$

$$\leq \varepsilon \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1} \left[||\mathsf{a}||_\rho + ||\mathsf{b}||_\sigma + \varepsilon\right] . \quad \blacksquare$$

Вместе с тем, можно ввести другое понятие "непрерывности". Определим линейный оператор $\mathsf{S}(\lambda) : \mathfrak{C} \mapsto \mathfrak{C}$, зависящий от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим для любого элемента $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$

$$\left(\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}\right)_n = \lambda^n a_n .$$

Этот оператор переводит каждое произведение элементов a и b алгебры $\mathfrak{C}$ в произведение образов, то есть

$$\mathsf{S}(\lambda)(\mathsf{a} * \mathsf{b}) = (\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}) * (\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{b})$$

и $\mathsf{S}(\lambda) \to \mathbf{1}$ при $\lambda \to 0$, где предел понимается в смысле метрики в $\mathfrak{C}$ так, что для любого элемента $\mathsf{a} = \langle a_n; n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathfrak{C}$ имеет место

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathsf{D}[\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}] = \mathsf{D}[\mathsf{a}] .$$

В частности, если $\mathsf{a} \in \bar{\mathfrak{C}}$, то

$$\mathsf{D}[\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}] = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\left(\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}\right)_n|^{1/n} = |\lambda| \mathsf{D}[\mathsf{a}] .$$

Эти свойства можно рассматривать как обобщение понятия непрерывности.

Учитывая, что норма $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]$ может быть меньше показателя элемента $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$, неравенству (64) можно придать более крайнюю форму.

Т е о р е м а 21. *Для любых двух элементов* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *и* $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}_\sigma$, *где число* σ *выбрано настолько большим, что* $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}] < \sigma$, *произведение* $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ *содержится в* $\mathfrak{C}_\sigma$, *и имеет место неравенство*

$$||\mathsf{a} * \mathsf{b}||_\sigma \leq ||\mathsf{a}||_\sigma \left[|b_0| + \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma} \left(1 - \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma}\right)^{-1}\right] . \tag{66}$$

□ Так как норма $||\mathsf{a}||_\sigma$ при $||\mathsf{a}||_\rho < \infty$ наследственно конечна, то справедлива оценка

$$|(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}| \cdot |b_k| \leq \sigma^n ||\mathsf{a}||_\sigma \left(|b_0| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \sigma^{-k}\right) \leq$$

$$\leq \sigma^n ||\mathsf{a}||_\sigma \left[|b_0| + \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma} \left(1 - \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{b}}]}{\sigma}\right)^{-1}\right] .$$

Откуда следует (66). ■

С л е д с т в и е. *Пусть* $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}_\rho$ *с* $\rho > \mathsf{D}[\mathsf{a}]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$||\bar{\mathsf{a}}^l||_\rho \leq ||\bar{\mathsf{a}}||_\rho \left[|a_0| + \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}{\rho} \left(1 - \frac{\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}{\rho}\right)^{-1}\right]^{l-1} , \quad l \in \mathbb{N} . \tag{67}$$

□ Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы 19. ■

14. Суперпозиции аналитических функций. Бинарная операция суперпозиции (см. (33)) пары элементов из $\mathbb{C}^\infty$, введённая в п.7, применима не для всех пар $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}\rangle$. Для

её выполнимости необходимо, чтобы $\mathsf{a} \in \mathfrak{C}$ и значение нулевой компоненты b_0 элемента b находилось внутри круга сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Таким образом, она не определена для всех пар из $\mathfrak{C}$ и, следовательно, не порождает полугруппу на $\mathfrak{C}$, как это имело место на многообразии $\mathbb{C}^{(0)}$ финитных последовательностей и реализуется на многообразии $\mathfrak{C}^{(0)}$, состоящем из последовательностей коэффициентов целых функций. Тем не менее, в этом пункте мы исследуем возможность повторного применения операции суперпозиции для произвольной конечной последовательности $\langle \mathsf{a}_i \in \mathfrak{C}; i = 1 \div n \rangle$ и связь этих операций с суперпозициями последовательности аналитических функций $\langle f_i(z) : i = 1 \div n \rangle$, каждая из которых определяется соответствующим элементом a_j, $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}_j]$, $j = 1 \div n$. Прежде всего мы обобщим формулу суперпозиции (30), полученную в п.6 для полиномов.

Формула (54) следующим образом записывается в терминах операции суперпозиции (33) пары $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle$ элементов из $\mathfrak{C}$.

$$(f \circ g)(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a} \circ \mathsf{b}]\,, \tag{68}$$

где $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$, $g(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$. Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 22. *Пусть $\langle f_1(z), ..., f_n(z) \rangle$ – последовательность функций из $\mathfrak{L}$ при $z \in \mathbb{C}$ и $\langle \mathsf{a}_1, ..., \mathsf{a}_n \rangle$ – последовательность элементов из $\mathfrak{C}$ таких, что $f_i(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}_i]$, $i = 1 \div n$. Причём, каждое из чисел $\alpha_i = f_i(\alpha_{i-1})$ содержится в круге сходимости соответствующей функции $f_{i+1}(z)$, $i = 1 \div n-1$, $\alpha_0 = 0$. Тогда в точках z, принадлежащих общему для всех функций $f_i(z)$ кругу сходимости определяющих их рядов*

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathsf{a}_i)_k \, z^k\,, \quad i = 1 \div n$$

справедлива формула суперпозиции

$$f_n\left(f_{n-1}(...f_2(f_1(z)))...)\right) = (f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2 \circ f_1)(z) = F[z|\mathsf{a}_n \circ \mathsf{a}_{n-1} \circ ... \circ \mathsf{a}_2 \circ \mathsf{a}_1]\,. \tag{69}$$

□ Доказательство проводится индукцией по длине последовательности n. При $n = 2$ формула верна в силу формулы (54), представленной в виде (68), положив в ней $f = f_2$, $g = f_1$. Индукционный шаг от $(n-1)$ к длине последовательности n получается из этой же формулы (57), положив в ней $f = f_n$, $g = f_{n-1} \circ ... \circ f_1$, что возможно в силу условия теоремы, так как $\alpha_{n-1} = (f_{n-1} \circ ... \circ f_1)(0)$ принадлежит кругу сходимости ряда, определяющего функцию f_n. ■

Формула (69) является основой алгоритма вычисления коэффициентов разложения в степенной ряд суперпозиции $f_n(f_{n-1}(...f_1(z)...))$ аналитических функций, представленных степенными рядами. В этой формуле операции суперпозиции элементов из $\mathfrak{C}$ могут быть реализованы, в основном, двумя эквивалентными методами. В обоих случаях, вычисление компонент суперпозиции состоит из выполнения набора элементарных алгебраических операций.

Первый метод связан представлением каждой из суперпозиций на основе их определения в виде формулы (33). При этом каждая компонента суперпозиции $\mathsf{a}_n \circ \mathsf{a}_{n-1} \circ ... \circ \mathsf{a}_1$ определяется, вообще говоря, бесконечным рядом. Исключительным в этом смысле является случай, когда $(\mathsf{a})_i = 0$ при $i = 1 \div (n-1)$.

Второй метод основан на представлении операции суперпозиции посредством формулы (35). Для этого необходимо отделить у каждого из элементов a_i, определяющих функции f_i, нулевую компоненту $(\mathsf{a}_i)_0$, $\mathsf{a}_i = (\mathsf{a}_i)_0\mathsf{e} + \bar{\mathsf{a}}_i$, $i = 1 \div n$ и, воспользовавшись теоремой 8, вычислить суперпозицию $\mathsf{a}_n \circ ... \circ \mathsf{a}_1$. В рамках этого метода все числовые ряды, определяющие компоненты суперпозиции, конечны. Однако, нетривиальным моментом этой схемы алгоритма является вычисление значений функций f_i и их производных в точках α_i, $i = 1 \div n$, которые входят, согласно (35), в выражение операции суперпозиции, так как эти значения определяются бесконечными числовыми рядами.

В рамках обоих методов вычисления имеется возможность построения рекуррентной процедуры для последовательного определения каждой последующей l-й компоненты на основе компонент суперпозиции $\mathsf{a}_n \circ ... \circ \mathsf{a}_1$ с номерами, не превосходящими l.

15. Неравенства для компонент суперпозиций. Теперь мы переходим к задаче – получению оценок коэффициентов разложения на основе описанной выше схемы вычисления. Кроме того, что они сами по себе представляют самостоятельный интерес, на их основе возможно оценивать точность приближений при вычислении суперпозиции последовательности аналитических функций $\langle f_i(z); i = 1 \div n\rangle$, даваемых заменой каждой из функций конечным отрезком соответствующего степенного ряда.

Нам потребуется комбинаторное утверждение, при доказательстве которого как раз используется производящая функция. Обозначим посредством $N_{n,l}$ – число последовательностей $\langle k_1, ..., k_l\rangle$ таких, что $n = k_1 + k_2 + ... + k_l$, где $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1 \div l$ при $l \leq n$, где $l, n \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 23. *Функция $N_{n,l}$ имеет следующий вид:*

$$N_{n,l} = \frac{(n-1)!}{(n-l)!} \tag{70}$$

□ Рассмотрим в алгебре $\mathbb{C}^\infty$ элемент $\mathsf{x} = \langle a_k = 1; k \in \mathbb{N}_+\rangle$. Тогда, принимая во внимание (24), число $N_{n,l}$ представляется следующей формулой в терминах этого элемента:

$$N_{n,l} = \sum_{\substack{k_1,...,k_l \geq 1: \\ k_1+...+k_k=n}} \left(\bar{\mathsf{x}}^l\right)_n \,.$$

Введём в рассмотрение производящую функцию, связанную с $N_{n,l}$:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n N_{n,l}\,.$$

Число $N_{n,l}$ следующим образом выражается посредством производящей функции $F(z)$:

$$N_{n,l} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}F(z)\right]_{z=0}\,. \tag{71}$$

Так как $\mathsf{F}[z|\bar{\mathsf{x}}] = z/(1-z)$, то производящая функция равна

$$F(z) = \mathsf{F}[z|\bar{\mathsf{x}}^l] = \left(\mathsf{F}[z|\bar{\mathsf{x}}]\right)^l = \left(\frac{z}{1-z}\right)^l\,.$$

Тогда на основании (71) получаем

$$N_{n,l} = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{z}{1-z}\right)^l\right]_{z=0} = \frac{1}{n!}\binom{n}{l}\left(\frac{d^l}{dz^l}z^l\right)_{z=0}\left(\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}(1-z)^{-l}\right)_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{(n-l)!}\left(\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}(1-z)^{-l}\right)_{z=0} = \frac{(n-1)!}{(n-l)!}. \quad \blacksquare$$

Формула (70) позволяет найти в терминах расстояния $\mathsf{D}[\cdot]$ довольно общие априорные оценки производных произвольной аналитической функции $f(z)$, представленной рядом (1).

Т е о р е м а 24. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = 0$. Тогда для точек z из круга сходимости ряда (1) таких, что $|z| < (2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^{-1}$, $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$, при $l \in \mathbb{N}$ имеют место оценки*

$$|f^{(l)}(z)| \le \frac{2^l l!\mathsf{D}^l[\bar{\mathsf{a}}]}{1 - 2|z|\,\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}. \tag{72}$$

□ Так как для биномиальных коэффициентов справедлива оценка $\binom{n}{l} < 2^l$ и $f^{(l)}(z) = \sum\limits_{k=l}^{\infty}\frac{k!}{(k-l)!}a_k z^{k-l}$, то утверждение теоремы вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$|f^{(l)}(z)| \le \sum_{k=l}^{\infty}|a_k|\frac{k!}{(k-l)!}|z|^{k-l} \le 2^l l!\sum_{k=0}^{\infty}2^k|a_{k+l}|\,|z|^k \le$$

$$\le 2^l l!\mathsf{D}^l[\bar{\mathsf{a}}]\sum_{k=0}^{\infty}(2|z|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^k = \frac{2^l l!\mathsf{D}^l[\bar{\mathsf{a}}]}{1 - 2|z|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $l \ge 1$, $k \in \mathbb{N}_+$ имеет место оценка $|a_{k+l}| \le \mathsf{D}^{k+l}[\bar{\mathsf{a}}]$. ■

Используя полученные ограничения для производных, мы теперь в состоянии получить оценку коэффициентов разложения в степенной ряд суперпозиции двух функций f и g в терминах соответствующих им последовательностей коэффициентов разложения $\mathsf{a} = \langle a_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\mathsf{b} = \langle b_k; k \in \mathbb{N}_+\rangle$.

Эти оценки разумно получать в терминах норм $||\cdot||_\rho$, $\rho > 0$, так как скорость сходимости к нулю метрической характеристики $\mathsf{D}[\cdot]$, как уже отмечалось, существенно зависит от направления в $\mathfrak{C}$.

В соответствии с тем, что имеется два различных представления (33) и (36) для операции суперпозиции двух последовательностей, нами будет получено два типа оценок. Следующая теорема даёт те ограничения на коэффициенты разложения функции $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]$ в степенной ряд, которые устанавливаются на основе формулы (33). Её формулировка содержит два варианта оценки, каждая из которых может быть выбрана в качестве лучшей, в зависимости от соотношения между величинами $\rho||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$ и $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]$.

Т е о р е м а 25. *Пусть положительные числа ρ и σ таковы, что $\sigma > \rho$ и нормы $||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$, $||\mathsf{b}||_\rho$ конечны. Пусть, далее, пара $\langle\alpha, \xi\rangle$ положительных чисел α и ξ равна: либо $\langle||\bar{\mathsf{a}}||_\rho, \rho\rangle$,*

либо $\langle 1, \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\rangle$. *Тогда для нормы* $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$ *элемента* $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ *алгебры* $\mathfrak{C}$, *в первом случае, при* $||\mathsf{b}||_\rho < \rho^{-1} - \sigma^{-1}$, *и во втором случае, при* $||\mathsf{b}||_\rho \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] < (1-\rho/\sigma)$, *справедлива следующая оценка сверху:*

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma \le |a_0| + \frac{\alpha\xi||\mathsf{b}||_\sigma}{(1-\xi||\mathsf{b}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1})} \tag{73}$$

□ Заметим, что $|a_l| \le \alpha\xi^l$, $l \in \mathbb{N}$, где α и ξ – указаны в условии теоремы. Используя неравенство (65), находим

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma = \left|\left|\sum_{l=0}^{\infty} a_l \mathsf{b}^l\right|\right|_\sigma \le |a_0| + \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|\cdot||\mathsf{b}^l||_\sigma \le$$

$$\le |a_0| + \alpha\xi||\mathsf{b}||_\sigma \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\xi||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^l .$$

Суммирование последнего ряда приводит к неравенству (73), а выполнимость такого суммирования возможна при $\xi||\mathsf{b}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1} < 1$, что эквивалентно условиям в формулировке теоремы. ■

Заметим, что в том случае, когда последовательность $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ является распределением вероятностей дискретной случайной величины, необходима выполнимость неравенства $\mathsf{D}[\mathsf{a}\circ\mathsf{b}] \le 1$. Для этого случая оценка (73) представляет интерес, когда $\sigma < 1$. Тогда само распределение вероятностей убывает не медленнее, чем экспоненциально.

Оценка (73) кажется довольно грубой, так как она не содержит явной зависимости от расположения точки b_0, в то время как оно весьма существенно, согласно теореме 16, влияет на сходимость ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]$. Перейдём теперь к получению оценок второго типа для нормы $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$, в которых появляется зависимость от величины $|b_0|$. Они получаются на основе представления операции суперпозиции формулой (35). Справедлива

Т е о р е м а 26. *Пусть положительные числа* ρ *и* σ *таковы, что* $\sigma > \rho$ *и норма* $||\mathsf{b}||_\rho$ *конечна. Тогда для нормы* $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$ *элемента* $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ *алгебры* $\mathfrak{C}$ *при* $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho < (1-\rho/\sigma)/2$ *справедлива следующая оценка сверху:*

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma \le |f(a_0)| + \frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{(1-2|b_0|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])\left(1-2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1}\right)}, \tag{74}$$

где $f(z) = \mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$.

□ Оценка нормы суперпозиции $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ получается на основе её представления формулой (35) и применения (65) и (72):

$$||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma \le |f(b_0)| + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}|f^{(l)}(b_0)|\cdot||\bar{\mathsf{b}}^l||_\sigma \le$$

$$\le |f(b_0)| + \frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{1-2|b_0|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^l =$$

$$= |f(b_0)| + \frac{2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{(1-2|b_0|\cdot\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])(1-2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1})} . \quad ■$$

Заметим, что оба типа оценок являются очень грубыми, когда ряд $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}]$ представляет целую функцию. В этом случае радиус сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{a}\circ\mathsf{b}]$, согласно теореме 16, равен радиусу сходимости ряда $\mathsf{F}[z|\mathsf{b}]$, однако, оценки (73), (74) не отражают этого факта.

Оценку (77) можно улучшать (но при этом условие $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho < (1-\rho/\sigma)/2$ в формулировке теоремы останется неизменным), применив оператор $\mathsf{S}(\lambda)$, так как он обладает следующими очевидными свойствами:

$$\mathsf{F}[\lambda z|\mathsf{a}] = \mathsf{F}[z|\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{a}]\,,$$

$$\mathsf{S}(\lambda)(\mathsf{a}\circ\mathsf{b}) = \mathsf{a}\circ\mathsf{S}(\lambda)\mathsf{b}\,,$$

то величина отношения

$$\frac{||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma}{1-2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\cdot||\bar{\mathsf{b}}||_\rho(1-\rho/\sigma)^{-1}}$$

может быть сделана меньше за счёт уменьшения $||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma$.

В разных условиях при различных значениях параметров, входящих в выражения для оценок (73), (74), предпочтительней оказывается та или другая из них. Мы не будем давать общий критерий их применимости, а рассмотрим простые частные случаи, которые носят иллюстративный характер.

Пусть $b_0 = 0$. Тогда $f(b_0) = a_0$. В этом случае, очевидным образом, оценка первого типа является более точной, если использовать $\alpha = 1$, $\xi = \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]$, так как правая часть неравенства (74) превосходит правую часть (73). Если же $\alpha = ||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$, $\xi = \rho$, то то же самое будет иметь место при $2\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] > \rho||\bar{\mathsf{a}}||_\rho$.

Рассмотрим случай, когда оценка (74) является более точной, чем (73). Положим, что норма $||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma$ достаточно мала по сравнению с $|b_0|$. Покажем, что в этом случае выполняется необходимое нам неравенство. Ввиду непрерывности относительно $||\bar{\mathsf{b}}||_\sigma$, исследуем случай, когда $\bar{\mathsf{b}} = 0$, то есть $||\mathsf{b}|| = |b_0|$. Тогда должно иметь место

$$|f(b_0)| < |a_0| + \frac{\alpha\xi|b_0|}{1-\xi|b_0|(1-\rho/\sigma)^{-1}}\,.$$

В частном случае $\xi|b_0|(1-\rho/\sigma)^{-1} \le 1$, $f(z) = a_0 + a_1 z$, $\xi = |a_1|$ это неравенство принимает вид

$$|a_0 + a_1 b_0| < |a_0| + \frac{|b_0||a_1|}{1-\xi|b_0|(1-\rho/\sigma)^{-1}}\,.$$

Последнее, очевидным образом, выполняется.

Оценки (73), (74) зависят от свободных параметров ρ и σ, и поэтому имеется возможность их оптимизации, то есть посредством выбора подходящих значений для этих параметров возможно найти более жёсткие априорные ограничения на норму для $||\mathsf{a}\circ\mathsf{b}||_\sigma$. При исследовании последовательности суперпозиций функций радиус сходимости соответствующего ряда, вообще говоря, уменьшается. Чтобы проследить это изменение, важно иметь такой инструмент оценивания, который зависит от параметра, связанного с величиной радиуса сходимости. Таким инструментом является норма $||\cdot||_\rho$, рассматриваемая как функция от $\rho > 0$.

16. Условие на сжимаемость. Значения суперпозиции $\mathsf{a}\circ\mathsf{b}$ можно трактовать как значения нелинейного отображения $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$, параметризуемого элементом $\mathsf{a}\in\mathfrak{C}$, которое

применяется к элементам $\mathsf{b} \in \mathfrak{C}$. Областью определения этого отображения является множество $\{\mathsf{c} \in \mathfrak{C} : |c_0| < r_a = (\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})^{-1}\}$. Получим оценки на норму элемента $\bar{\mathsf{a}}$, обеспечивающие сжимаемость отображения $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$. Условие на сжимаемость легко формулируется в терминах более слабой топологии, определяемой совокупностью норм $||\cdot||_\rho$ с $\rho \geq 1$.

Т е о р е м а 27. *Для того чтобы оператор* $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$ *был сжимающим относительно нормы* $||\cdot||_\sigma$ *в шаре* $\{\mathsf{b} : ||\mathsf{b}||_\rho < B\}$, $\rho < \sigma$ *достаточно, чтобы* расстояние $\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]$ удовлетворяло условию

$$\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] < \left(\frac{\sqrt{1+4\zeta}-1}{2\zeta}\right)^2, \quad \zeta = \frac{B}{1-\rho/\sigma}. \tag{75}$$

□ Оценим нормы $||\cdot||_\sigma$ разностей $(\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l)$, $l \in \mathbb{N}$:

$$||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma = \left|\left|(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{b}^k * \mathsf{b}'^{l-1-k}\right|\right|_\sigma \leq \sum_{k=0}^{l-1} \left|\left|(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}^k * \mathsf{b}'^{l-1-k}\right|\right|_\sigma . \tag{76}$$

Выбрав число $\rho > 0$, меньшее σ, и применив неравенство (64), получаем

$$||(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}^k * \mathsf{b}'^{l-1-k}||_\sigma \leq \frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma} ||(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}^{k-1} * \mathsf{b}'^{l-1-k}||_\sigma \leq$$

$$\leq ... \leq ||(\mathsf{b}-\mathsf{b}') * \mathsf{b}'^{k-l-1}||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^k \leq$$

$$\leq ... \leq ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \left(\frac{||\mathsf{b}'||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^{l-1-k} \left(\frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^k .$$

Оценивая сверху правую часть (76) на основе полученного неравенства, находим

$$||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma \leq ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{||\mathsf{b}'||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^{l-1-k} \left(\frac{||\mathsf{b}||_\rho}{1-\rho/\sigma}\right)^k = ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \frac{x^l - y^l}{x-y},$$

где $x = (1-\rho/\sigma)^{-1}||\mathsf{b}||_\rho$, $y = (1-\rho/\sigma)^{-1}||\mathsf{b}'||_\rho$. Функция $(x^l - y^l)(x-y)^{-1}$ двух переменных $x, y \in \mathbb{R}_+$ достигает максимума в точке $x = y$, равного lx^{l-1}. Следовательно,

$$||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma \leq l\zeta^{l-1}||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma, \quad \zeta = \frac{\max\{||\mathsf{b}||_\rho, ||\mathsf{b}'||_\rho\}}{1-\rho/\sigma}.$$

Найдём теперь оценку нормы разности двух образов $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}]$ и $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}']$:

$$||\mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}] - \mathsf{M}[\mathsf{a}|\mathsf{b}']||_\sigma \leq \left|\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_l(\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l)\right|\right|_\sigma \leq \sum_{l=1}^{\infty} |a_l| \cdot ||\mathsf{b}^l - \mathsf{b}'^l||_\sigma \leq$$

$$\leq ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(\zeta\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}])^l = ||\mathsf{b}-\mathsf{b}'||_\sigma \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] \left(1-\zeta\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\right)^{-2} .$$

Отсюда следует условие на сжимаемость отображения $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$ в виде неравенства

$$\mathsf{D}^{1/2}[\bar{\mathsf{a}}] \left(1-\zeta\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}]\right)^{-1} < 1$$

или, эквивалентно, $\zeta \mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] + \mathsf{D}^{1/2}[\bar{\mathsf{a}}] - 1 < 0$. На основе стандартного анализа квадратного неравенства находим, что достаточным условием сжимаемости является

$$\mathsf{D}[\bar{\mathsf{a}}] < \left(\frac{\sqrt{1+4\zeta} - 1}{2\zeta} \right)^2 . \tag{77}$$

Так как функция от ζ в правой части этого неравенства является убывающей при $\zeta > 0$, то, заменив функционал $\max\{||\mathsf{b}||_\rho, ||\mathsf{b}'||_\rho\}$ в определении величины ζ на его максимально допустимое значение B, заключаем, что выполнимость условия (75) теоремы влечёт за собой выполнимость неравенства (77) и, следовательно, сжимаемость оператора $\mathsf{M}[\mathsf{a}|\cdot]$. ■

17. Заключение. Можно надеяться, что разработанная в настоящей работе алгебраическая техника оперирования с последовательностями коэффициентов аналитических функций может найти многочисленные применения при исследовании различных математических проблем. Исследование суперпозиций аналитических функций естественным образом приводит к постановке и решению связанных с ними функциональных уравнений. В частности, важной является проблема отыскания аналитических функций $f(z)$, являющихся устойчивыми решениями функциональных уравнений вида

$$(g \circ f)(z) = f(\lambda z)$$

с заданной аналитической функцией $g(z)$ и подходящей постоянной λ. Более того, на основе предложенной алгебраической техники возможно подойти к систематическому изучению аналитических решений функциональных уравнений более общего вида. Эта техника, наверняка, может оказаться полезной при построении решений дифференциальных и интегральных уравнений в виде степенных рядов, в задаче обращения аналитических функций при исследовании особенностей аналитических функций, заданных посредством степенных рядов, то есть в задаче конструктивного построения аналитического продолжения (см. по этому поводу, например, [12]). Она допускает обобщение на задачи, связанные с аналитическими функциями многих комплексных переменных и даже бесконечного их числа, что может представлять интерес, например, в теории случайных процессов.

Литература

1. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. – М.: Мир, 1974.

2. Холл М. Комбинаторика / М. Холл. – М.: Мир, 1970.

3. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1965.

4. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – М. : Наука, 1984.

5. Lax M. Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics / M. Lax. – New York: Gordon & Breach, 1968. (Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974. – 300с.)

6. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Метод рекуррентного вычисления распределения вероятностей фотоотсчетов квантового одномодового шумового излучения // Доклады НАНУ, Киев. – 2005. – №12. – С.14-18.

7. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / D.Ruelle. – Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / Д. Рюэль. – М.: Мир, 1971.)

8. Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian (quantum) field theory / B. Simon. – Princeton: Princeton University Press, 1974. (Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля / Б. Саймон. – М.: Мир, 1976.)

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

10. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства / А. Пич. – М.: Мир, 1967. – 256 с.

11. Курант Р. Гурвитц А. Теория функций / Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 646 с.

12. Бибербах Л. Аналитическое продолжение / Л.Бибербах. – М.: Наука, 1967.

ALGEBRA OF POWER SERIES COEFFICIENTS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Yu.P. Virchenko, N.N. Vitokhina

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

The algebra of operations with sequences from $\mathbb{C}^\infty$ is built. The developped algebraic formalism is applied for the calculation of expansion coefficients connected with compositions of analytic functions defined by power series.

Key words: analytic functions, power series, convolution, function compositions.

УДК 539.17

О НАРАБОТКЕ ^{60}Co НА НЕЙТРОННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

А.Н. Довбня[*)], **Э.Л. Купленников**[*)], **В.А. Цымбал**[*)], **В.В. Красильников**[**)]

[*)]Национальный научный центр ХФТИ
ул.Академическая, 1, г.Харьков, 61108, Украина, e-mail: kupl@kipt.kharkov.ua
[**)]Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308015, Россия

Проведены детальные оценки возможности применения нейтронного генератора с интенсивностью потока тепловых нейтронов 10^{12}n·см$^{-2}$·с$^{-1}$ для получения изотопа ^{60}Co на основе ядерной реакции ^{60}Co(nγ)^{60m,g}Co.

Ключевые слова: генератор нейтронов, тепловые нейтроны, радиоизотопы кобальта, ядерная медицина.

1. Введение

При получении радиоактивных изотопов (РИ) с помощью нейтронных реакций не всегда прибегают к отделению радиоактивного вещества. Так например, γ-источники ^{60}Co изготавливаются путем облучения в реакторах стержней или дисков из металлического кобальта. В результате реакции ^{59}Co(nγ)^{60}Co могут быть получены γ-источники с интенсивностью до 3000-5000 Ки. Практически достижимая скорость образования ^{60}Co в реакторе с плотностью потока нейтронов $3{\cdot}10^{13}$ n·см$^{-2}$·с$^{-1}$ составляет примерно 5 Ки ^{60}Co на 1 грамм металла в месяц [1].

Кобальт – стабильный, одноизотопный элемент с атомным номером 27, массовым числом 59 и атомным весом 58.9332. Плотность кобальта естественного изотопного состава (^{Nat}Co) 8.9 г/см^3. Из десяти известных радиоактивных изотопов (РИ) кобальта и нескольких изомеров наиболее важным является ^{60}Co. Он может находиться в двух состояниях – метастабильном (m) и основном (g). Эти состояния образуются в результате реакции ^{60}Co(nγ)^{60m,g}Co, причем оба состояния образуются одновременно. Испускаемое ^{60}Co γ-излучение обладает достаточно мощной проникающей способностью, что позволяет широко использовать данный РИ в различных сферах деятельности человека, в том числе и медицине для лечения онкологических заболеваний и в других целях.

Одним из примеров классического терапевтического использования ^{60}Co является применение специальных конструкций – так называемых "гамма-скальпелей". Они содержат около двухсот крошечных источников ^{60}Co с высокой удельной активностью, которые фокусируются извне с помощью соответствующих коллиматоров на опухоль (преимущественно головного мозга) и действуют, как скальпель. При другом терапевтическом подходе изотопы вкладываются в соответствующие микрокапсулы и внедряются в опухолевые ткани [2].

О важности производства ^{60}Co говорит хотя бы тот факт, что в настоящее время он наряду с некоторыми другими РИ отнесен к приоритетным видам нуклидной продукции медицинского назначения, призванной обеспечить реализацию проблемы развития ядерной медицины в России. И это при условии, что страна, не считая производств по выпуску

изотопов урана и плутония, имеет 17 крупных производителей стабильных и радиоактивных изотопов, и что только канальные реакторы РБМК-1000 Ленинградской АЭС позволяют накапливать ^{60}Co с удельной активностью 50-80 Ки/г в объемах до 6-8 млн. Ки в год как в виде сырья, так и в виде источников.

В настоящей работе проведены детальные оценки возможности использования нейтронного генератора (НГ) с интенсивностью потока тепловых нейтронов (ТН) 10^{12} n$\cdot$ см$^{-2}\cdot$ с$^{-1}$ для получения изотопов ^{60m,g}Co на основе ядерной реакции ^{60}Co(nγ)^{60m,g}Co.

2. Оптимальные параметры образца

В качестве мишени для получения ^{60m,g}Co рассматривался диск из металлического ^{Nat}Co диаметром 1.128 см (S = 1см^2). Оптимальная толщина образца выбрана равной средней длине свободного пробега нейтрона в кобальте. Она вычислялась с использованием полного макроскопического сечения Σ_t, которое характеризует всю совокупность процессов взаимодействия нейтронов с веществом. Здесь $\Sigma_t = \rho^*\sigma_t$, где ρ^* – число элементарных мишеней в единице объема, σ_t – полное сечение взаимодействия тепловых нейтронов. Подставляя соответствующие величины $\rho^* = 9.1 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$, $\sigma_t = 46$ барн, получаем $\Sigma_t = 4.186$ см$^{-1}$. Таким образом, оптимальная толщина мишени, равная средней длине свободного пробега [3], $\Lambda_t = 1/\Sigma_t = 0.239$ см. Это означает, что плотность потока ТН в ^{Nat}Co на расстоянии 0.239 см от поверхности диска падает в $e = 2.7183$ раз. Полученные величины позволяют оценить средний поток нейтронов, проходящий через мишень. При начальной величине потока $\sim 10^{12}$ n$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$ его среднее значение $\sim 0.684\cdot10^{12}$ n$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$. Для вышеприведенных параметров масса диска $m = 2.127$ г, а число ядер в образце равно $2.17 \cdot 10^{22}$.

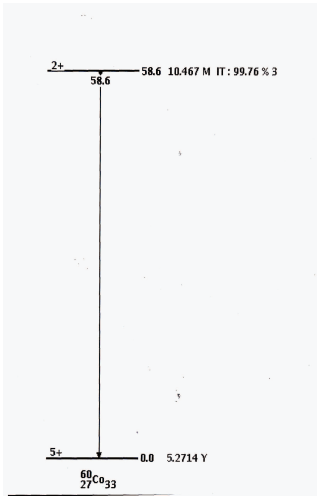


Рис. 1. Схема γ-распада изотопа ^{60m}Co.

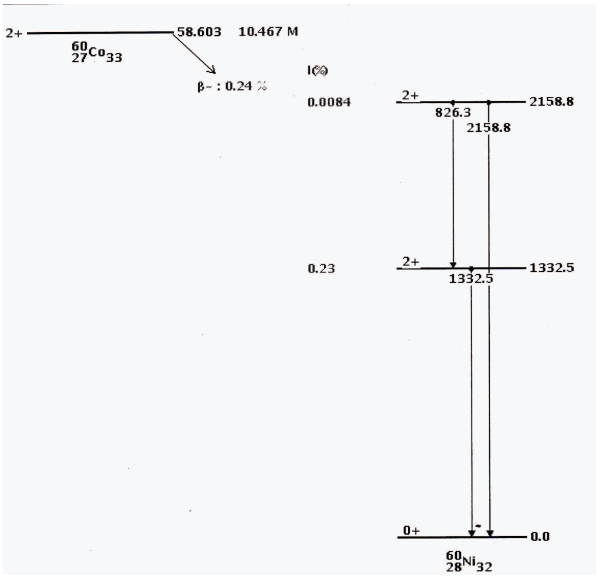


Рис. 2. Схема β^--распада изотопа ^{60m}Co.

3. Наработка ^{60m}Co

Метастабильное состояние ^{60m}Co, спин-чётность которого 2^+, излучает γ–кванты (изомерный переход (ИП)) с энергией 58.60 кэВ (мода распада 99.76%), и переходит в основное состояние ^{60}Co (рис. 1). Одновременно за счет β^--распада (0.24%) ^{60m}Co переходит на 2^+ уровни ^{60}Ni с энергией 2158.8 (I = 0.0084%) и 1332.5 кэВ (I = 0.23%). В конечном итоге, практически каждый акт излучения β^--частицы сопровождается вылетом γ-кванта с = 1332.5 кэВ. Схема β^--распада ^{60m}Co приведена на рис. 2.

Выражение для вычисления активности радиоизотопа изотопа A (Бк), накопившейся в образце за время облучения t_i (с) тепловыми нейтронами с плотностью потока Ф ($\text{н}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$), можно представить в стандартном виде [4]:

$$A = \lambda N = \Phi N_x \sigma (1 - \exp(-\lambda t_i)) \exp(-\lambda t_c)(1 - \exp(-\lambda t_m)), \quad (1)$$

где $\lambda = 0.693/\text{T}_{1/2}$ – константа распада РИ (с^{-1}); $\text{T}_{1/2}$ – период полураспада РИ (с); N – количество накопившихся радиоактивных ядер; N_x – число ядер стабильного изотопа анализируемого элемента в облучаемой пробе; σ – сечение реакции (см^2); t_c – время, затраченное на транспортировку пробы к месту детектирования или специальной выдержки для распада мешающих анализу более короткоживущих продуктов ядерной реакции; t_m – продолжительность измерения активности.

В связи с тем, что период полураспада ($\text{T}_{1/2} = 10.467$ мин) ^{60m}Co существенно меньше ($\text{T}_{1/2} = 1925.28$ дня) для ^{60}Co, а сечения образования РИ отличаются незначительно, наработка ^{60m}Co, а соответственно и его активность со временем t_i, нарастает значительно быстрее.

Как правило, исследуемые мишени облучают в течение времени ($\text{T}_{1/2}$ - $3\text{T}_{1/2}$), т.к. при $t_i > 3\text{T}_{1/2}$ активность стремится к "насыщенной активности", т.е. когда число образующихся в единицу времени радиоактивных ядер равно числу распавшихся. Практически это означает, что в (1) величина

$$(1 - \exp(-\lambda t_i)) \to 1,$$

т.е. активность принимает максимально возможное значение. В данном случае "насыщенная активность", т.е.

$$(1 - \exp(-\lambda t_i)) = 0.99 \sim 1$$

имеет место при минимальном времени облучения t_i =1.16 часа.

Подставляя в (1) время облучения 1.16 часа, константу распада ${}^m\lambda = 1.10 \cdot 10^{-3}$ с^{-1}, сечение ${}^m\sigma = 20.4$ барн [5] (без учета времени t_c и t_m), получаем число активированных ядер ^{60m}Co $\sim 2.725 \cdot 10^{14}$, а их активность $\sim 29.98 \cdot 10^{10}$ Бк ~ 8.10 Ки. Поскольку ИП наблюдается у 99.76% ядер, то на момент отключения НГ активность излучения γ-квантов с энергией $E_\gamma = 58.60$ кэВ будет несколько меньше $29.91 \cdot 10^{10}$ Бк ~ 8.08 Ки.

Как было сказано ранее, при радиационном захвате нейтрона ^{59}Co одновременно образуются как ^{60m}Co, так и ^{60}Co. Последний излучает основные γ-кванты совершенно другого диапазона энергий $E_\gamma = 1173.2$ и 1332.5 кэВ. Поэтому определенный интерес представляет величина вклада ^{60}Co относительно ^{60m}Co. Проведенный анализ показал, что за время облучения t_i =1.162 часа (ввиду огромной разницы в периодах полураспада) ядра ^{60}Co в образце практически не нарабатываются.

Следует также иметь в виду, что ^{60m}Co в течение всего времени активации интенсивно поглощает ТН. Сечение этого процесса 58 барн. Поэтому часть ядер ^{60m}Co в принципе должно перейти в $7/2^-$ состояние ^{61}Co. Этот РИ излучает β^--частицы (100%) с периодом полураспада 1.65 часа и переходит на возбужденный $5/2^-$ уровень с энергией 909.2 кэВ (4.4%) и $5/2^-$ уровень с энергией 67.4 кэВ (95.6%) ^{61}Ni. При переходе с уровня $5/2^-$ в стабильное $3/2^-$ состояние ^{61}Ni излучается γ-квант $E_\gamma = 67.4$ кэВ. Количественные оценки данного процесса показали, что при $t_i = 1.162$ часа примерно $3.6 \cdot 10^7$ ядер ^{60m}Co превращаются в ^{61}Co, активность которого пренебрежимо мала $\sim 4.2 \cdot 10^3$ Бк.

Таким образом, можно считать, что облученный образец первоначально содержит в основном ядра ^{60m}Co и является практически моноэнергетическим γ-излучателем $E_\gamma = 58.60$ кэВ.

4. Наработка ^{60}Co

С течением времени все большее количество короткоживущих ядер ^{60m}Co переходит на уровень с энергией 0.0 МэВ, спином и четностью 5^+ долгоживущего ^{60}Co (мода распада (100%)). Схему распада ^{60}Co можно видеть на рис. 3. Видно, что 5^+ состояние ^{60}Co в результате испускания β^--частицы с вероятностью 99.88% переходит в возбужденное 4^+ состояние с энергией 2505.7 кэВ и с интенсивностью 0.12% – в 2^+ состояние с энергией 1332.5 кэВ ^{60}Ni. Распад РИ сопровождается несколькими слабыми γ-линиями с интенсивностью $\sim (2 \cdot 10^{-6} - 0.0076)\%$, а также двумя сильными γ-линиями 1173.2 кэВ ($I_\gamma = 99.85\%$) и 1332.5 кэВ ($I_\gamma = 99.98\%$).

Как было сказано ранее, следуя закону радиоактивного распада, через несколько часов выдержки для распада образовавшегося ^{60m}Co в образце останутся практически только ядра ^{60}Co. Их количество составит примерно $2.718 \cdot 10^{14}$ ядер, что соответствует γ-активности $\sim 1.14 \cdot 10^6$ Бк ~ 30.7 мкКи. Полученная в результате вышеописанного процесса $^{60m}\text{Co} \xrightarrow{ИП} {}^{60}\text{Co}$ γ-активность ^{60}Co достаточно мала, однако, она заметно больше предельных доз, допускаемых в медицинских процедурах. Эти дозы, применяемые при исследовании систем жизнедеятельности человека, следующие (см. [6]): внутривенное введение – 3 мкКи, введение внутрь через полость рта – 0.33 - 0.60 мкКи, в воде $2 \cdot 10^{-2}$ мкКи/мл и в воздухе 10^{-6} мкКи/см^3.

Большой период полураспада ^{60}Co указывает на то, что сомножитель $(1 - \exp(-\lambda t_i))$ в (1) при $t_i \ll 3T_{1/2}$ быстро убывает. Поэтому время облучения для получения ^{60}Co непосредственно в реакции ^{59}Co(nγ)^{60}Co следует выбирать как можно больше (в пределах разумного). В данном случае выбрано время $t_i = 66$ часов, что обусловлено возможностью (в будущем) облучать одновременно в разных технологических каналах изотоп ^{98}Mo для получения ^{99m}Tc и ^{59}Co для наработки ^{60}Co. Сечение данной реакции на тепловых нейтронах [5, 7]:

$$ {}^g\sigma + {}^m\sigma = (37.18 \pm 6)\text{барн}, $$

сечение ${}^m\sigma = (20.4 \pm 8)$ барн, т.е. ${}^g\sigma = 16.78$ барн. Численные оценки наработки ^{60}Co в реакции ^{59}Co(nγ)^{60}Co с учетом того, что только 99.76% образовавшегося ^{60m}Co с течением времени превращается в ^{60}Co, дают полное число образовавшихся ядер ^{60}Co $\sim 6.0 \cdot 10^{16}$, а активность ~ 6.8 мКи. Учитывая, однако, что каждые 1.162 часа в образце за счет процесса $^{60m}\text{Co} \xrightarrow{ИП} {}^{60}\text{Co}$ также образуется максимальное (равновесное) количество ядер ^{60}Co, суммарная активность наработанного в образце ^{60}Co за время $t_i = 66$ часов окажется равной 8.54 мКи. Полученная величина активности в одном образце существенно

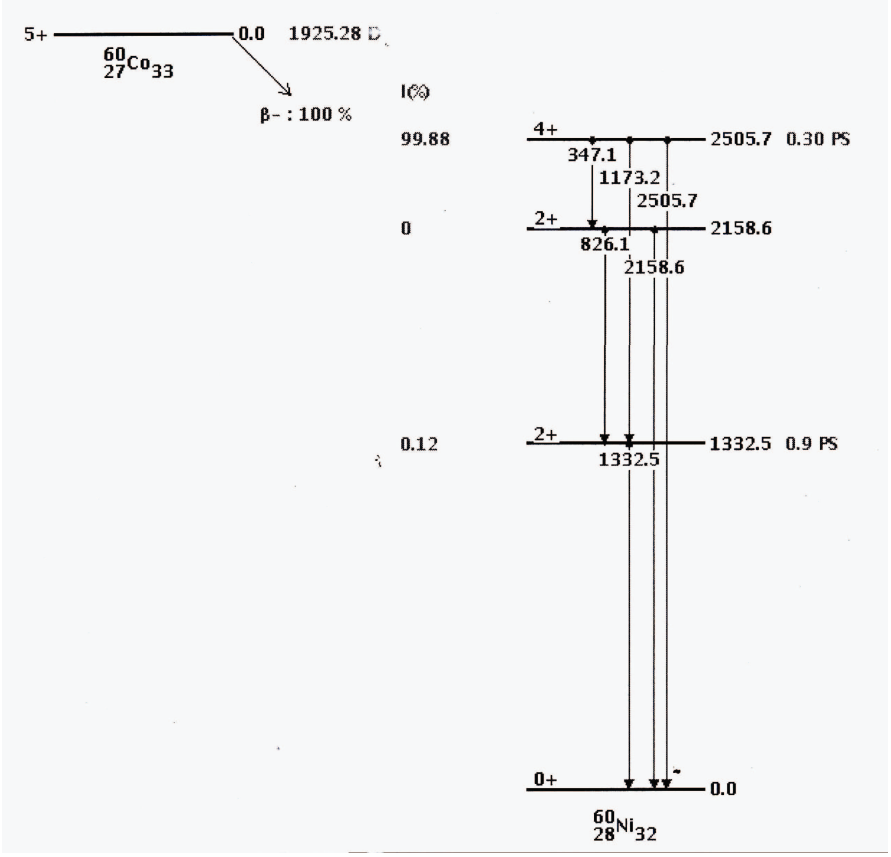


Рис. 3. Схема распада ^{60}Co.

больше предельных доз, допускаемых в медицине (см. текст выше). Если же учесть возможность активации в НГ не одной мишени, а целой гирлянды, состоящей из большого числа образцов, то это, по-видимому, даст возможность создать гамма-скальпель.

Следует отметить, что ^{60}Co также интенсивно поглощают ТН. Сечение этого процесса 2 барна. Поэтому часть образовавшихся ядер кобальта, в принципе, могут перейти в ^{61}Co. Количественные оценки данного процесса показали, что его влияние на конечную активность ^{60}Co мало.

5. Эффект самопоглощения в образце

В случае применения ^{60m,g}Co на практике необходимо вводить поправку на эффект самопоглощения γ-квантов в материале образца [8]. Этот эффект проявляется как результат того, что источники, которые исследуются в реальных экспериментах, не являются точечными, а имеют конечные размеры. В результате γ-кванты взаимодействуют со средой мишени посредством трех основных эффектов: фотоэффект, Комптон-эффект и рождение электрон-позитронных пар. Эти взаимодействия приводят к поглощению γ-квантов в среде до того, как они вылетят из образца. Самопоглощение считается отсутствующим, если толщина образца < 100 мг/см^2. Это справедливо практически для всего энергетического диапазона, начиная с 50 кэВ.

Оценки самопоглощения для ^{60m}Co, проведенные в приближении когда γ-кванты излучаются параллельно друг относительно друга перпендикулярно крышке γ-спектрометра, показали, что для толщины образца 0.239 см поправка на самопоглощение ~ 0.32. Для

уменьшения влияния данного эффекта облучаемый диск должен состоять из набора тонких фольг ^{Nat}Co. Например, поправка для слоя ^{Nat}Co 0.02 см почти втрое больше ~ 0.89. Ясно, что активность каждой фольги будет заметно меньше относительно целого образца толщиной 0.239 см и будет дополнительно падать от фольги к фольге вследствие поглощения нейтронов в веществе предыдущих слоев.

Поправки на эффект самопоглощения для диска из металлического кобальта естественного изотопного состава толщиной 0.239 см с примесью ядер ^{60}Co, которые излучают γ-кванты с энергией 1173.2 (1332.5) кэВ, составляют 0.94 (0.95) соответственно.

6.Заключение

При облучении диска из ^{Nat}Co площадью 1 см^2 и толщиной 0.239 см тепловыми нейтронами в течение $t_i = 1.16$ часа (условие радиоактивного равновесия) с учетом того, что изомерный переход наблюдается у 99.76% ядер, активность ядер ^{m}Co ~ 8.08 Ки. Данный образец в первоначальный момент является практически моноэнергетическим γ-излучателем $E_\gamma = 58.60$ кэВ. Поправка на самопоглощение в исследуемом образце ~ 0.32.

Вследствие процесса ^{60m}Co $\xrightarrow{ИП}$ ^{60}Co через несколько часов после окончания активации в мишени останутся только ядра ^{60}Co в количестве $\sim 2.718 \cdot 10^{14}$, что соответствует активности $\sim 1.136 \cdot 10^6$ Бк ~ 30.7 мкКи.

Активность ^{60}Co, наработанная в реакции ^{59}Co(nγ)^{60}Co, при облучении тепловыми нейтронами в течение $t_i = 66$ часов, составляет ~ 6.8 мКи. Суммарная активность за счет обоих процессов ~ 8.54 мКи. Поправки на эффект самопоглощения для энергии 1173.2 (1332.5) составляют 0.94 (0.95) соответственно.

Полученная величина активности в одном образце больше предельных доз, допускаемых для ряда диагностических и терапевтических процедур. Если же учесть возможность активации в НГ не одной мишени, а целой гирлянды, состоящей из большого числа тонких образцов, то это, по-видимому, даст возможность создать гамма-скальпель для терапии различных опухолей.

Работа поддержана грантом УНТЦ № P333.

Литература

1. Бреслер С.Е. Радиоактивные элементы / С.Е. Бреслер. – М.: Изд. технико-теорет. лит., 1957. – 552 с.

2. Баранов В.Ю. Изотопы II / В.Ю. Баранов. – М.: Физматлит, 2005. – 728 с.

3. Блан Д. Ядра, частицы, ядерные реакторы / Д.Блан. – М.: Мир,1989. – 336 с.

4. Немец О.Ф. Справочник по ядерной физике / О.Ф. Немец, Ю.В. Гофман. – Киев: Наукова Думка,1975. – 416 с.

5. Радиационный захват нейтронов (Справочник)/– М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248с.

6. Гайсинский М. Радиохимический словарь элементов / М. Гайсинский, Ж. Адлов. – М.: Атомиздат, 1968. – 256с.

7. N. Moss, L. Yaffe. Determination of the neutron capture cross section for the ^{59}Co(nγ)^{60m}Co reaction // Canadian Journal of Chemistry. – 1953. – 31. – P.391-395.

8. Cutshall N.H., Larsen I.L., Olsen C.R Direct analysis of 210Pb in sediment samples: self-absorption corrections // Nucl. Inst. and Meth. – 1983. – 206. – P.309-312.

ON ^{60}Co PRODUCTION AT NEUTRON GENERATOR

A.N. Dovbnya[1)], **E.L. Kuplennikov**[1)], **V.A. Tsymbal**[1)],
V.V. Krasil'nikov[2)]

[1)]National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"
Akademicheskaya St., Kharkov, 61108, Ukraine, e-mail: kupl@kipt.kharkov.ua

[2)]Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kras@bsu.edu.ru

It is fulfilled detailed estimates of possibility of the neutron generator with intensity flow of thermal neutrons 10^{12}n·cm^{-2}·s^{-1} for the application of ^{60}Co production on the base of the ^{59}Co(nγ)^{60m,g}Co nuclear reaction.

Key words: neutron generator, thermal neutrons, cobalt radioisotopes, nuclear medicine.

УДК: 669.295:539.2

СТРУКТУРА И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУРНОГО ЛИСТА ИЗ ТИТАНА ВТ1-0, ПОЛУЧЕННОГО ХОЛОДНОЙ ПРОКАТКОЙ[2)]

Н.В. Лопатин, Г.С. Дьяконов, С.В. Жеребцов, Г.А. Салищев

Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: salishchev@bsu.edu.ru

Проведены исследования эволюции микроструктуры титана ВТ1-0 при холодной прокатке и процесса изготовления из него наноструктурированных листов большого формата. Показано, что двойникование способствует измельчению микроструктуры титана с формированием зёренно-субзёренной структуры со средним размером элементов 400-500 нм. Установлено, что изменение направления прокатки на переходах способствует увеличению доли высокоугловых границ. Прокатанные по такому маршруты ленты имеют более высокие механические свойства и однородную структуру, чем листы, прокатанные с меньшим количеством поворотов заготовки. Обсуждаются причины влияния маршрута прокатки на структуру и механические свойства титана. Рассматриваются возможности технологий на основе прокатки для получения большеразмерных наноструктурированных листов из титана.

Ключевые слова: наноструктура, титан, прокатка, лист, двойникование, технология, механические свойства.

1. Введение

Высокая протяженность границ зёрен/фрагментов в наноструктурированных материалах существенно увеличивает вклад зёрнограничной составляющей диффузии [1], что дает основание для их использования как связующего элемента при изготовлении слоистых композиционных материалов. Элементами, обеспечивающими соединение материалов, могут служить наноструктурированные тонкие листы определенных металлов и сплавов. Между тем, проблема получения наноструктурированных листов остается всё ещё во многом не решенной. Ранее для ряда материалов использовали двухэтапную обработку, которая включает предварительное наноструктурирование заготовок одним из методов интенсивной пластической деформации, например, равноканальным угловым прессованием или всесторонней ковкой, и последующую их прокатку [2]. Таким методом получали тонкие ленты, однако, очевидные трудности масштабирования заготовок под прокатку методами интенсивной пластической деформации, особенно, для таких труднодеформируемых материалов, каковыми являются титановые сплавы, не позволяют решить главную задачу изготовление полноразмерных листов.

Основным изменением микроструктуры в металлах при больших деформациях является её фрагментация, приводящая к формированию смешанной зёренно-субзёреной структуры [3]. Значительное измельчение микроструктуры, наблюдающееся в ходе этого процесса, даёт существенный рост прочности. Большие деформации могут быть созданы и

[2]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 - 2013 годы, ГК № П2143 от 05 ноября 2009 г. "Исследование и разработка технологий получения листов из титановых сплавов с улучшенными физикомеханическими свойствами для функционального и конструкционного применения".

при помощи прокатки [1]. Однако, исследования в этом направлении практически отсутствуют. В частности, в металлах, испытывающих механическое двойникование, процесс фрагментации может быть ускорен благодаря перестройке при пластической деформации двойниковых границ в высокоугловые. Однако, такие параметры микроструктуры, формирующейся после прокатки, как размер зёрен/субзёрен, их распределение по размерам, тип формирующейся текстуры, доля высокоугловых границ остаются во многом неисследованными. Кроме того, в таких материалах, как титан можно ожидать значительные внутренние напряжения, которые будут наиболее сильно проявляться при масштабировании листов, вызывая в них коробоватость. Всё это требует проведения исследований в направлении получения посредством обычной прокатки наноструктурированных листов из востребованных промышленностью материалов, например, из таких, как титан. Целью настоящей работы являлось исследование возможностей изготовления холодной прокаткой листов из титана ВТ1-0 с размерами 250х500х0,3 мм, а также исследование их структуры и механических свойств.

2. Материалы и методика

В качестве материала исследований был взят титан марки ВТ1-0 в виде листа размером 4х400х920 мм, изготовленный ОАО "Корпорация ВСМПО-АВИСМА" по ГОСТ 1-90013-81 с химическим составом, представленным в табл. 1. Механические свойства титана: σ_B=42.8 кгс/мм^2, δ=49.3%.

Таблица 1

Химический состав титана ВТ1-0 (вес.%) в состоянии поставки

Ti	Al	Si	Fe	C	O_2	N_2	H_2	Сумма остальных примесей
осн.	0.010	0.002	0.120	0.004	0.143	0.003	0.0008	0.077

Из листа были вырезаны заготовки размерами 114х114х4 мм для последующей прокатки на шестивалковом стане листовой прокатки листов размерами 250х500х0,3 мм. Диаметр рабочих валков – 70 мм, ширина бочки – 300 мм. Для отработки режимов и проведения сравнительного исследования структуры и механических свойств были вырезаны также заготовки размерами 35х60 мм для прокатки лент размерами 50х500х0,3 мм. Суммарная степень деформации при прокатке в обоих случаях составила 92,5%. Металлографические исследования исходных и деформированных образцов были выполнены с использованием метода анализа дифракции обратно-рассеянных электронов (EBSD), который был реализован на растровом микроскопе Quanta 200 3D. Шаг сканирования при EBSD выбирали из условия расположения не менее 10 точек в продольном сечении зерна. Механические испытания на растяжение образцов проводили согласно ГОСТ 11701-84 на универсальной испытательной машине Instron 5882 при комнатной температуре со скоростью перемещения траверсы 1 мм/мин. Образцы вырезались вдоль и поперек направления прокатки. Измерение геометрических размеров образцов было выполнено с помощью инструментального микроскопа Olympus STM6. Измерения микротвёрдости осуществлялись с использованием микротвёрдомера Wolpert 402MVD в соответствии с ГОСТ 9450-76. Нагрузка при вдавливании пирамидки составила 50 г, время выдержки – 10 с.

3. Результаты исследований

Микроструктура титана в состоянии поставки состояла из равноосных зерен со средним размером 15 мкм. Такая микротекстура является типичной для рекристаллизованного листового материала. Видно, что она имеет базисный тип с ориентировкой максимумов относительного направления прокатки на 30 градусов [4]. Распределение взаимной разориентировки зёрен представлено на рис. 1в. Видно, что доля высокоугловых границ равна 87%.

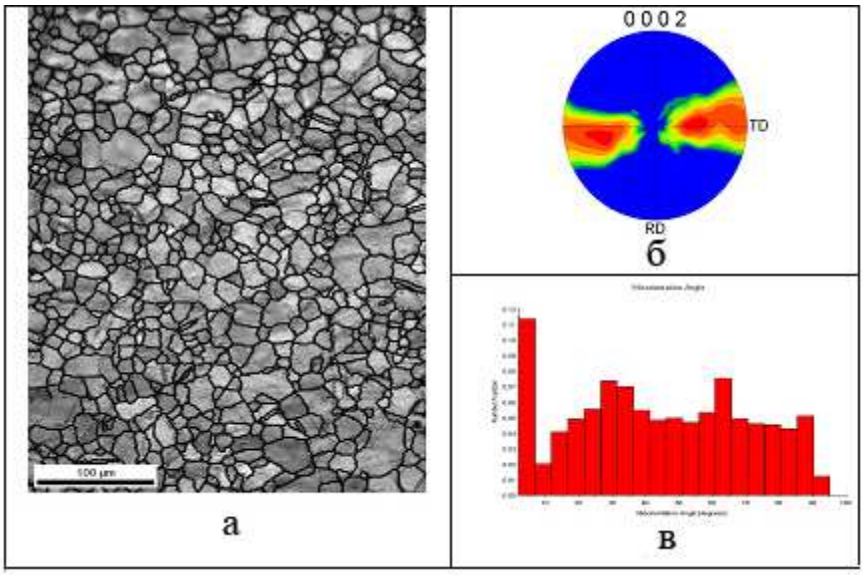


Рис. 1. Микроструктура титана ВТ1-0 в состоянии поставки (а – микроструктура, б – микротекстура, в – распределение разориентировок границ зерен).

С целью отработки режимов прокатки, принимая во внимание важную роль механического двойникования в процессе формирования наноструктурного состояния [4], было проведено исследование эволюции микроструктуры титана (рис. 1а-1е). Для этого была проведена прокатка образцов в направлении прокатки исходного материала до степени 92,5%. Видно, что уже при степени деформации 1% (рис. 1а) в материале активизируется процесс механического двойникования, в теле зёрен появляются двойники линзообразной формы. С ростом степени деформации двойникование в титане активно развивается, внутри зёрен возникают новые двойники, причём разных систем, которые сталкиваются и пересекаются друг с другом (рис. 1 б,в). Однако, двойникование протекает неравномерно, даже при степени деформации 30% обнаруживаются недвойникованные зёрна, что, по-видимому, связано с их неблагоприятной ориентировкой для развития двойникования. К 60% деформации как зёрна, так и двойники практически теряют свою исходную форму (рис. 1г). Двойники искривляются, дробятся на отдельные части. Часть исходных границ зёрен практически не различима. При дальнейшем увеличении степени деформации, по данным электронно-микроскопического анализа, формируется смешанная зёренно-субзёренная микроструктура.

В табл. 2 приведены результаты исследования зависимости доли малоугловых, высокоугловых, двойниковых границ и среднего расстояния между границами от степени деформации титана. Видно, что уже к 15% резко уменьшается доля высокоугловых границ и увеличивается доля малоугловых и двойниковых. Причём, при дальнейшей деформации до 30% доля двойниковых границ практически не меняется. Оценка доли границ

различного типа при степени 92,5% показала, что доля высокоугловых границ осталась практически прежней 47%, а двойниковые границы обнаружены не были. Было проведено определение среднего расстояния между границами различных типов при разных степенях деформации в диапазоне 5-30% (табл. 2). Двойникование в значительной мере измельчает микроструктуру, наименьшее расстояние между границами было получено при 30% деформации. Оценки этого параметра методом EBSD при больших степенях деформации затруднены из-за значительного усложнения картины микроструктуры. Средний размер зёрен/субзёрен, полученный при 92,5%, был равен 500 нм.

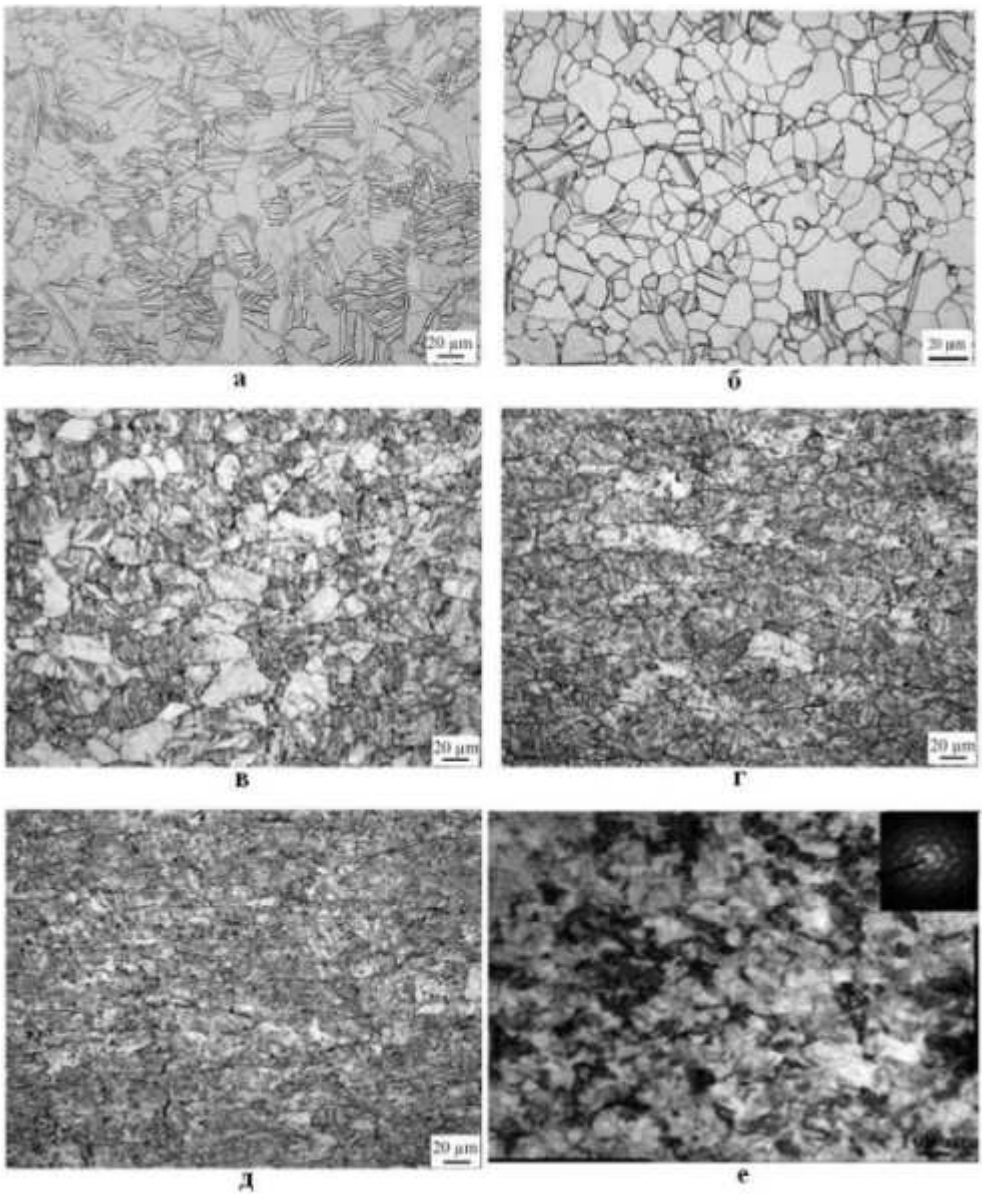


Рис. 2. Эволюция микроструктуры титана ВТ1-0 в ходе прокатки при комнатной температуре: а – 1%; б – 10%; в – 30%; г – 60%; д – 80%; е – 92,5%.

Таблица 2

Зависимость доли малоугловых, высокоугловых, двойниковых границ и среднего расстояния между границами от степени деформации титана ВТ1-0

Степень деформации, %	Доля малоугловых границ (2 – 15°), %	Доля высокоугловых границ (15 –180°), %	Доля двойниковых границ, %	Среднее расстояние между границами, мкм
0	13	87	0	17
5	16	84	57	7,5
10	22	78	65	5,3
15	53	47	74	3,5
20	57	43	75	3,7
30	64	35	77	2,7

Полученные результаты относительно эволюции микроструктуры позволяют предположить, что можно интенсифицировать процесс формирования наноструктурного состояния титана путём включения в пластическое течение с уже начальных степеней деформации возможно бóльшего числа зёрен. В связи с этим, были предложены два режима прокатки: первый был использован при прокатке лент, а второй – при прокатке листов (табл. 3). Лента была прокатана в несколько проходов с различными степенями деформации, причём на каждом из проходов направление прокатки менялось на 90°. Лист был прокатан с изменением направления прокатки после степени деформации 62%.

Таблица 3

Режимы прокатки титана ВТ1-0 для получения ленты и листа

Режимы прокатки	Степень деформации до изменения направления прокатки, %	Степень деформации после изменения направления прокатки, %	Суммарная степень деформации, %
1. Лента	5; 5; 15	89	92,5
2. Лист	62	80	92,5

На рис. 3 представлены прокатанные ленты с размерами 50х500х0,3 мм и лист – 250х500х0,3 мм. Отметим, что и лист, и лента деформировались вплоть до конечной степени деформации без образования трещин. Однако, на обоих образцах была отмечена значительная коробоватость, свидетельствующая о значительных внутренних напряжениях в материале.

Рис. 3. Фотографии ленты и листа титана ВТ1-0 (а – 50х500х0.3, б – 250х500х0.3).

Исследование микроструктуры ленты и листа выявило существенную неоднородность в размерах структурных элементов, формирующихся в процессе прокатки (рис. 4). Видно, что в листе (рис. 4б) присутствуют заметно более крупные зёрна. Установлено, что объёмная доля зёрен размером более 1 мкм в ленте составляет 12%, тогда как в листе – 22%. При этом средний размер зёрен/субзёрен в ленте – 400 нм, тогда как в листе – 500 нм. Доля высокоугловых границ в листе была равна 47%, а в ленте существенно больше – 62%. Отметим, что тип кристаллографической текстуры практически одинаков в обоих образцах и близок к исходной, различие лишь в большей остроте максимумов.

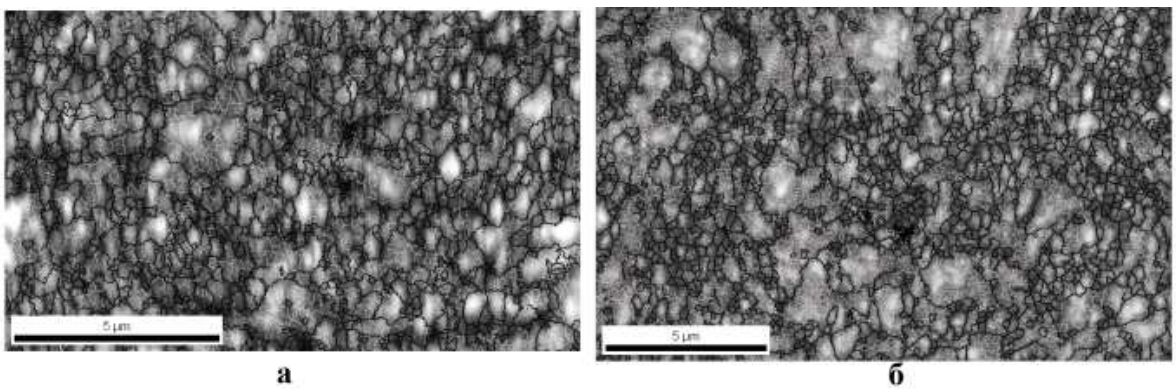


Рис. 4. Микроструктура ленты (а) и листа (б) из титана ВТ1-0
после прокатки на степень 92,5%. EBSD-изображение.

Для оценки механических свойств ленты и листа были проведены испытания на растяжение образцов (см. табл. 4). Из полученных результатов видно, что при формировании наноструктурного состояния прочностные характеристики существенно возрастают

по сравнению с исходным состоянием. Отмечается их рост почти в два раза, но при этом пластичность падает с 49,3% до 3-5%. Практически отсутствует анизотропия механических свойств. Между тем заметно различие в механических свойствах ленты и листа. В ленте почти на 100 МПа выше как предел текучести, так и предел прочности. Наблюдаемое различие может быть связано с разницей в микроструктурном состоянии ленты и листа. Действительно, наличие бóльшей доли крупных зёрен в листе будет вести к снижению в нем прочностных характеристик.

Таблица 4

Механические свойства ленты и листа из титана ВТ1-0

Виды обработки образца	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B, МПа	δ,%
В состоянии поставки	-	428	49,3
Лента 40x500x0.3. Вдоль направления прокатки	790	952	5,6
Лента 40x500x0.3. Поперек направления прокатки	750	953	3,6
Лист 250x500x0.3. Вдоль направления прокатки	682	857	4,7
Лист 250x500x0.3. Поперек направления прокатки	644	834	4,8

Известно, что микротвёрдость титана зависит как от плотности дефектов кристаллического строения, так и от уровня внутренних напряжений. Таким образом, измерения микротвёрдости после термической обработки позволяют определить температуру отжига, необходимую, с одной стороны, для снятия внутренних напряжений, с другой стороны, не приводящей к существенному разупрочнению металла.

На рис. 5 представлен график изменения микротвёрдости. Видно, что существенное снижение микротвёрдости происходит после отжига при температуре 400°C. Отметим, что начало падения микротвёрдости наблюдается при температуре, равной 250°C. Увеличение микротвёрдости в интервале отжигов 200 – 400°C связано со старением материала.

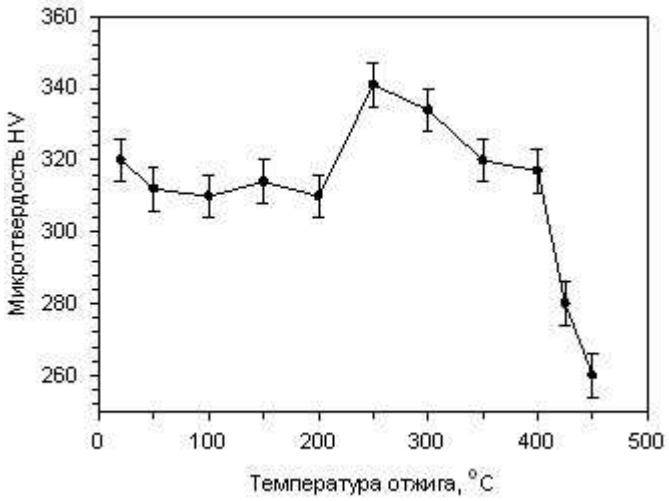


Рис. 5. Влияние термической обработки на микротвёрдость полученных листов.

4. Обсуждение

Результаты исследования показывают, что двойникование в титане способствует протеканию фрагментации микроструктуры и образованию в нём наноструктурного состояния. Между тем, доля высокоугловых границ, уменьшающаяся с началом деформации за счёт формирования малоугловых границ, практически, не меняется вплоть до самых больших степеней прокатки. Это означает, что в процессе прокатки в исследованном диапазоне степеней деформации не происходит существенных по интенсивности процессов формирования зёрен с высокоугловыми границами, например, при двойниковании или при образовании границ деформационного происхождения при фрагментации. В то же время было установлено, что при поворотах образца от перехода к переходу при прокатке доля высокоугловых границ заметно увеличивается. В ленте, которая была подвергнута подобному маршруту обработки, отмечена более однородная микроструктура и более высокие прочностные характеристики. Данный результат показывает, что поворот образца, который используется в различных схемах интенсивной пластической деформации для получения более однородной микроструктуры, эффективен и при прокатке. Возникающие при изменении направления деформирования, пересечения границ деформационного происхождения способствуют, по-видимому, более быстрому формированию новых зёрен в титане, что было отмечено в работе по росту доли высокоугловых границ. Таким образом, технология наноструктурирования титана при листовой прокатке должна учитывать поворот заготовки на переходе как важный элемент процесса. В работе впервые были прокатаны листовые карточки из титана ВТ1-0 больших размеров 250x500x0.3 мм, которые показали удовлетворительные механические свойства и параметры микроструктуры. Однако, очевидны возможности совершенствования процесса с точки зрения оптимизации режимов для повышения качества листов.

5. Выводы

1. Исследована эволюция микроструктуры титана ВТ1-0 при листовой прокатке. Показано, что двойникование способствует формированию зёренно-субзёренной структуры со средним размером структурных элементов 400-500 нм. Доля высокоугловых границ после уменьшения за счёт образования малоугловых границ на начальной стадии прокатки, практически, не меняется при дальнейшей степени деформации.

2. Показано, что изменение направления прокатки на переходах способствует увеличению доли высокоугловых границ. Прокатанные по такому маршруту ленты имеют более высокие механические свойства и однородную структуру, чем листы, прокатанные с меньшим количеством поворотов заготовки.

3. Впервые прокатаны наноструктурированные листы из титана ВТ1-0 больших размеров – 250x500x0.3 мм с прочностными свойствами, в два раза превышающими прочностные свойства в состоянии поставки, но при заметно более низкой пластичности.

Литература

1. Валиев Р.З. Объёмные наноструктурные металлические материалы / Р.З. Валиев, И.В. Александров. – М.: ИКЦ "Академкнига", 2007. – 398 с.

2. Малышева С.П., Салищев Г.А., Бецофен С.Я. Особенности холодной прокатки, структура и механические свойства листовых полуфабрикатов из технического титана с субмикрокристаллической структурой // Металлы. – 2003. – 5. – С.75-86.

3. Рыбин В.В. Большие пластические деформации разрушение металлов / В.В. Рыбин. – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.

4. Hans Conrad. Effect of interstitial solutes on the strength and ductility of titanium // Progress in Materials Science. – 26. – P.123-403.

STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF NANOSTRUCTURED SHEET OF TITANIUM VT1-0 PRODUCED BY COLD ROLLING

N.V. Lopatin, G.S. Djyakonov, S.V. Zherebtsov, G.A. Salishchev

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: salishchev@bsu.edu.ru

Evolution of the microstructure of titanium VT1-0 during cold rolling and producing of large-scale nanocrystructured sheets were investigated. It was shown that twinning promotes the microstructure refinement that may result in the formation of (sub)grain structure with the mean size of elements of 400-500 nm. Changes in the rolling direction were found to be increasing the fraction of high-angle boundaries. The sheets which were rolled with changing of rolling direction have higher mechanical properties and much more homogeneous structure than those without or with less number of turns during rolling. The influence of deformation path on the structure and properties of titanium are discussed. Capacity of the rolling technologies for producing large-scale nanostructured sheets of titanium is considered.

Keywords: nanostructure, titanium, rolling, sheet, twinning, technology, mechanical properties.

УДК 539.4.015.1; 548.24

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ МИКРОТВЕРДОСТИ ТЕХНИЧЕСКИ ЧИСТОГО ТИТАНА, ПОДВЕРЖЕННОГО РАЗЛИЧНОМУ МЕХАНИКО-ТЕРМИЧЕСКОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Н.В. Камышанченко[*)], **И.С. Никулин** [*)], **Д.П. Кузнецов** [*)], **М.С. Кунгурцев** [*)], **И.М. Неклюдов**[**)], **О.И. Волчок**[**)]

[*)]Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308015, Россия, e-mail: kamysh@bsu.edu.ru
[**)] ННЦ «Харьковский физико-технический институт»
ул.Академическая, 1, г.Харьков, 61108, Украина

Анализируются результаты воздействия горячей пластической деформации, закалки от высоких температур и волочения при криогенных (-196°C) температурах на механические свойства титана марки ВТ1-0.

Ключевые слова: титан, двойникование, твердость, дислокации.

1. Введение. Механические свойства титана в большей степени определяются присутствующими в нём фазами, а также наличием примесей. Основной целью легирования (добавления примесей) титановых сплавов является повышение прочности и жаропрочности. Физико-механические свойства нелегированного титана, в отличие от титановых сплавов, трудно поддаются управлению посредством воздействия на него существующими механико-термическими режимами.

Высокая пластичность титана по сравнению с другими металлами, имеющими ГПУ-решетку (Zn, Mg, Cd), объясняется большим количеством систем скольжения.

Чистый титан обладает целым рядом физико-механических свойств, которые не позволяют применять его во многих конструкционных сооружениях. Например, титан обладает плохим сопротивлением ползучести, величина которого зависит от температуры. От температуры зависит не только сопротивление ползучести, но и пределы прочности, текучести, усталости, твердости и др.

Титан относится к числу химически активных металлов, что затрудняет и удорожает производство из него изделий. При технических и эксплуатационных нагревах, особенно выше 700°C, необходимо принимать меры для защиты титана от окисления и газонасыщения. Однако, титан хорошо обрабатывается давлением и прокаткой в горячем состоянии и удовлетворительно – в холодном, что делает процесс изготовления деталей экономически и технологически рациональным.

Несмотря на достигнутые успехи в понимании влияния на механические свойства чистого титана процесса эволюции его микроструктуры, получение устойчивого структурного состояния остаётся нерешённой проблемой.

Выбор титана в нашей работе в качестве материала исследования обусловлен его большой практической значимостью, а также необходимостью поиска путей улучшения его прочностных свойств. В работе приведены результаты изучения влияния интенсивной горячей прокатки и последующих неполного и полного отжигов, закалки от высоких температур, низкотемпературного (-196°C) волочения на микроструктуру и механические свойства технически чистого титана марки ВТ1-0.

2. Материал, приборы и оборудование эксперимента. Для исследования был выбран технически чистый титан марки ВТ1-0, химический состав которого представлен в табл. 1.

Таблица 1

№ пп	Химический состав, % ——— Вид	H	C	N	O	Fe	Al	Ni	Mg	Cr	Cu
1	Допустимый процент в стадии поставки	0,01	0,07	0,04	0,20	0,25	0,06	0,019	0,049	0,034	0,025
2	После горячей прокатки	0,0015	0,005	0,01	0,06	0,03	0,05	0,01	0,05	0,024	0,015

Исследованию подвергались образцы титана, прошедшие следующие виды обработки:

1) горячая прокатка при 500°C до величины с относительной остаточной деформацией ε = (75-87-93)%;

2) закалка от температур 1100°C и 1300°C в воде при 20°C;

3) деформация волочением при -196°C.

Горячая прокатка осуществлялась на прокатном стане ДУО с обжатием за проход 0,2мм(15-20%). В табл. 2 приведены усредненные величины зерна после горячей прокатки и неполного отжига.

Таблица 2

№ пп	Размер зерна, мкм	В состоянии поставки	Степень деформации ———		
			93	87	75
1	Средний размер	85,32	4,32	5,31	7,04
2	Минимальный размер	32,83	1,53	1,04	2,32
3	Максимальный размер	149,0	7,89	7,87	10,01
4	Среднеквадратичное отклонение	33,8	1,43	1,63	1,83

Из прокатанной полосы электроискровым способом на установке «Sodick AQ 300L» вдоль направления прокатки вырезались образцы, которые отжигались в вакууме 1Па в течение 1 часа при температуре 550°C (партия 1) и 700°C (партия 2).

Перед исследованием с помощью оптического микроскопа «OLYMPUS G71» образцы предварительно механически полировались и подвергались электрополировке в электролите (5мл perchloric кислотный и метанол на 95 мл) при напряжении U=30V и температуре -40°C. Затем образцы протравливались в растворе, содержащем 1 мл HNO_3, 2 мл HF и 40 мл H_2O. Зернограничные распределения в прокатанных образцах определялись с помощью EBSD анализа на растровом электронном микроскопе с использованием программы «OIM Analysis 5.2».

Деформация титана волочением проводилась по схеме «осадка-выдавливание-волочение». Осадку и выдавливание проводили при 530°C, после чего пруток волочили при 20°C до степени истинной деформации $\varepsilon = 3{,}2$. Дальнейшая деформация волочением осуществлялась до различных степеней деформации ε при -196°C в среде жидкого азота. Волочение в криогенных условиях проводили на специальной установке, описанной в [1]. На поперечных шлифах полученных проволочных образцов с помощью твердомера «DM8B» с автоматической системой анализа изображения измерялась микротвердость прокатанных и закаленных образцов. Рентгеноструктурный анализ осуществлялся на рентгеновском спектрометре «ARLX'TRA».

Рентгеноструктурный анализ показал, что титан ВТ1-0 в состоянии поставки после горячей прокатки на разные степени остаточной деформации после закалки от 1100°C и 1300°C в воде 20°C представляет собой стабильную α-модификацию, имеющую ГПУ-решетку.

Механические испытания на растяжение при комнатной температуре проводили на «INSTRON 5882» со скоростью нагружения 1,5 мм/мин.

Механические двойники в структуре титановых образцов создавали концентрированным напряжением нагрузкой на индентор микротвердомера «DM-8B» по плоскости (0001). При этом ориентация кристаллической решётки определялась при помощи растрового электронного микроскопа «Quanta 2003D» и методики EBSD-анализа.

Исследования протекания микроструктурных превращений в титане, отражающих его механические изменения в процессе индентирования, были проведены методом акустической эмиссии [2,3].

3. Результаты эксперимента. Обсуждение.

1. Горячая прокатка, в зависимости от степени обжатия, заметно влияет на размеры зерна (табл.2), что в свою очередь приводит к изменению механизмов пластической деформации. Известно, что склонность к образованию двойников значительно уменьшается с уменьшением размеров зерна. Субструктура исследуемого титана формировалась в процессе пластической деформации прокаткой на различную степень. При небольших обжатиях (до $\sim 40\%$) характерен низкий уровень сдвига, и небольшая степень межатомного воздействия способствует образованию механических двойников [4], т.е. основным механизмом при данной пластической деформации является двойникование. С увеличением деформации обжатием (до $\sim 60\%$) количество выходов механических двойников уменьшается, и дислокационное скольжение будет основным механизмом пластической деформации. При обжатии свыше 90% на поверхности зерна механических двойников обнаруживаются, хотя и достаточно трудно, многочисленные полосы сдвига [5].

Поскольку двойникованию в металлических кристаллах, как правило, предшествует скольжение, которое сопровождает двойникование на всех этапах деформирования, и в объёме происходит непрерывное искажение исходной структуры. Поэтому невозможно обеспечить локальную идентичность условий развития двойниковых прослоек, поскольку размеры их не будут устойчивыми и воспроизводимыми характеристиками деформации.

Под действием концентрированного напряжения в кристалле зарождаются упругие двойники, часть из которых выходят на поверхность и сохраняются в виде остаточных механических двойников (рис.1). Высокая чувствительность двойниковых границ к условиям нагружения и меняющаяся в процессе пластической деформации структура кристаллической решётки делает развитие каждого отдельного двойника невоспроизводимым во всех деталях явлением. Кроме того, уникальность зарождения и развития каждого двой-

ника, очевидно, обусловлена особенностями взаимодействия движущихся дислокаций с дефектами кристаллической решетки, распределение которых в объёме непредсказуемо и заранее неизвестно. Другими словами, определение мест появления двойников заранее предсказать невозможно. Их зарождение активизируется случайными концентраторами напряжений, роль которых выполняют скрытые внутренние дефекты структуры.

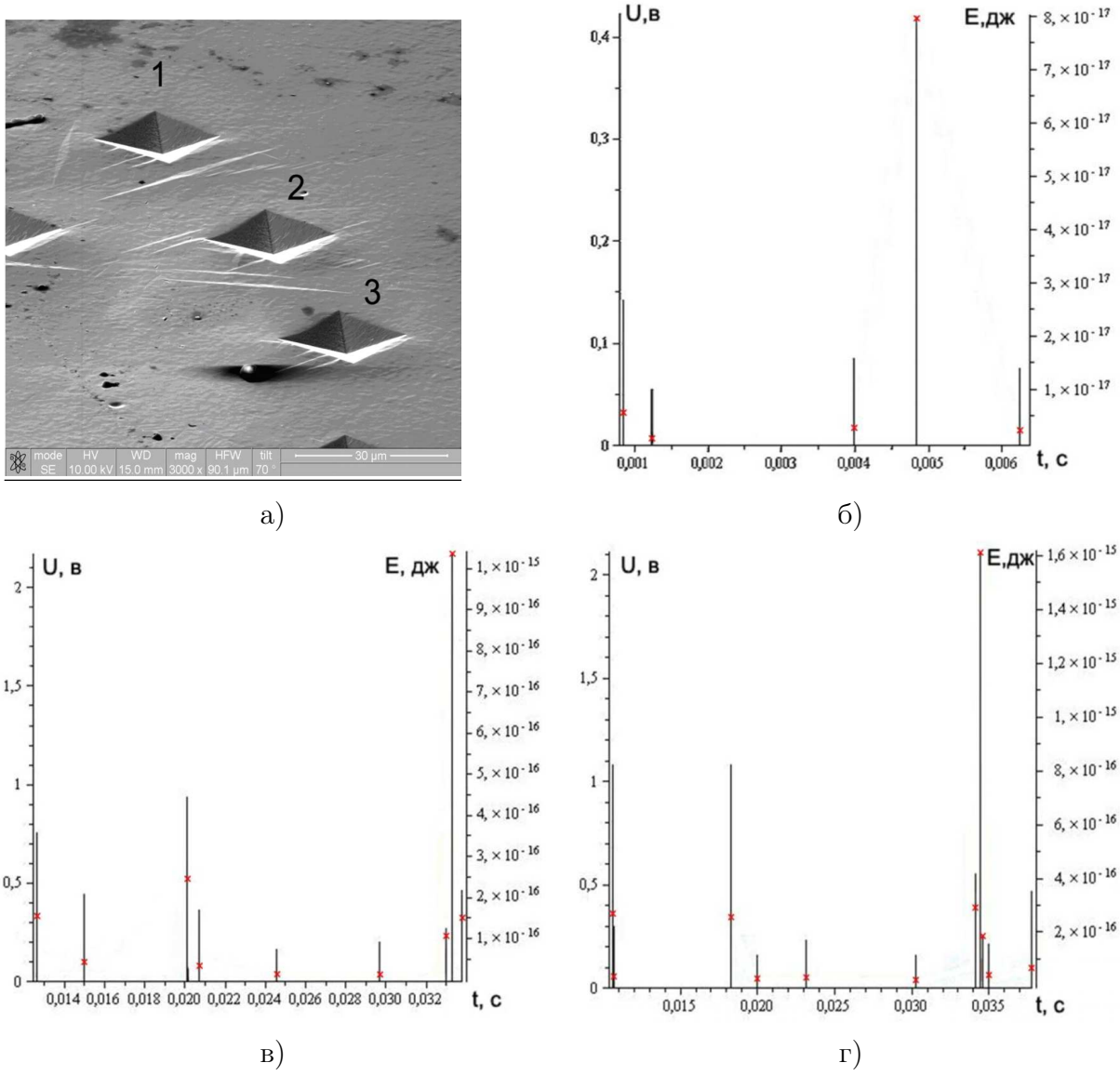


Рис. 1. Развитие двойникующих процессов в титане после горячей прокатки с обжатием ∼75% и отжига при 700°C под действием концентрированного напряжения нагрузкой на индентор в 25 г, зафиксированных АЭ в ячейке 1 – б), в ячейке 2 – в) и в ячейке 3 – г); × – обозначение энергии, затраченной на зарождение дефектов в данный момент времени при соответствующей величине сигнала АЭ.

В рассмотренном эксперименте концентрированное напряжение создавалось индентором с нагрузкой 25 г в плоскости (0001). Количество образовавшихся механических двойников в близко расположенных на поверхности образца отпечатков различно. Они отличаются расположением вокруг отпечатка и величиной импульсов АЭ.

Повышение внешней нагрузки на индентор приводит к увеличению количества линейных размеров двойников. Увеличивается также время протекания процессов двойникования в объёме кристалла и возрастают относительные величины выделяемой в этих процессах суммарной энергии.

Изменение линейных размеров двойников даже при одинаковых нагрузках на индентор в разных местах поверхности образца в плоскости (0001) происходит неравномерно, и прослеживается только стохастическая связь.

Образование и развитие двойников в кристалле при пластической деформации отражает каждое состояние дефектной структуры и её эволюцию. Величина плотности дефектов и характер их распределения является основой деформационного упрочнения. Изменение структурного состояния образца в процессе пластического течения соответствует конкретным механизмам деформационного упрочнения.

Другими словами, в прокатанном титане основное влияние на прочностные свойства оказывают двойники деформации, плотность которых зависит от степени обжатия материала. В металлических кристаллах плотность двойникующих дислокаций на границах прослоек может достигать $\sim 10^5 - 10^6 \text{см}^{-1}$. Способность границ двойников перемещаться в кристалле под действием внешних механических напряжений или при повышенных температурах приводит к локальным понижениям прочностных свойств материала и, в целом, к понижению его прочностных свойств.

Введение дислокационного леса и других несовершенств (знакопеременным нагружением, легированием, термоциклированием, закалкой и другими способами) увеличивает количество стопоров, изменяет их периодичность и мощность. Пробег двойникующих дислокаций с ростом плотности дефектов сокращается, что способствует повышению прочностных свойств.

Наличие зуба текучести (рис. 2) в образцах, прошедших предварительную горячую прокатку с $\varepsilon > 80\%$, обусловлено реализацией процесса закрепления дислокаций точечными дефектами.

Следует отметить, что степень остроты зуба текучести возрастает с уменьшением величины зерна (рис. 2, табл. 2). Связь текучести с поведением дислокаций в процессе действия приложенного напряжения была впервые рассмотрена Коттреллом и др., доказавшими, что пластическая деформация возникает в результате освобождения дислокаций от блокирующих атмосфер Коттрелла [6,7].

Известна способность границ двойников перемещаться в кристалле под действием механических напряжений, что приводит к локальным понижениям прочности материала. Кинетика этих процессов зависит от уровня внутренних напряжений. Величина механических параметров процессов двойникования в образце существенно меньше предела текучести деформированного образца. Поэтому основным механизмом деформирования, приводящего к снятию зуба текучести, является дислокационное скольжение.

С увеличением размера зерна ($\varepsilon < 80\%$) освобождающиеся от атмосфер Коттрелла дислокации перемещаются к границам зерна и скапливаются вблизи неё. Возникающая при этом концентрация напряжений воздействует на дислокационные источники в соседнем зерне, и в нём тоже происходит освобождение дислокаций. Последовательные освобождения дислокаций приводят к развитию процесса текучести [7].

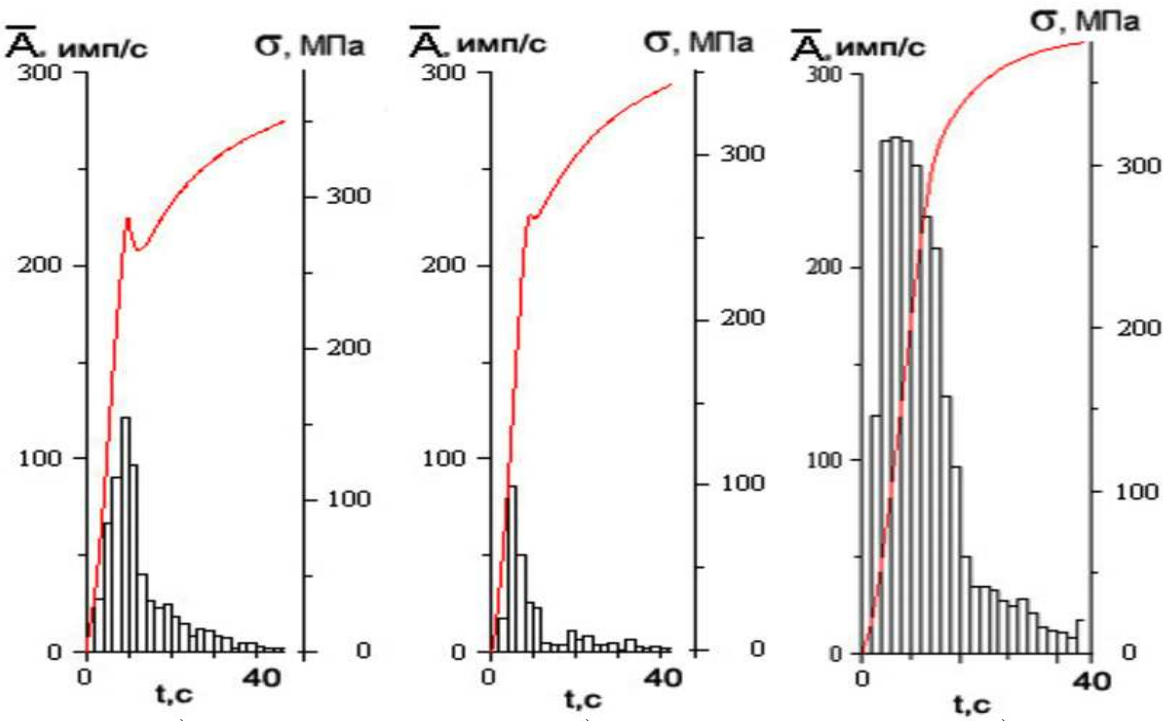


Рис. 2. Кривые деформации при испытаниях на растяжение титана ВТ1-0 и зависимости активности АЭ (Ā, имп/с) после горячей прокатки на разные степени и последующего отжига при 550°С: а) – ε=93%; б) – ε=87%; В) – ε=75%.

Характерной особенностью созданной микроструктуры после горячей прокатки является однородность на протяжении всего поперечного сечения прокатанного титана, а величина микротвердости зависит от степени пластической деформации (рис. 3а).

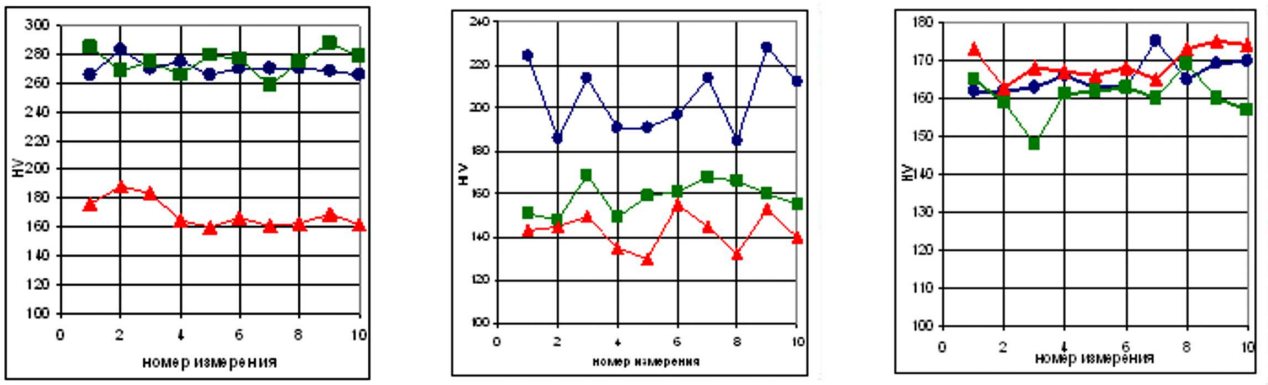
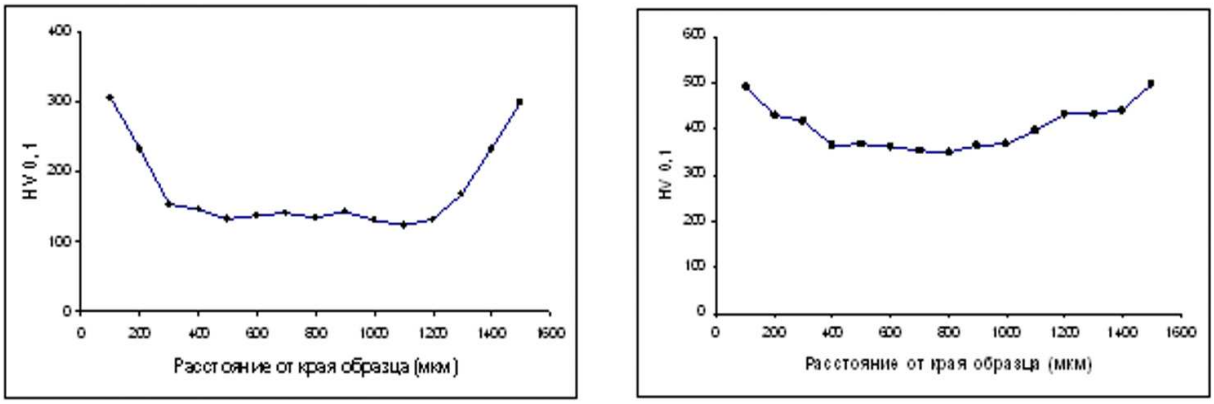


Рис. 3. Микротвердость титана, прошедшего горячую прокатку – а); неполный при 550°С – б); полный отжиг при 700°С отжиг – в). Степень деформации: • – ε = 93%, ■ – ε = 87%, ▲ – ε = 75%.

Неполный стабилизирующий после прокатки отжиг, нарушив однородность кристаллического состояния титана, влияет на величину микротвердости структуры, сделав её одновременно зависимой от степени обжатия (рис. 3б).

Рекристаллизационный полный отжиг стабилизирует однородность кристаллического состояния титана, что приводит к равномерности микротвердости структуры, усилив независимость её от степени обжатия (рис. 3в). Следовательно, структура технически чистого титана, прошедшего механико-термическую обработку прокаткой с последующим отжигом, зависит от температуры отжига и степени обжатия и является неоднородной. Поэтому такой структурно неоднородный материал требует дополнительной термомеханической обработки.

2. Текстура образца в процессе закалки от высокой температуры отличается неоднородностью: наружная часть представляет собой химическое соединение титана с кислородом (TiO_2) и насыщена соединением титана с азотом (TiN). Последующие слои, плавно переходящие в глубь образца, отличаются структурным строением зёрен от наружной части титана. И если в прокатанных образцах механические свойства зависели от степени деформации, то в закалённых образцах, в основном, – от скорости закалки (рис. 4).



а) б)

Рис. 4. Микротвердость титана: а) закалка от 1100°С, б) закалка от 1300°С.

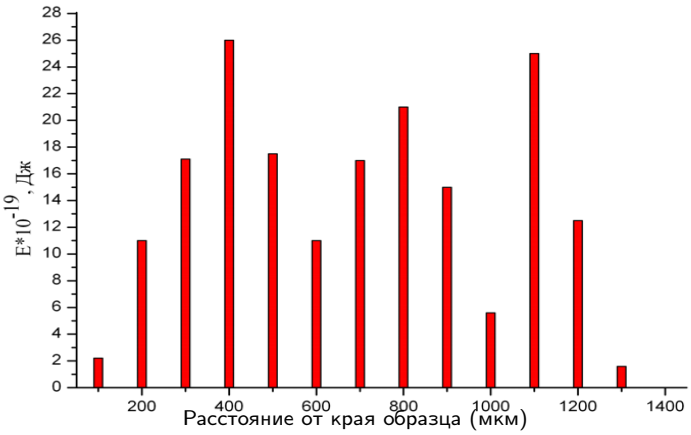
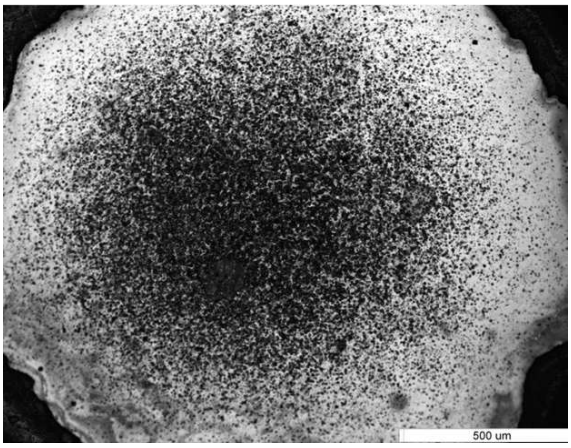


Рис. 5. Развитие АЭ в закаленном от 1100°С титана, образованной в процессе индентирования вдоль поперечного сечения образца.

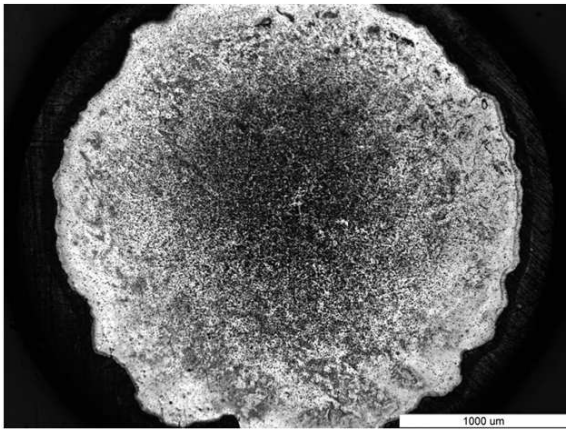
АЭ в наружном слое отличается низкой активностью и интенсивностью, и только при переходе в глубь образца с незначительным насыщением N и O_2. Наблюдается активизация АЭ. Повышенное значение микротвердости в этих слоях в сравнении с микротвердостью прокатанных образцов связано, очевидно, с повышением плотности закалочных дефектов [8], величина которой может достигать $10^{-11} - 10^{-12}$см$^{-1}$.

3. Применение больших пластических деформаций является одним из технологических приемов создания субмикроскопических и нанокристаллических структур в металлах. Следствием больших деформаций в кристаллических материалах является фрагментация зерен. Существенным дополнительным фактором оптимизации процессов фрагментации структуры являются низкотемпературные (криогенные) условия деформации [9].

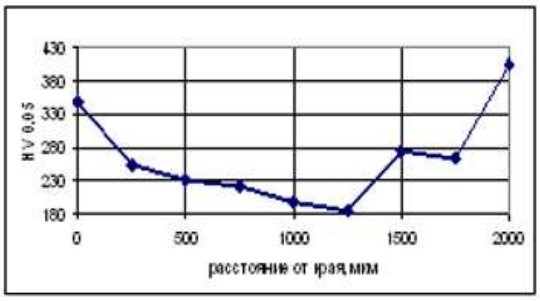
Как следует из полученных волочением при -196°C результатов (рис. 6), структура вдоль поперечной плоскости образца образуется неоднородной, что оказывает влияние на величину и характер распределения микротвердости по сечению образца.



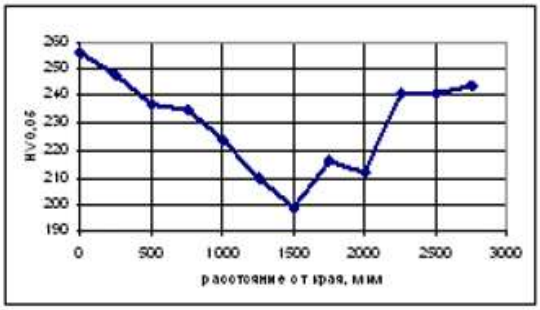
а)



б)



в)



г)

Рис. 6. Изменение микротвёрдости титана вдоль диаметра образца (в, г) после низкотемпературного волочения при остаточной деформации волочением: а) – $\varepsilon = 47\%$; б) – $\varepsilon = 20\%$.

Увеличение степени деформации приводит к заметному изменению микротвердости по краям прутка (рис. 6в). С приближением к центральной части прутка происходит спад микротвердости, и в центральной части величина микротвердости выравнивается. При меньшей степени деформации величина микротвердости по краям образца будет меньше значений микротвердости с большей деформацией (рис. 6в,6г). Относительный спад

микротвердости образца (рис. 6а) находится в приделах 53% и 23% относительного спада образца при меньшей деформации (рис. 6б). Следовательно, можно предположить, что имеется бóльшая неоднородность структуры в образцах, подвергнутых бóльшей деформации. В отличие от состояния микротвердости в прокатанных образцах, где микротвердость остается практически однородной вдоль поперечного сечения образца, в образцах после волочения характер изменения микротвердости сравним с характером изменения микротвердости в закалённых образцах.

При низкотемпературной деформации усиливается роль двойникования. Уже при небольших степенях деформации двойникованию подвергаются практически все зерна поликристаллического агрегата. Этому благоприятствуют многообразие систем двойникования, что в свою очередь способствует измельчению зерна. Дополнительная фрагментация зёрен происходит также за счёт очень развитого вторичного и третичного двойникования, пересечения двойников, при взаимодействии двойников с границами зерен. С уменьшением размеров зерна в объёме кристаллита происходит насыщение плотности двойников с одновременным увеличением прочностных характеристик. Это подтверждается в данном эксперименте увеличением микротвердости в сравнении с экспериментальными данными в бразце титана, прошедшем прокатку и полный отжиг. Таким образом, в структурном отношении границы двойников, полученные криомеханическим методом, будут отличаться от границ зёрен в титане, полученном интенсивной пластической деформацией.

При низких температурах, в условиях ориентационного запрета для скольжения, двойникование титана будет начинаться в упругой стадии. Скольжение не будет играть главную роль в пластической деформации в процессе волочения. Интенсивное измельчение кристаллов с одновременным увеличением плотности упругих двойников приводит для концентрации внутренних напряжений на границах раздела, к созданию условий для проявления упругих свойств границ и к интенсивному проскальзыванию зёрен. В процессе волочения заготовка деформируется и поперечное сечение её изменяется, принимая форму и размеры наименьшего сечения канала. Интенсивная пластическая деформация способствует увеличению плотности дефектов кристаллической структуры, и в первую очередь росту плотности дислокаций в приповерхностных слоях. По мере развития деформации, вновь образованные дислокации взаимодействуют с существующими, и структура кристалла проходит этап формирования фрагментарной структуры. Низкая подвижность дислокаций обуславливает высокие прочностные характеристики, в том числе и твёрдость.

4. Выводы.

1. Технически чистый титан, прошедший интенсивную прокатку и последующий отжиг, является структурно неоднородным материалом, что делает его зависимым от внешних энергетических воздействий.

2. Дефектная структура закалённого от высоких температур титана отличается неоднородностью структуры в объёме кристалла, и, в отличие от предыдущей МТО, в центральной части образца образуется более устойчивая в определённом температурном интервале дефектная структура.

3. Созданная волочением структура отличается неоднородностью механических характеристик по сечению образца, что не позволяет утверждать об её зависимости от внешних энергетических воздействий.

Исследования выполнены с использованием оборудования Центра коллективного пользования БелГУ.

Литература

1. Волчок О.И., Неклюдов И.М., Стародубов Я.Д., Черный Б.П. // МиТОМ. – 1993. – 28;12. – С.28.

2. Бунина Н.А. Исследованием пластической деформации металлов методом акустической эмиссии / Н.А. Бунина. – Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1990. – 156 с.

3. Семашко Н.А. Акустическая эмиссия в экспериментальном материаловедении / Н.А. Семашко, В.Н. Шпорт, А.Н. Марьин, А.Н. Пекарш, В.Н. Муравьев, А.Н. Евстигнеев. — М.: Машиностроение, 2002. – 240 с.

4. Christian J.W., Mahajan S. // Prog. Mater. Sci. – 1995. – 39. – P.51-157.

5. Бернштейн М.Л. Механические свойства металлов / М.Л. Бернштейн, В.А. Займовский. — М.: Металлургия, 1979. — 320 с.

6. Cottrell A.N., Bieby B.A. // Proc. Phys. Soc. Loud. – 1949. – 62. – P.19-28.

7. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел / Т. Екобори; пер. с англ. и ред. В.С. Ивановой. — М.: Металлургия, 1971. – 264 с.

8. Кимура Г., Маддин Р. Влияние закаленных вакансий на механические свойства металлов и сплавов // Дефекты в закаленных металлах / под ред. А.А. Цветаева. — М.: Атомиздат, 1969. – 384 с.

9. Тихоновский М.А., Кисляк И.Ф., Волчок О.И., Камышанченко Н.В. и др. Физико-механические свойства титана после интенсивной пластической деформации волочением в криогенных (77K) условиях // Физика и техника высоких давлений. – 2008.

SOME REGULARITIES OF THE MICROHARDNESS VARIING IN CP-TITANIUM UNDER VARIOUS MECHANICAL AND THERMAL STRESSES

N.V. Kamyshanchenko[*)], I.S. Nikulin[*)], D.P. Kuznetsov[*)], M.S. Kungurtsev[*)], I.M. Neklyudov[**)], O.I. Volchok[**)]

[*)]Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail:kamysh@bsu.edu.ru
[**)] National Science Center «Kharkov Institute of Physics and Technology»
Akademicheskaya St., 1, Kharkov, 61108, Ukraine

Results concerning the influence of the hot plastic deformation, the hardening by high temperatures and the cryogenic temperatures drawing (at -196°C) on mechancal properties of titanium VT1-0 are analyzed.

Key words: titanium, twinning, hardness, dislocations.

УДК 539.216; 539.22; 538.91-405; 548; 620.18

ПОЛУЧЕНИЕ КАРБОНАТ-ЗАМЕЩЁННОГО ГИДРОКСИЛАПАТИТА ИЗ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ

Е.А. Корнеева

Белгородский государственный университет
НОиИЦ "Наноструктурные материалы и нанотехнологии",
ул.Королева, 2а, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: ek-ko87@yandex.ru

Рассматривается способ получения карбонат-замещённого гидроксилапатита путём выдержки порошка в водных растворах, содержащих карбонатные группы. Показано, что такой способ приводит к получению карбонизированного гидроксилапатита смешанного АВ-типа и карбоната кальция. Полученные образцы исследовались методами термогравиметрии, ИК-спектроскопии, масс-спектрометрии и рентгеноструктурного анализа. Полученные результаты показали, что содержание карбонатов изменяется со временем выдержки в карбонизированном растворе, о чём свидетельствует изменение параметров кристаллической решетки.

Ключевые слова: гидроксилапатит, рентгено-структурный анализ, карбонат-замещённый гидроксилапатит, ИК-спектроскопия.

1. Введение. В настоящее время гидроксилапатит $Ca_{10}(PO_4)_6OH_2$ (ГА) широко используется в медицине в качестве заменяющего материала для поврежденных зубов и костей [1]. Многочисленные исследования подтверждают его биологическую совместимость с костной тканью, а также близкие показатели физических и химических свойств. Особый интерес представляет карбонат-замещённый гидроксилапатит (КГА), т. к. содержание групп CO_3^{2-} в твёрдых тканях имеют наибольшее значение по сравнению с другими группами анионного замещения [2]. Различают два основных типа замещения карбонатными группами: А- и В-тип, а также смешанный АВ-тип замещения. При В-типе замещения CO_3^{2-}-группы замещают PO_4^{3-}-группы по формуле $Ca_{10-x}(PO_4)_{6-x}(CO_3)_x(OH)_{2-x}$, что сопровождается образованием вакансии по кальцию и небольшим изменением параметров решетки: a=9,309 Å и c=6,8927 Å. При А-типе замещения карбонатные группы замещают OH^- группы по формуле $Ca_{10}(PO_4)_6(CO_3)_x(OH)_{2-2x}$, что приводит к расширению элементарной ячейки решётки вдоль оси a и небольшому сжатию вдоль оси c, кристаллическая решётка преобразуется из гексагональной в моноклинную с параметрами решётки: a=9,529 Å, b=19,10 Å и c=6,86 Å.

Существует несколько способов получения КГА. К ним относятся добавление соответствующих компонентов при синтезе ГА или отжиг в атмосфере углерода. В настоящей работе исследуется получение КГА путём выдержки образца в растворе, содержащем карбонатные группы.

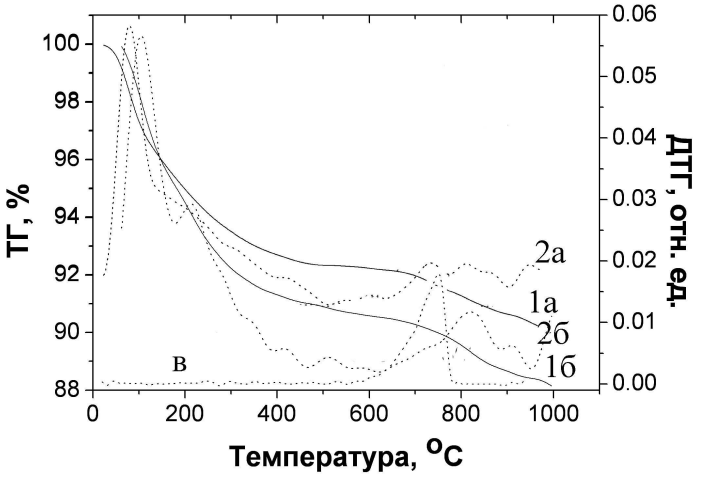


Рис. 1. Термогравиметрия для образцов, выдерживавшихся в карбонизированном растворе: 4 мес. (1а,2а), 6 мес. (1б,2б) и образца $CaCO_3$ (1в).

2. Материалы и методы. В работе исследовались порошки ГА, полученные методом осаждения из водных растворов по следующей реакции [3]:

$$10Ca(NO_3)_2 \ + \ 6(NH_4)_2HPO_4 \ + \ 8NH_4OH \ \rightarrow$$
$$\rightarrow Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2 \ + \ 20NH_4NO_3 \ + \ 6H_2O\,.$$

Реакция проходила при комнатной температуре. Часть порошка после синтеза оставляли в маточном растворе на несколько месяцев. Оставшаяся часть ГА была извлекалась из маточного раствора и подвергалась 4- кратной промывке в дистиллированной воде. Полученные порошки сушили при комнатной температуре в течение трёх суток, после чего их просеивали через 100 мкм сито для получения бóльшей мелкодисперсности. Затем порошки помещали в раствор, содержащий карбонатные группы (концентрация CO_2 составляла примерно 5-10 г/моль). В течение 6-ти месяцев через определенные промежутки времени из раствора извлекали пробы для исследований. Дополнительно был проведен синтез ГА при температуре 80°C, который был также подвержен вышеуказанной обработке. Полученные образцы исследовали методами ИК-спектроскопии, масс-спектрометрии, термогравиметрии, а также рентгеноструктурного анализа.

3. Результаты и обсуждение. Для определения состава был проведен термогравиметрический анализ тех образцов, которые выдерживались в маточном растворе в течение 4-х и 6-и месяцев (рис. 1).

Первый пик на кривых скорости потери массы для обоих образцов наблюдался при температуре 100°C, что связано с бóльшим содержанием воды в образцах. Далее регистрировались пики в температурном диапазоне 650 – 800°C.

При сравнении с кривой скорости потери массы для карбоната кальция $CaCO_3$ (рис. 1в) можно говорить о присутствии этой фазы в исследуемых образцах. Небольшое отклонение кривых скорости потери массы для исследованных образцов и образца $CaCO_3$ свидетельствует о возможности выделения карбонатных групп не только из карбоната кальция и поверхности образца, но также из кристаллической решетки ГА.

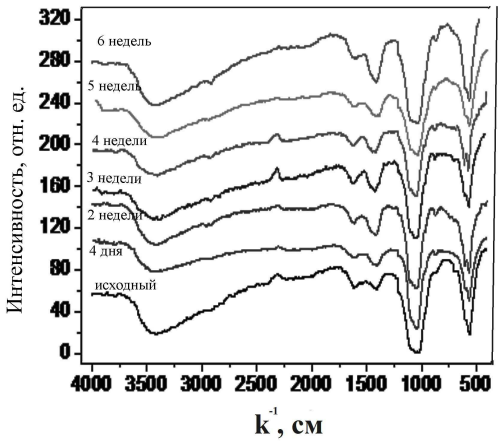


Рис. 2. ИК-спектры для образцов с различной временно́й выдержкой, синтезированных при комнатной температуре.

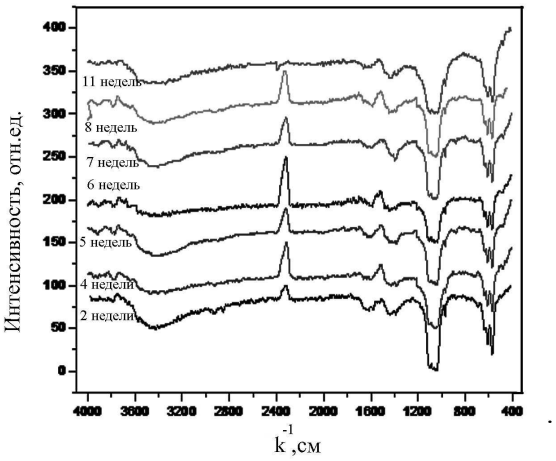


Рис. 3. ИК-спектры для образцов с различной временно́й выдержкой, синтезированных при температуре 80°C.

Для определения изменения содержания карбонатных групп были сняты ИК-спектры от образцов с различной временно́й выдержкой в карбонатном растворе, синтезированных при комнатной температуре и при температуре 80°C (рис. 2 и рис. 3 соответственно).

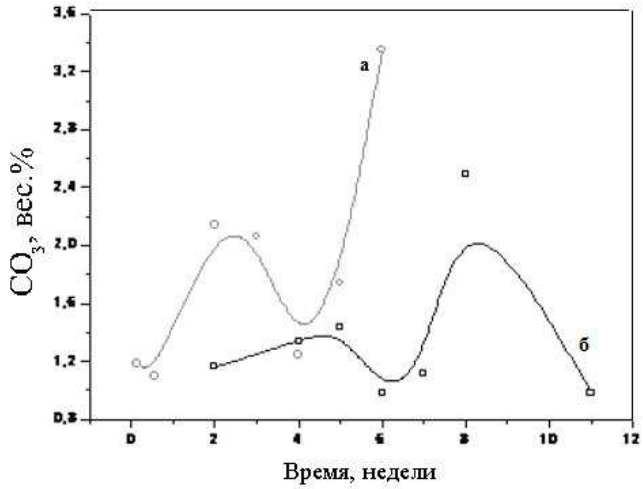


Рис. 4. Изменение концентрации карбонатных групп
в зависимости от времени выдержки образцов в карбонизированном растворе.

На всех ИК-спектрах отмечается наличие полос пропускания, характерных для карбонатных групп в диапазоне волновых чисел 1380-1550 $см^{-1}$ и при 875 $см^{-1}$. Слабое разделение полос на ИК-спектрах свидетельствует о смешанном типе замещения карбонатными

группами. Для ко азцах были
подсчитаны площ использова-
нием ИК-спектра

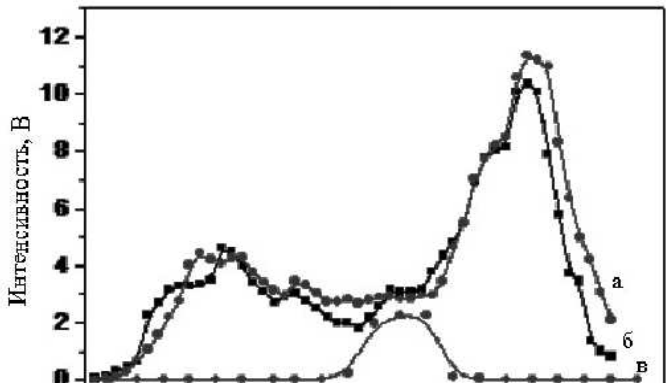


Рис. 5. Масс-спектры образца, выдерживавшегося в карбонизированном растворе: 3 недели (а), исходного образца (б) и образца $CaCO_3$ (в).

На рис. 4 показано изменение содержания карбонатных групп в зависимости от времени выдержки в карбонизированном растворе (рис. 4а и 4б – образцы, выдерживавшиеся в растворе в течение 4-х и 6-и месяцев соответственно). На обеих кривых характер зависимости весьма схож: вначале отмечается увеличение концентрации, через определённое время выдержки, затем незначительный спад, после которого снова начинается рост. Наблюдаемый сдвиг дного образца.

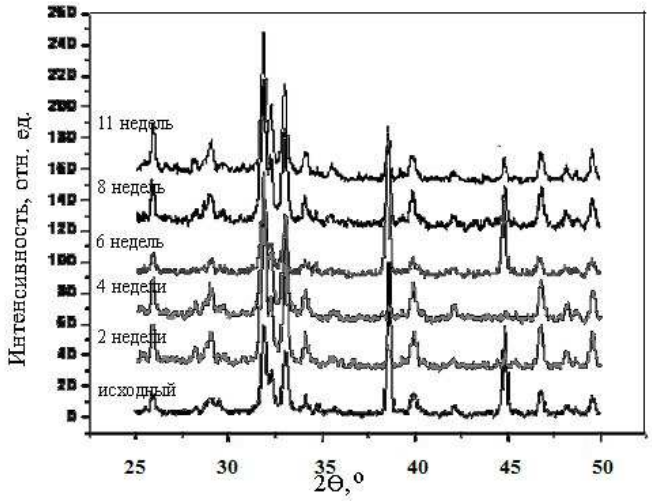


Рис. 6. Рентгенограммы образцов, синтезированных при 80°C с различной временно́й выдержкой в карбонизированном растворе.

Для определения местонахождения карбонатных групп был проведён масс-спектрометрический анализ исходного образца, выдерживавшегося в карбонизированном растворе 3 недели, а также образца $CaCO_3$ (рис. 5). На рисунке представлен спектр выделения 44-й массы. Проведенные исследования показывают, что интенсивное выделение 44-й массы приходится на температурный интервал 750-900°C, в то время как разложение $CaCO_3$ – на интервал 500-700°C. Отсюда, можно предположить, что карбонатные группы находятся не только на поверхности частиц, но и внутри кристаллической решётки.

Более существенным доказательством этого предположения является изменение параметров решётки ГА. Для этого был проведён рентгеноструктурный анализ ГА, синтезированного і яет получить высококриста ля (рис. 6).

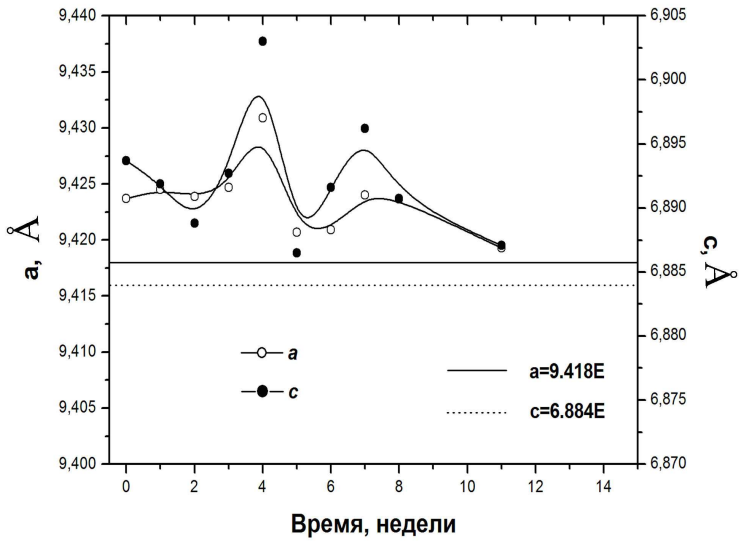


Рис. 7. Изменение параметров кристаллической решетки ГА
в зависимости от времени выдержки в карбонизированном растворе.

Благодаря полученным результатам рентгено-структурного анализа, была определена зависимость изменения параметров кристаллической решетки a и c от времени выдержки в карбонизированном растворе (рис. 7). На рисунке горизонтальными линиями обозначены параметры решётки стехиометрического ГА. Зависимость хорошо коррелирует с ИК-спектрами, полученными ранее. Так, минимум концентрации карбонатных групп и минимальное значение параметров решётки приходится на 6 недель выдержки в карбонизированной воде.

Для того чтобы определить присутствие карбоната в качестве отдельной фазы, были взяты образцы после 1-й недели, 4-х и 6-и месяцев выдержки в карбонизированной воде соответственно. Они отжигались при температуре 1000°C, затем проводился рентгеноструктурный анализ (рис. 8).

На полученных рентгенограммах для всех образцов наблюдаются пики, характерные для $CaCO_3$, а также имеются линии оксида кальция CaO – результата разложения $CaCO_3$. Таким образом, в процессе выдержки карбонатные группы в образцах присутствуют ещё и в виде отдельной фазы.

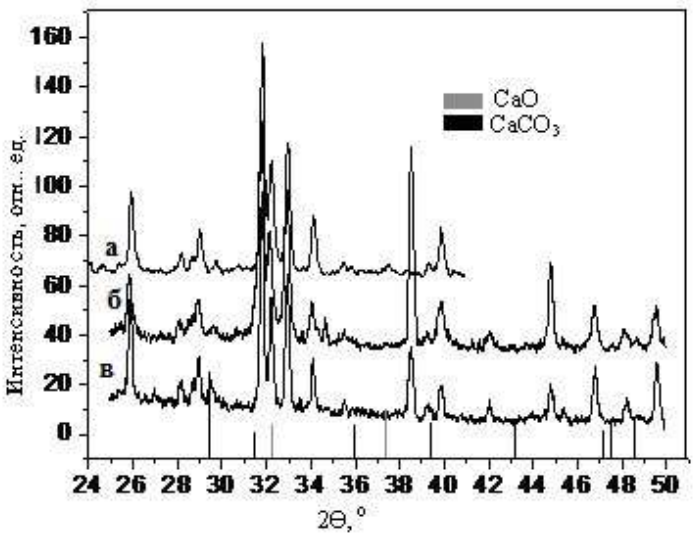


Рис. 8. Рентгенограммы для образцов, выдерживавшихся в карбонизированном растворе: 1 нед. (а), 4 мес. (б) и 6 мес. (в).

Выводы. В работе показана возможность получения карбонат замещённого ГА из водных растворов, содержащих карбонатные группы. Эффективность карбонизации зависит от свойств исходного ГА и времени выдержки в растворе.

Согласно данным рентгено-структурного анализа, термогравиметрии и масс-спектрометрии, в процессе карбонизации образцов образуется небольшое количество карбоната кальция, присутствующего в виде примеси. ГА после выдержки в карбонизированном растворе имеет смешанный АВ-тип карбонатного замещения.

Таким образом, исследованный метод получения замещённого ГА открывает перспективы для получения КГА с заданным процентным содержанием карбонатных групп в кристаллической решётке ГА.

Литература

1. Каназава Т. Неорганические фосфатные материалы / Т. Каназава. – К.: Наукова думка, 1998. – 298 с.

2. Fleet M.E., Liu X. // Biomaterials. – 2005. – 26. – P.7548-7554.

3. Jarcho M., Bolen C.H., Thomas M.B., Bobick J., Kay J.F., Doremus R.H. // J.Mater. Sci. – 1976. – 11. – P.2027-2035.

4. Landi E., Tampieri A., Celotti G., Vichi L., Sandri M. // Biomaterials. – 2004. – 25. – P.1763-1770.

OBTAINING OF CARBONATE-SUBSTITUTED HYDROXYLAPATITE BY WATER SOLUTIONS

E.A. Korneyeva

Center of nanostructural materials and nanotechnologies of Belgorod State University
Korolev St., 2a, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: ek-ko87@yandex.ru

The method of the carbonate-substituted hydroxylapatite obtaining by the dust soaking in water solutions contaninig carbonate groups was investigated. It was shown that such a method leads to obtaining of the AB-type carbonate-substituted hydroxylapatite and calcium carbonate. The samples were investigated by thermogravimetry, IR-spectroscopy, mass-spectrometry and X-ray diffraction. Obtained results were shown that the concentration of carbonates in hydroxylapatite has been changing during the soaking time. It follows from the changing of lattice constants of hydroxylapatite crystal.

Key words: hydroxylapatite, X-ray diffraction analysis, carbonate-substituted hydroxylapatite, IR-spectroscopy.

УДК 620.1.72:532.783

ДОМЕННАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ НЕМАТИКА В СТРУКТУРЕ Si/НЕМАТИК/ITO

С.И. Кучеев, Ю.С. Тучина

Белгородский государственный университет
ул.Студенческая, 14, г.Белгород 308007, Россия, e-mail: kucheev@bsu.edu.ru

Исследуется доменная переориентация нематика в сендвич-структуре Si/нематик/ITO, индуцированная лазерным излучением. Определены условия возникновения и особенности передвижения границы доменной переориентации нематика. Предложен механизм формирования и движения стенки домена в структуре Si/нематик/ITO. Продемонстрирована запись дифракционной решётки с разрешением порядка 20 линии/мм, а также принципиальная возможность управлять направлением движения границы домена.

Ключевые слова: кремний, нематик, ионы в жидком кристалле.

1. Введение. Жидкокристаллические модуляторы света находят широкое применение в системах обработки и отображения оптической информации. В настоящее время наибольшее распространение получили модуляторы света, основанные на МОП структурах [1]. В таких модуляторах света слой окиси кремния играет роль диэлектрического зеркала. С другой стороны, диэлектрический слой препятствует протеканию процессов переноса и накопления заряда в жидком кристалле. Модуляция поверхностной проводимости кремния осуществляется исключительно электрическим полем электрода. В связи с этим функциональные возможности такого типа жидкокристаллических модуляторов света ограничены. В представленной работе рассматривается структура Si/нематик/прозрачный электрод (ITO), в которой могут протекать зарядовые процессы благодаря непосредственному контакту Si/нематик. Вследствие возможных процессов накопления ионных зарядов и переноса заряда через границу Si/жидкий кристалл (ЖК) функциональные возможности структур подобного рода значительно возрастают. В работе продемонстрирован и исследован электрооптический эффект, возникающий в структуре Si/нематик/ ITO под действием лазерного излучения. Рассмотрены потенциальные возможности использования структуры для обработки оптической информации.

2. Эксперимент. В эксперименте исследовались электрооптические эффекты в структуре Si/нематик/ITO. В качестве подложки использовался монокристаллический кремний n-типа проводимости с удельным сопротивлением порядка 4,5 Ом×см. Поверхность кремния была предварительно протравлена плавиковой кислотой с целью удаления загрязнений и окиси кремния. Верхней референтной подложкой служила стеклянная пластина с плёнкой ITO и полиимидной плёнкой, натёртой в одном направлении для формирования планарной ориентации нематика. Ячейка заправлялась нематическим жидким кристаллом 5CB. Ориентация нематика на поверхности Si специально не задавалась.

В эксперименте было установлено, что при выполнении двух условий, а именно при наличии приложенного переменного напряжения и лазерном облучении, в структуре Si/нематик/ITO, возникает следующий нестационарный электрооптический эффект. В области лазерного пятна на поверхности кремния (стрелка 1) зарождается и расширяется область гомеотропной ориентации нематика (см. рис. 1). Эта область локализована, имеет однородную ориентацию нематика и демонстрирует высокий контраст границы, что позволяет

ниже называть эту область доменом. Стационарные размеры домена после фазы расширения зависят от интенсивности лазерного излучения. Характерная толщина ЖК-слоя, при которой возможно формирование домена, имеет порядок 1 мк.

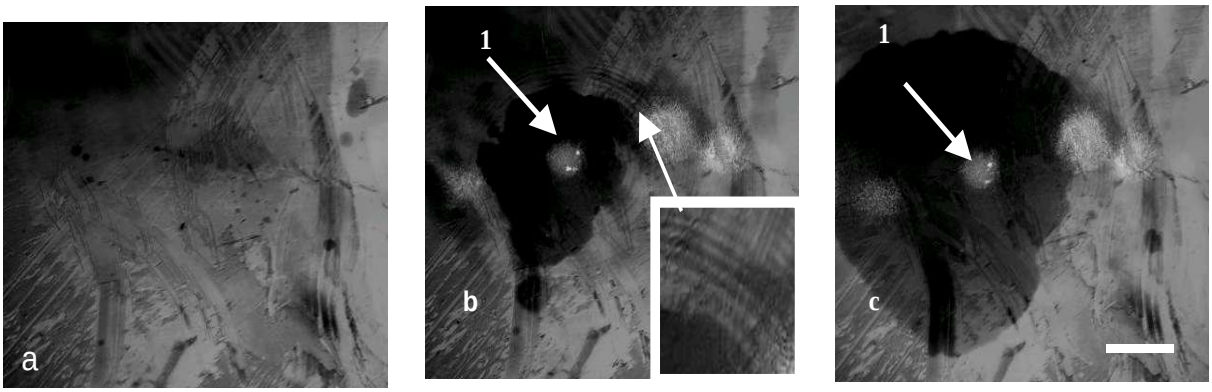


Рис. 1. Доменная переориентация в структуре SI/нематик/ITO, индуцированная лазерным излучением (He- Ne, 0,63; μm). Напряжение 5,5 В. Частота 3×10^3 Гц. Время после включения лазерного луча: b – 2 с; c – 25 с. Масштаб 0,5 мм. Вставка – дифракционная решётка, индуцированная дифрагированным лазерным лучом.

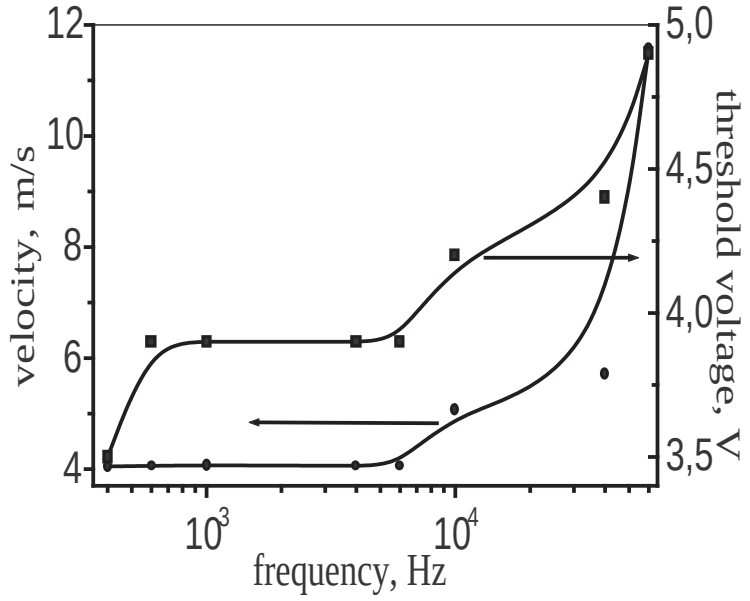


Рис. 2. Типичная зависимость от частоты порогового напряжения появления домена, индуцированного лазерным излучением, и скорости перемещения границы домена.

На рис. 2 представлена зависимость порогового напряжения доменной переориентации от частоты. Как видно, область существования такой переориентации находится в диапазоне $4 \times 10^2 - 6 \times 10^4$ Гц. При частотах, меньше чем 4×10^2 Hz, контраст границы домена сильно снижается. При частотах больше, чем 6×10^4 Hz, пороговое напряжение резко возрастает. Контраст границы домена при этом сохраняется.

Экспериментально установлено, что для возникновения домена интенсивность света должна превышать соответствующее пороговое значение. На рис. 1 хорошо видно, что

место первоначального возникновения домена соответствует лазерному пятну на поверхности кремния (рис. 1b, 1c), т.е. месту с максимальной интенсивностью. Из-за дифракции лазерного луча лазерное пятно окружено дифракционной картиной в виде концентрических колец, имеющих меньшую интенсивность. Благодаря пороговому характеру возникновения доменной переориентации, домены не зарождаются в области дифракционной картины, но при этом в соответствии с распределением интенсивности света в структуре формируется дифракционная решётка (вставка на рис. 1б). Записанная решётка существует до тех пор, пока по области, где она записана, не пройдет фронт домена (рис. 1c). Оценка разрешения записанной дифракционной решётки даёт величину порядка 20 линий/мм.

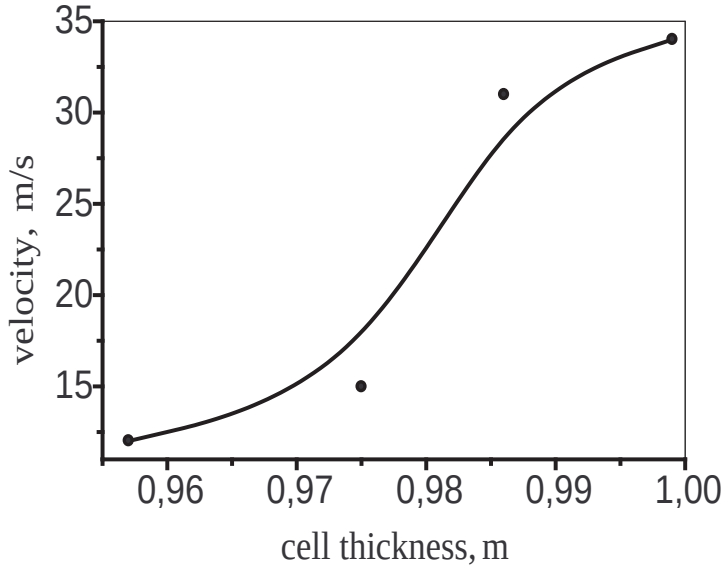


Рис. 3. Зависимость скорости перемещения границы домена от толщины слоя нематика. Напряжение 4 В. Частота 3×10^3 Гц.

Для исследования зависимости скорости перемещения границы домена от толщины ЖК-слоя использовалась ячейка с неоднородной толщиной такого слоя. Контроль толщины ЖК-слоя осуществлялся благодаря имеющимся в ячейке так называемым кольцам Ньютона. На рис. 3 представлена зависимость скорости передвижения границы домена от толщины ЖК-слоя. Из этого графика видно, что с увеличением толщины ЖК-слоя скорость границы домена возрастает.

С целью выяснения механизма формирования домена и перемещения его границы были проведены два дополнительных эксперимента. В первом эксперименте использовался кремний, на поверхности которого была сформирована наноразмерная плёнка. Такая плёнка формируется при действии на структуру Si/нематик/ITO постоянного напряжения [2]. Рис. 4 демонстрирует зависимость скорости движения границы домена от длительности времени релаксации (промежутка времени между последующими включениями управляющего напряжения) структуры: в случае (1) – над чистым кремнием, в случае (2) – над кремнием с плёнкой. Хорошо видно, что при любых значениях времени релаксации структуры граница домена над плёнкой движется с меньшей скоростью, чем над чистым кремнием. Из приведенного графика также видно, что при уменьшении времени релаксации скорость перемещения границы домена увеличивается. Несмотря на то, что

механизм подобного гистерезисного поведения движения границы домена пока не ясен, мы полагаем, что такое поведение является подтверждением существенной роли накопления и релаксации ионных зарядов в жидком кристалле у поверхности кремния.

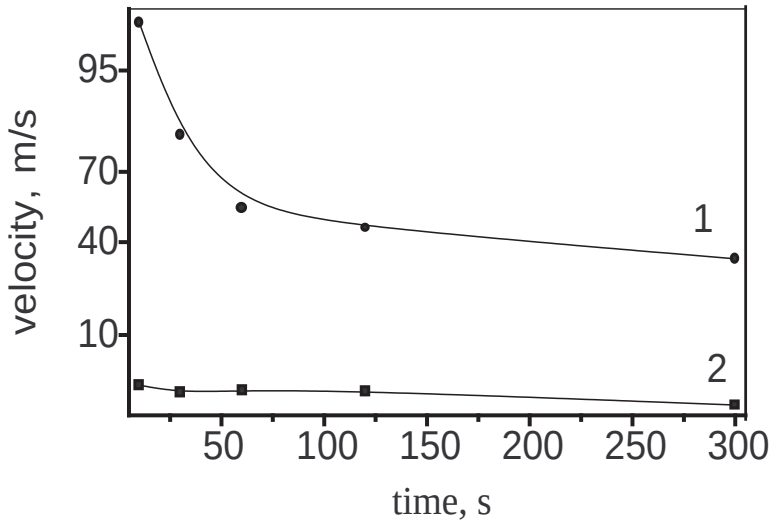


Рис. 4. Зависимость скорости перемещения границы домена от времени релаксации: 1 – над кремнием без плёнки; 2 – над кремнием с плёнкой. Напряжение 4,1 В. Частота 3×10^3 Гц.

Во втором эксперименте использовался кремний, поверхность которого была обработана фокусированным пучком ионов Ga энергией 30 keV и током 10 pA (FEI Quanta 200 3D). Форма обработанной поверхности представляла собой дорожку шириной порядка 10 μm. Было установлено, что граница домена не пересекает Ga-дорожку (рис. 5).

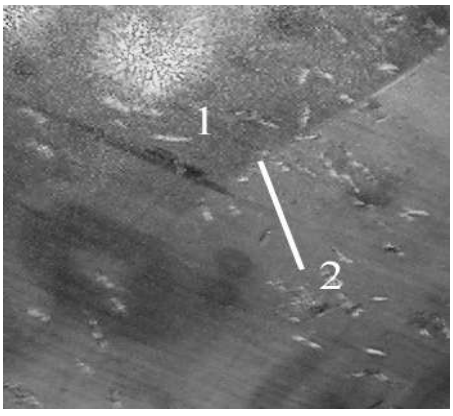


Рис. 5. Граница домена, остановленная Ga-дорожкой: 1 – домен; 2 – Ga-дорожка.

Принимая во внимание приведенные выше экспериментальные результаты, мы предполагаем, что механизм появления доменной переориентации нематика следующий. В структуре Si/нематик/ITO, благодаря выпрямлению переменного напряжения на границе Si/ЖК, происходит аккумуляция ионов в окрестности поверхности кремния. Из-за суммарного влияние электрического поля электрода ITO и поля накопленного ионного заряда у поверхности кремния приповерхностный слой обедняется основными носителями заряда вследствие наличия тока J_1 – оттока носителей от поверхности в глубь кремния. Однако ток утечки J_2 через контакт Si/ЖК поставляет носители заряда в приповерхностный

слой кремния и, следовательно, препятствует формированию обеднённого слоя. Поэтому в случае $J_1 > J_2$ формируется обеднённый высокоомный слой. В результате перераспределения напряжения между кремнием и слоем нематика, часть приложенного к ячейке напряжения падает на высокоомном слое в кремнии. При облучении поверхности кремния лазерным излучением, благодаря генерации неравновесных носителей заряда (электроны, дырки), обеднение в Si и, следовательно, высокоомный слой исчезают. Поэтому в области засветки поверхности кремния приложенное к структуре напряжение полностью падает на слое ЖК, что сопровождается переходом нематика в области домена в гомеотропное состояние.

Выше рассмотренные результаты, касающиеся движения границы домена в структуре с наноразмерной плёнкой на поверхности кремния, качественно подтверждают предложенную модель. Ранее было показано [2], что наноразмерная плёнка, выращенная на поверхности кремния, ослабляет ток утечки через границу Si/ЖК. Это способствует условию ($J_1 > J_2$) формирования обеднённого слоя, и, следовательно, скорость передвижения границы домена уменьшится. Блокировка движения границы домена Ga-дорожкой на поверхности кремния в структуре Si/нематик/ITO также проясняет механизм формирования и движения стенки домена. Хорошо известно [3], что при проникновении ускоренных ионов Ga в приповерхностные слои кремния образуется большое количество дефектов кристаллической решетки, которые могут играть роль ловушек носителей заряда. Когда движущаяся граница домена подходит к участку поверхности кремния с большой концентрацией ловушек, носители заряда, обеспечивающие ток утечки (J_2) в кремнии, захватываются ловушками. Это способствует сохранению условия формирования обеднённого слоя. Поэтому граница домена не пересекает участок поверхности кремния с большим числом ловушек заряда.

Заключение. В работе исследовалась доменная переориентация нематика в структуре Si/nematic/ITO. Установлено, что при условии возбуждения структуры переменным напряжением соответствующего диапазона частот источником доменной переориентации нематика может служить лазерное излучение. К характерным особенностям доменной переориентации относятся: 1) существование порога интенсивности лазерного излучения, 2)нестационарность размеров домена (увеличиваются со временем до некоторого равновесного значения), 3) домены формируются в нематике толщиной порядка одного микрометра. Основную роль в механизме формирования домена и движения его границы играют процессы накопления и релаксации ионных зарядов в ЖК. Продемонстрирована запись дифракционной решётки в структуре с разрешением 20 линий/мм. Участок кремния с большой концентрацией ловушек заряда может эффективно препятствовать движению границы домена, что открывает принципиальную возможность управлять направлением движения границы домена.

Авторы выражают благодарность за предоставленную возможность использовать оборудование Центра коллективного пользования БелГУ.

Литература

1. Сихарулидзе Д.Г. Преобразователи изображений типа МДП – электрооптический материал // Д.Г. Сихарулидзе, Г.С. Чилая. – М.: Радио и связь, 1986.

2. Gritsenko N.I., Kucheev S.I., Litvin P.M. Passivation of silicon surface by ultrathin dielectric film in M/Si/nematic/ITO structures // Semicond. Phys., Quant.Elect.and Optoelect. – 2004. –7;2. – P.154-156.

3. Yogev S., Levin J., Schwarzman A., Avayu A. and Rosenwaks Y. Charging of dielectrics under focused ion beam irradiation // Journal of Applied Physics. – 2008. – 103; 064107.

DOMAIN REORIENTATION OF NEMATIC IN THE Si/NEMATIC/ITO STRUCTURE

S.I. Kucheev, Yu.S. Tuchina

Belgorod state university

Studencheskaya, 14 St., Belgorod, 308007, Russia, e-mail: kucheev@bsu.edu.ru

Domain reorientation of nematic in the Si/nematic/ITO structure induced by laser irradiation was studied. The conditions of nematic domain formation and its boundary movement are found. The mechanism of domain formation in Si/nematic/ITO structure is proposed. The diffraction grating with about 20 line/mm of resolution and the principal possibility of direction control of domain boundary movement are demonstrated.

Key words: silicon, nematic, ions in liquid crystal

УДК 532.72

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ НА ТЕРМОДИФФУЗИОФОТОФОРЕЗ КРУПНЫХ ТВЁРДЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ВЯЗКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ СРЕДАХ[3)]

Н.В. Малай[*)], **Е.Р. Щукин**[**)]

[*)]Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, Россия, 308015, e-mail: malay@bsu.edu.ru
[**)]Институт высоких температур РАН
г.Москва, e-mail: evgrom@yandex.ru

В приближении Стокса проведено теоретическое описание стационарного движения крупной твёрдой аэрозольной частицы сферической формы во внешних полях градиентов температуры и концентраций, на которую падает мощное электромагнитное излучение в бинарной газовой смеси. Предполагается, что средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей её газообразной среды. В процессе решения газодинамических уравнений получены аналитические выражения для силы и скорости термо-, диффузио- и фотофореза с учётом влияния движения среды.

Ключевые слова: термофорез, диффузиофорез, фотофорез.

1. Введение. В одно- и многокомпонентных газах с неоднородным распределением температуры и концентраций возникает упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. Движение частиц относительно центра инерции неоднородной по составу газовой смеси при наличии градиентов относительных концентраций её компонентов называется диффузиофоретическим [1,2]. Скорость, которую приобретают частицы, когда сила вязкого сопротивления среды уравновешивает диффузиофоретическую, называют скоростью диффузиофореза. Термофоретическое движение частиц возникает во внешнем поле градиента температуры относительно неподвижного газа. Под действием термофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды частицы приобретают постоянную скорость термофореза [1,2]. Неоднородное распределение температуры в объёме частицы может возникнуть при её нагреве или охлаждении источниками или стоками тепла, появление которых может быть обусловлено, например, поглощением электромагнитного излучения. В литературе такое движение частиц в газе называют фотофорезом [3,4]. Если на движение частиц одновременно оказывают влияние все выше перечисленные факторы, то возникает комбинированное движение, которое называется термодиффузиофотофоретическим. В опубликованных до настоящего времени работах по теории термодиффузиофотофореза крупных твёрдых частиц сферической формы при малых относительных перепадах температуры не учитывалось движение среды, т.е. пренебрегалось влияние конвективных членов в уравнениях теплопроводности и диффузии на термодиффузиофотофорез. В данной работе проводится оценка этого влияния.

[3]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

Постановка задачи. Рассмотрим сферическую частицу радиуса R, взвешенную в неоднородной по температуре и концентрации бинарной вязкой газовой смеси с температурой T_∞, плотностью ρ_∞ и вязкостью μ_∞. Радиус частицы значительно больше обеих средних длин свободного пробега молекул компонент внешней смеси $\lambda_{1e}/R \ll 1,\ \lambda_{2e}/R \ll 1$.

Частицы, у которых $\lambda/R \ll 1$ (число Кнудсена много меньше единицы), называются крупными. Внутри частицы действуют неравномерно распределенные источники тепла плотностью q_i, за счёт которых средняя температура поверхности частицы отличается от температуры газовой смеси вдали от неё. Здесь и далее индексы "e" и "i" относятся к газообразной среде и частице, соответственно индексом "∞" обозначены значения физических величин, характеризующие газ вдали от частицы, а индексом "s" – значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, равной T_S.

Нагрев поверхности может быть обусловлен многими факторами, например, протеканием объёмной химической реакции; процессом радиоактивного распада вещества частицы; поглощением электромагнитного излучения и т.д. В частности, в случае электромагнитного излучения ситуация выглядит следующим образом. На частицу падает электромагнитное излучение интенсивностью I_0 произвольной фиксированной длины волны λ_0 и произвольной поляризации. Взаимодействие излучения с газом носит нерезонансный характер. Энергия электромагнитного излучения, поглощаясь в объёме частицы, превращается в тепловую энергию. Локальное распределение возникающих таким образом источников тепла может быть описано некоторой функцией источников q_i. Тепло распространяется в объёме частицы за счёт теплопроводности и передается с поверхности частицы в окружающую газообразную среду за счёт излучения и взаимодействия с молекулами окружающего газа. Обмен энергией и импульсом поверхности частицы и окружающего газа приводит к возникновению фотофоретической силы. Использование строгой электродинамической теории позволяет рассчитать функцию источников тепла в объёме частицы при заданных значениях длины волны, интенсивности излучения, размеров частицы и её комплексного показателя преломления [5,6].

При макроскопическом рассмотрении объёмная плотность источников тепла равняется взятой с обратным знаком дивергенции вектора плотности потока излучения $\mathbf{I_0}$ (вектора Умова-Пойтинга):

$$q_i(\mathbf{r}) = -(\nabla\,\mathbf{I_0})\,, \quad \mathbf{I_0} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}\big[\mathbf{E},\mathbf{H}\big]\,,$$

где $\mathbf{E},\mathbf{H}$ – векторы напряжённости электрического и магнитного полей внутри частицы, которые описываются уравнениями Максвелла,

$$\big[\nabla,\mathbf{E}\big] = ik\mathbf{H}\,, \quad \big[\nabla,\mathbf{H}\big] = -im^2k\mathbf{E}\,.$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число, $m = n + id$ – комплексный показатель преломления вещества частицы.

В результате функция источников принимает вид [7]

$$q_i(\mathbf{r}) = 2\,n\,k\,d\,I_0\,B(\mathbf{r})\,,$$

где $B(\mathbf{r}) = \big|\mathbf{E}(\mathbf{r})\big|^2/E_0^2$ – безразмерная функция, описывающая распределение электрического поля в объёме частицы, E_0 – модуль напряжённости электрического поля падающей волны. Функция $B(\mathbf{r})$ может быть рассчитана на основе строгой электродинамической теории Ми [5,6]. Решению этой задачи посвящено много работ, например, [5,6,7]. Их результаты позволяют заключить, что распределение электромагнитного излучения в объёме

частицы сложным образом зависит от её оптических свойств (комплексного показателя преломления) и отношения её размера к длине волны падающего излучения (дифракционного параметра $\rho_0 = 2\pi\, R/\lambda_0$).

При описании термодиффузиофотофореза предполагается, что относительный перепад температуры мал, т.е. $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкости можно считать постоянными величинами. Будем также предполагать, что среднее расстояние между частицами значительно больше их собственного (в силу этого взаимодействием между частицами, а именно – их взаимным гидродинамическим, тепловым и диффузионным влиянием, можно пренебречь), и с помощью внешних источников в бинарной газовой смеси поддерживается малый постоянный градиент температуры ∇T и относительных концентраций первого и второго компонентов бинарной газовой смеси ∇C_{1e} и ∇C_{2e}.

При теоретическом описании термодиффузиофотофореза будем считать, что, в силу малости времён тепловой и диффузионной релаксации, процессы тепло- и массопереноса в системе частица-газ протекают квазистационарно; движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса, и она образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом. Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения газовой динамики с соответствующими граничными условиями .

Термодиффузиофотофорез удобно описывать в сферической системе координат r, θ, φ, начало которой жёстко связано с мгновенным положением центра масс частицы. Полярная ось $z = r\cos\theta$ направлена в сторону градиентов ∇T и ∇C_{1e}. Частица движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ в отрицательном направлении оси OZ. Распределения скорости и давления должны быть симметричными относительно оси, проходящей через центр частицы, и параллельны вектору скорости $\mathbf{U}$. В рамках сформулированных допущений, распределения массовой скорости $\mathbf{U_e}$, давления P_e, температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента C_{1e} описываются следующей системой уравнений [8,9]:

$$\mu_e \triangle \mathbf{U_e} = \nabla P_e, \;\; \mathrm{div}\mathbf{U_e} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_e\, c_{pe}\big(\mathbf{U_e}\nabla\big)\, T_e = \lambda_e \triangle T_e, \quad \triangle T_e = -\, q_i, \tag{2}$$

$$\big(\mathbf{U_e}\nabla\big)\, C_{1e} = D_{12} \triangle C_{1e}\,. \tag{3}$$

Система газодинамических уравнений (1) - (3) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат r, θ, φ [8]:

$$r = R, \quad U_r^e = -U\cos\theta, \qquad U_\theta^e = U\sin\theta - K_{TS}\frac{\nu_e}{R\,T_e}\frac{\partial T_e}{\partial\theta} - K_{DS}\frac{D_{12}}{R}\frac{\partial C_{1e}}{\partial\theta},$$

$$T_e = T_i, \qquad -\lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial r} + \lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} = 0,$$

$$r \to \infty, \quad \mathbf{U_e} \to 0, \quad P_e \to P_{e\infty}, \quad T_e \to T_{e\infty} + |\nabla T|\, r\cos\theta,$$

$$C_{1e} \to C_{1e\infty} + |\nabla C_{1e}|\, r\cos\theta,$$

$$r \to 0, \qquad T_i \neq \infty.$$

Здесь U_r^e и U_θ^e – радиальная и касательная компоненты массовой скорости $\mathbf{U_e}$; $\rho_e = \rho_{1e} + \rho_{2e}$, $\rho_{1e} = n_{1e}m_1$, $\rho_{2e} = n_{2e}m_2$, n_{1e}, m_1 и n_{2e}, m_2 – концентрация и масса первого и второго компонентов бинарной газовой смеси; $U = |\mathbf{U}|$, c_{pe}, λ_e, μ_e, ν_e, D_{12} – удельная теплоёмкость

при постоянном давлении и коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкости и диффузии соответственно; K_{TS} и K_{DS} – коэффициенты теплового и диффузионного скольжений, зависящие от коэффициентов аккомодации тангенциального импульса и энергии. Последние определяются методами кинетической теории газов и могут быть взяты из [10,11]. Эти коэффициенты, в известном смысле, характеризуют степень взаимодействия молекул газа с поверхностью частицы. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии, близких к единице, они равны $K_{TS} = 1.161$ и $K_{DS} = 0.277$ соответственно. Уравнение конвективной диффузии (3) позволяет дать полное решение задачи о распределении концентраций в системе частица-внешняя среда, в силу соотношения $C_{1e} + C_{2e} = 1$. Здесь $C_{1e} = n_{1e}/n_e$, $C_{2e} = n_{2e}/n_e$.

Определяющими параметрами нашей задачи являются постоянные величины c_{pe}, λ_e, μ_e, ν_e, D_{12} и значения R, $|\nabla T|$, $|\nabla C_{1e}|$, $T_{e\infty}$ и U. Из этих параметров можно составить четыре безразмерные комбинации: $\varepsilon = R\,|\nabla T| \ll 1$, $\varepsilon_1 = R\,|\nabla C_{1e}| \ll 1$ и числа Рейнольдса и Пекле. Для чистого термофореза характерная скорость U по порядку величины равна $U \sim (\mu_e/\rho_e T_{e\infty})|\nabla T|$, а чистого диффузиофореза – $U \sim D_{12}|\nabla C_{1e}|$. С учётом этого мы можем вести разложение всех физических величин по одному малому параметру ε. Малый параметр ε_1 выражается через ε. Число Рейнольдса, вычисленное по характерной скорости чистого термофореза, совпадает с этим малым параметром. Это ещё раз подтверждает правильность разложения по малому параметру ε.

Обезразмерим уравнения и граничные условия, вводя безразмерные координату, скорость и температуру следующим образом: $y_k = x_k/R$, $t = T/T_{e\infty}$, $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e/U$. Здесь в качестве единиц измерения выбраны: расстояние – радиус частицы R, температура – $T_{e\infty}$ и скорость – U.

При нахождении термодиффузиофотофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости по ε. Чтобы их найти, нужно знать поля: температур вне и внутри частицы, относительной концентрации первой компоненты бинарной газовой смеси, массовой скорости и давления. Решая уравнения газовой динамики методом теории возмущений, получаем соответственно нулевые и первые члены этих разложений:

$$t_e\,(y,\theta) = t_{e0}\big(y\big) + \varepsilon\cdot t_{e1}\big(y,\theta\big), \quad t_i\,(y,\theta) = t_{i0}\big(y\big) + \varepsilon\cdot t_{i1}\big(y,\theta\big)\,,$$

$$C_{1e}\big(y,\theta\big) = C_{e10}\big(y\big) + \varepsilon\cdot C_{e11}\big(y,\theta\big)\,,$$

$$\mathbf{V_e}\big(y,\theta\big) = \mathbf{V_e}^{(0)} + \varepsilon\mathbf{V_e}^{(1)}\,, \quad P_e\big(y,\theta\big) = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)}\,.$$

Здесь

$$t_{e0} = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_{i0} = B_0 + \frac{C_0}{y} + \int\limits_1^y \frac{\psi_0}{y}dy - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0 dy,$$

$$C_{e10} = C_{1e\infty} + \frac{M_0}{y},\ C_0 = \frac{R^2\,J_0}{3\lambda_i\,T_{e\infty}}\,,$$

$$\psi_n = -\frac{2n+1}{2}\,\frac{y^2R^2}{\lambda_i T_{e\infty}}\int\limits_{-1}^{+1} q_i(r,\theta)\,P_n(\cos\theta)\,d(\cos\theta)\,,$$

$$U_r^e(y,\theta) = U\ \cos\theta\left(\frac{A_2}{y}+\frac{A_1}{y^3}\right), \quad U_\theta^e(y,\theta) = -U\ \sin\theta\left(\frac{A_2}{2y}-\frac{A_1}{2y^3}\right),$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad M_1 = \frac{\omega_3}{2},$$

$$t_{i1} = \cos\theta\left\{B_1 y + \frac{C_1}{y^2} + \frac{1}{3}\left[y\int\limits_1^y \frac{\psi_1}{y^2}dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \psi_1 y dy\right]\right\}, \quad M_0 = 0,$$

$$\omega_1 = \Gamma_0\,\mathrm{Pr}, \quad J_0 = \frac{1}{V}\int q_i dV, \quad C_1 = \frac{RJ_1}{3\lambda_i T_{e\infty}},$$

$$\omega_2 = \frac{\mu_e M_0}{D_{12}\rho_e}, \quad \omega_3 = \frac{\mu_e}{D_{12}\rho_e}, \quad z = \cos\theta, \quad J_1 = \frac{1}{V}\int q_i z dV,$$

$$t_{e1} = \cos\theta\left\{y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \omega_1\left(-\frac{A_1}{4y^3}+\frac{A_2}{2y}\right)\right\}, \quad P_e(y,\theta) = P_{e\infty} + \frac{\mu_e U}{R\,y^2}\cos\theta\, A_2,$$

$$C_{e1} = \cos\theta\left\{\omega_3 y + \frac{M_1}{y^2} + \omega_2\left(-\frac{A_1}{4y^3}+\frac{A_2}{2y}\right)\right\},\ \Gamma_0 = t_S - 1,\ \ t_S = T_S/T_{e\infty},$$

$\int q_i z dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников. Интегрирование ведется по всему объёму частицы.

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур, относительных концентраций, массовой скорости и давления, определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности, для коэффициента A_2 имеем

$$A_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{U}\left\{K_{TS}\frac{\nu_e}{Rt_S\delta}\left[\frac{RJ_1}{\lambda_i T_{e\infty}} + 3\frac{\lambda_e}{\lambda_i} - \frac{5\omega_1}{8}\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right] + \frac{3}{2}K_{DS}\ \omega_3\ \frac{D_{12}}{R}\right\},$$

$$\delta = 1 + 2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}.$$

Средняя температура поверхности частицы T_S определяется из следующего выражения:

$$T_S = T_{e\infty} + \frac{1}{4\pi R\lambda_e}\int\limits_V q_i\, dV.$$

Сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по её поверхности и в сферической системе координат находится по формуле [8,9]

$$\mathbf{F}_z = 4\pi R\mu_e\, U\, A_2 \mathbf{n}_z. \tag{4}$$

Подставляя в (4) коэффициент A_2, видим, что сила, действующая на крупную твёрдую частицу сферической формы при малых относительных перепадах температуры в её окрестности, будет складываться из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$, термофоретической силы $\mathbf{F}_{th}$, фотофоретической силы $\mathbf{F}_{ph}$, диффузиофоретической силы $\mathbf{F}_{dh}$ и силы, обусловленной движением среды $\mathbf{F}_{mh}$ (учёт конвективных членов в уравнении теплопроводности и диффузии):

$$\mathbf{F}_z = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{th} + \mathbf{F}_{ph} + \mathbf{F}_{dh} + \mathbf{F}_{mh}. \tag{5}$$

Здесь

$$\mathbf{F}_\mu = -6\pi\, R\, \mu_e\, U\, \mathbf{n}_z\,, \quad \mathbf{F}_{th} = -6\pi\, R\, \mu_e\, f_{th}\, \frac{|\nabla T|}{T_{e\infty}}\, \mathbf{n}_z\,,$$

$$\mathbf{F}_{ph} = -6\pi\, R\, \mu_e\, f_{ph}\, J_1\, \mathbf{n}_z\,, \quad \mathbf{F}_{dh} = -6\pi\, R\, \mu_e\, f_{dh}\, |\nabla C_{1e}|\, \mathbf{n}_z\,,$$

$$\mathbf{F}_{mh} = -6\pi\, R\, \mu_e\, f_{mh}\, \mathbf{n}_z\,.$$

Выражения f_{th}, f_{ph}, f_{dh} и f_{mh} имеют следующий вид:

$$f_{th} = 2\, K_{TS}\, \frac{\nu_e}{\delta\, t_S}\, \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\,, \quad f_{ph} = K_{TS}\, \frac{\nu_e}{\delta\, t_S}\, \frac{2\, R}{3\, \lambda_i T_{e\infty}}\,,$$

$$f_{mh} = -K_{TS}\, \frac{\nu_e}{\delta\, t_S}\, \frac{5\omega_1}{12}\, \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\,, \quad f_{dh} = K_{DS}\, D_{12}\,.$$

Приравнивая общую силу $\mathbf{F}_z$ к нулю, получаем общее выражение для скорости термодиффузиофотофореза

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{th} + \mathbf{U}_{ph} + \mathbf{U}_{dh} + \mathbf{U}_{mh}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{U}_{th} = -2\, K_{TS}\, \frac{\nu_e}{\delta\, t_S}\, \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\, \frac{|\nabla T|}{T_{e\infty}}\, \mathbf{n}_z\,, \quad \mathbf{U}_{ph} = -2\, K_{TS}\, \frac{\nu_e}{\delta\, t_S}\, \frac{R\, J_1}{3\, \lambda_i T_{e\infty}}\, \mathbf{n}_z\,,$$

$$\mathbf{U}_{dh} = -K_{DS}\, D_{12}\, |\nabla C_{1e}|\, \mathbf{n}_z\,, \quad \mathbf{U}_{mh} = K_{TS}\, \frac{\nu_e}{\delta\, t_S}\, \frac{5\omega_1}{12}\, \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\, \mathbf{n}_z\,.$$

Выражения (4) и (6) позволяют оценивать общую силу, действующую на крупную твердую частицу сферической формы, и общую скорость движения в бинарной газовой смеси во внешних заданных полях градиентов температуры и концентраций, внутри которой действуют неравномерно распределенные в её объёме тепловые источники с учетом движения среды.

Из формул (4) и (6) видим, что движение среды не вносит вклад в диффузиофорез. Конвективные члены в уравнении диффузии не влияют на движение твёрдой частицы в поле градиента концентрации. Это может иметь большое значение в практических приложениях, например, при описании движения аэрозольных частиц в диффузионных полях. Чтобы конвективные члены влияли на диффузиофорез (коэффициент $M_0 \neq 0$), необходимо изменить граничные условия для диффузионной части. Это можно сделать разными способами. Например, рассматривать движение не твёрдой частицы, а испаряющейся капли. Движение среды вносит вклад как в термофорез, так и фотофорез, и он отрицателен. Этот вклад пропорционален коэффициенту $\omega_1 = \Gamma_0\, \mathrm{Pr}$, где $\Gamma_0 = (4\pi R \lambda_e T_{e\infty})^{-1} \int\limits_V q_1\, dV$, т.е. произведению числа Прандтля на среднюю температуру поверхности частицы. Число Прандтля для большинства газов порядка единицы. Поскольку задача решается при малых относительных перепадах температуры, то вклад движения может составить не более $10 - 12$ процентов. Кроме того, если внутри частицы нет источников (стоков) тепла ($q_i = 0$), то движение среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности) не вносит вклада в термофорез.

Чтобы оценить, какой вклад в силу и скорость термо- и фотофореза оказывает влияние движения среды (учёт конвективных членов в уравнении теплопроводности), необходимо

конкретизировать природу тепловых источников. В этом случае выражения для J_0 и J_1 находятся в явном виде. В настоящее время достаточно хорошо разработаны численные методы, позволяющие решить задачу Ми внутри частицы (см. введение статьи), либо рассматривают наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как чёрное тело [5]. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью формулы

$$q_i = \begin{cases} -\dfrac{I_0}{\delta R}\cos\theta, & \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi, \quad R - \delta R \le r \le R\,, \\ \\ 0, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения.

В этом случае интегралы легко считаются

$$\int\limits_V q_i dV = \pi R^2 I_0\,, \quad \int\limits_V q_i z dV = -\frac{2}{3}\,\pi R^3 I_0\,,$$

и можно оценить влияние движения среды на термо- и фотофорез крупных твёрдых аэрозольных частиц сферической формы.

Литература

1. Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах / В.С. Галоян, Ю.И. Яламов. – Ереван: Луйс,1985. – 208 с.

2. Вальтберг А.Ю. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями / А.Ю. Вальтберг, П.М. Исянов, Ю.И. Яламов. – СП.: Ниогаз-фильтр,1993. – 236 с.

3. Ehrenhaft F Die photophorese // Physik. Zeitschr. – 1917. – 17. – S.353-358.

4. Щукин Е.Р. Избранные вопросы физики аэрозолей: Учеб. пособие для студ. и асп. / Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов, З.Л. Шулиманова. – М.: МПУ,1992. – 298 с.

5. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. – М.: МИР, 1986. – 660 с.

6. Пришивалко А.П. Распределение энергии внутри светорассеивающих частиц / А.П. Пришивалко, Л.Г. Астафьева. – Минск, 1974. – 288 с.

7. Ковалев Ф.Д. Экспериментальное исследование фотофореза в газах: дис. канд. физ.-мат. наук / Ф.Д. Ковалев. – Урал. гос. ун-т, 2003. – 133 с.

8. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука,1986. – 736 с.

9. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса // Дж.Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1960. – 630 с.

10. Яламов Ю.И., Юшканов А.А. Диффузионное скольжение бинарной газовой смеси вдоль искривленной поверхности // ДАН СССР. – 1977. – 237;2. – С.303-306.

11. Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ДАН СССР. – 1980. – 254;2. – С.1047-1050.

INFLUENCE OF MEDIUM MOVEMENT ON THERMAL DIFFUSION PHORESIS OF LARGE HARD SPRAY PARTICLES OF SPHERICAL FORM IN VISCOUS GAS MEDIA

N.V. Malay[*)], **E.R. Shchukin**[**)]

[*)]Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, Russia, 308015, e-mail: malay@bsu.edu.ru ,
[**)]Institute of High Temperature RAS
Moscow, e-mail: evgrom@yandex.ru

It is proposed theoretical description of the stationary movement of large hard spray particle having the spherical form. It is done at the Stokes approximation when temperature and concentration gradients take place. Besides, it takes into account that the power electromagnetic irradiation acts in the binary gas mixture. It is supposed that the average temperature of particle surface differs negligibly from the temperature of surrounding gas medium. During the solving of the equation system of gas dynamics analytic expressions of the force and the velocity of thermal-, diffusion- and photophoresis are obtained with the account of the medium movement influence.

Key words: thermal phoresis, diffusiophoresis, photophoresis.

УДК 532.72

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ НА ДИФФУЗИОФОРЕТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ КРУПНОЙ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ВЯЗКОЙ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ[4)]

К.С. Рязанов

Белгородский государственный университет
ул.Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: rksb@rambler.ru

Найдено аналитическое решение задачи стационарного движения при малых числах Рейнольдса крупной испаряющейся капли сферической формы, находящейся в бинарной газовой смеси при наличии градиента концентрации. Предполагается, что средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей её газообразной среды. В процессе решения газодинамических уравнений получены аналитические выражения для силы диффузиофореза с учётом влияния движения среды.

Ключевые слова: диффузиофорез, задача Адамара-Рыбчинского.

1. Рассмотрим каплю, находящуюся в бинарной газовой смеси, первая компонента которой образована молекулами вещества капли. Если на больших расстояниях от центра капли значения относительной концентрации C_1 паров вещества капли меньше, чем значения C_1 у поверхности капли, то при этом происходит испарение капли. Такие капли называют летучими. Нелетучими называют капли, на поверхности которых фазовый переход не происходит. Будем предполагать, что испарение капли происходит в диффузионном режиме, т.е. основным механизмом переноса молекул является диффузия. Математически это означает, что при малых концентрациях молекул паров капли мы имеем соотношение вида $C_1 \ll 1$.

Каплю, радиус которой много меньше длины волны свободного пробега λ молекул газовой смеси, окружает тонкий слой газа, имеющий толщину сравнимую с λ. Этот слой называют слоем Кнудсена. В слое Кнудсена происходят столкновения молекул, вылетающих с поверхности капли, с молекулами, летящими к поверхности капли. Если слой Кнудсена оказывает слабое влияние на скорость роста или испарения капли, то каплю называют крупной, т.е. $\lambda/R \ll 1$, где R – радиус капли. Потому в слое Кнудсена поверхность капли оказывает существенное влияние на диффузиофоретическое движение, и задача решается с помощью математических методов кинетической теории газов, а вне слоя Кнудсена – с помощью системы уравнений газовой динамики.

Движение капель относительно центра инерции неоднородной по составу газовой смеси при наличии градиентов относительных концентраций её компонентов называется диффузиофоретическим [1,2]. Когда дифузиофоретическая сила уровновешивает силу вязкого сопротивления, капля приобретает постоянную скорость диффузиофореза. Когда капля находится в поле бегущей плоской волны монохроматического излучения интенсивностью I_0 и длиной волны λ_0, то в результате поглощения электромагнитной энергии происходит нагрев частицы, который может быть описан некоторой функцией внутренних источников

[4]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, ГК № П1923 от 29.10.09

тепла q_i. Молекулы газа, взаимодействующие с более нагретой частью поверхности капли, сообщают ей бóльший импульс, чем от холодной. В результате, происходит движение капли, получившее название фотофорез. В случае одностороннего направленного излучения источники q_i принимают вид

$$q_i(\mathbf{r}) = 2\,n\,k\,d\,I_0\left|\mathbf{E}_i(\mathbf{r})\right|^2.$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число, $m = n + id$ – комплексный показатель преломления вещества частицы, $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ – напряженность электрического поля внутри частицы. Точное решение для амплитуд компонент напряженности электрического поля внутри сферической частицы дано, например, в [5,6].

Явлениям диффузиофореза крупных летучих частиц при малых относительных перепадах температуры были посвящены работы [1-3]. Учёт конвективных членов в уравнениях теплопроводности и диффузии на диффузиофотофорез в [1-3] не проводился. В данной работе проводится оценка этого влияния.

При описании термодиффузиофотофореза предполагается, что относительный перепад температуры мал, т.е. $(T_S - T_\infty)/T_\infty \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, диффузии, динамической вязкости и плотности можно считать постоянными величинами. В бинарной газовой смеси поддерживается малый постоянный градиент относительных концентраций первого и второго компонентов бинарной газовой смеси ∇C_{1e} и ∇C_{2e}. Будем предполагать, что при движении капля сохраняет сферическую форму. Это предположение справедливо, если силы поверхностного натяжения значительно больше сил вязкого сопротивления. Аналитически условие сохраняемости формы капли имеет вид

$$\frac{\sigma}{R} \gg \frac{\mu_e\left|\mathbf{U}\right|}{R},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения капли, $\mathbf{U}$ – скорость капли, величина которой имеет порядок

$$\mathbf{U} \sim D_{12}\left|\nabla C_{1e}\right|.$$

Здесь и далее индексы "e" и "i" относятся к газообразной среде и капле, соответственно, индексом "∞" обозначены значения физических величин, характеризующие газ вдали от капли, а индексом "s" – значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности капли, равной T_S.

Диффузиофоретическое движение будем описывать в сферической системе координат r, θ, φ, начало которой жёстко связано с мгновенным положением центра масс капли. Полярная ось $z = r\cos\theta$ направлена в сторону градиента ∇C_{1e}. Капля движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}$ в отрицательном направлении оси OZ. Распределения скорости и давления должны быть симметричны относительно оси, проходящей через центр капли и параллельны вектору скорости $\mathbf{U}$. В рамках сформулированных допущений, распределения массовой скорости $\mathbf{U}$, давления P, температуры T и относительной концентрации первого компонента C_{1e} описываются следующей системой уравнений [7,8]:

$$\mu_e\triangle\mathbf{U_e} = \nabla P_e\,, \quad \mathrm{div}\mathbf{U_e} = 0\,,$$

$$\rho_e\,c_{pe}\big(\mathbf{U_e}\nabla\big)\,T_e = \lambda_e\,\Delta\,T_e\,, \quad \big(\mathbf{U_e}\nabla\big)\,C_{1e} = D_{12}\Delta\,C_{1e}, \tag{1}$$

$$\mu_i\Delta\mathbf{U_i} = \nabla P_i\,, \quad \mathrm{div}\mathbf{U_i} = 0\,, \quad \rho_i\,c_{pi}\big(\mathbf{U_i}\nabla\big)\,T_i = \lambda_i\,\Delta\,T_i + q_i\,. \tag{2}$$

Система газодинамических уравнений (1), (2) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат r, θ, φ [8]:

$$r = R\,,$$

$$n_{2e}\big(U_r^e + U\cos\theta\big) + D_{12}\frac{n_e^2 m_1}{\rho_e}\frac{\partial C_{1e}}{\partial r} = 0\,, \tag{3}$$

$$n_{1e}\big(U_r^e + U\cos\theta\big) - D_{12}\frac{n_e^2 m_2}{\rho_e}\frac{\partial C_{1e}}{\partial r} = n_{1i}(U_r^i + U\cos\theta)\,, \tag{4}$$

$$U_\theta^e - U_\theta^i = -K_{TS}^e\frac{\nu_e}{R\,T_e}\frac{\partial T_e}{\partial\theta} + K_{TS}^i\frac{\nu_i}{R\,T_i}\frac{\partial T_i}{\partial\theta} - K_{DS}^e\frac{D_{12}}{R}\frac{\partial C_{1e}}{\partial\theta}\,, \tag{5}$$

$$\mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^e}{\partial\theta} - \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial T_i}\frac{\partial T_i}{\partial\theta} = \mu_i\left(\frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^i}{\partial\theta} - \frac{\partial U_\theta^i}{\partial r}\right), \tag{6}$$

$$T_e = T_i\,, \tag{7}$$

$$-\lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial r} + \lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial r} = LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e}\frac{\partial C_{1e}}{\partial r}\,, \tag{8}$$

$$n_{1e} = n_{1e}(T_S) + \frac{\partial n_{1e}}{\partial T_i}\delta T_i\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} r\to\infty, \qquad & \mathbf{U_e}\to 0\,, \quad P_e\to P_{e\infty}\,, \quad T_e\to T_{e\infty}\,, \\ & C_{1e}\to C_{1e\infty} + |\nabla C_{1e}|\,r\cos\theta\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$r\to 0\,, \qquad \mathbf{U}_i\neq\infty\,, \qquad P_i\neq\infty\,, \qquad T_i\neq\infty\,. \tag{11}$$

Здесь U_r^e и U_θ^e – радиальная и касательная компоненты массовой скорости $\mathbf{U_e}$; $\rho_e = \rho_{1e}+\rho_{2e}$, $\rho_{1e} = n_{1e}m_1$, $\rho_{2e} = n_{2e}m_2$, n_{1e}, m_1 и n_{2e}, m_2 – концентрация и масса первого и второго компонентов бинарной газовой смеси; $U = |\mathbf{U}|$, c_{pk}, λ_k, μ_k, ν_k, D_{12} – удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициенты теплопроводности, динамической и кинематической вязкостей и диффузии соответственно при $k = e, i$; L – удельная теплота фазового перехода первой компоненты бинарной газовой смеси; K_{TS}^e, K_{TS}^i и K_{DS}^e – коэффициенты (внешнего и внутреннего) теплового и диффузионного скольжений, зависящие от коэффициентов аккомодации тангенциального импульса и энергии. Они определяются методами кинетической теории газов и могут быть взяты из [9,10]. Уравнение конвективной диффузии (1) позволяет дать полное решение задачи о распределении концентраций в системе частица-внешняя среда, в силу соотношения $C_{1e} + C_{2e} = 1$. Здесь $C_{1e} = n_{1e}/n_e$, $C_{2e} = n_{2e}/n_e$.

В качестве граничных условий на поверхности капли взяты: непроницаемость для радиального потока второго компонента бинарной газовой среды (3); непрерывность радиального потока первой компоненты бинарной газовой смеси, испытывающий фазовый переход (4); равенство разности касательных составляющих внешней и внутренней скоростей сумме теплового (внешнего и внутреннего) и диффузионного скольжений, пропорциональных соотвественно коэффициентам K_{TS}^e, K_{TS}^i и K_{DS}^e (5); непрерывность касательных

составляющих тензора напряжений (6); непрерывность температуры (7); непрерывность потока тепла с учётом тепла, затрачиваемого на фазовый переход (8); выражение для концентрации молекул первой компоненты газовой смеси, испытывающей фазовый переход с учётом зависимости насыщенной концентрации от температуры (9). Граничные условия на бесконечности приняты в (10), а конечность физических величин учтена в (11).

В задаче имеется малый параметр $\varepsilon = R|\nabla C_{1e}|$. Поэтому решение уравнений гидродинамики и тепло- массопереноса ищем в виде:

$$\mathbf{U_e}\big(y,\theta\big) = \mathbf{U_e}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{U_e}^{(1)}\,, \qquad P_e\big(y,\theta\big) = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)}\,, \tag{12}$$

$$\mathbf{U_i}\big(y,\theta\big) = \mathbf{U_i}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{U_i}^{(1)}\,, \qquad P_i\big(y,\theta\big) = P_i^{(0)} + \varepsilon P_i^{(1)}, \tag{13}$$

$$t_e\,(y,\theta) = t_e^{(0)}\big(y\big) + \varepsilon \cdot t_e^{(1)}\big(y,\theta\big)\,, \quad t_i\,(y,\theta) = t_i^{(0)}\big(y\big) + \varepsilon \cdot t_i^{(1)}\big(y,\theta\big)\,,$$

$$C_{1e}\big(y,\theta\big) = C_{1e}^{(0)}\big(y\big) + \varepsilon \cdot C_{1e}^{(1)}\big(y,\theta\big)\,. \tag{14}$$

Подставляя (12 - 14) в систему газодинаминамических уравнений (1), (2), получаем:

а) решение уравнений гидродинамики –

$$U_r^e(y,\theta) = U\,\frac{A_5}{y^2} + U\,\cos\theta\left(\frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3}\right),\; U_\theta^e(y,\theta) = -U\;\sin\theta\left(\frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3}\right),$$

$$P_e(y,\theta) = P_{e\infty} + \frac{\mu_e\,U}{R\,y^2}\,\cos\theta\,A_2,$$

$$U_r^i(y,\theta) = U\,\cos\theta\left(A_3 + A_4y^2\right), \qquad U_\theta^e(y,\theta) = -U\,\sin\theta\left(A_3 + 2A_4y^2\right),$$

$$P_i(y,\theta) = P_0 + 10A_4y^2\,\frac{\mu_i\,U}{R}\,\cos\theta\,.$$

б) решение уравнений тепло- массопереноса имеет вид –

$$t_e^{(0)} = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \;\; t_i^{(0)} = B_0 + \frac{R^2\,J_0}{3\lambda_i\,T_{e\infty}\,y} + \int\limits_1^y \frac{\psi_0}{y}dy - \frac{1}{y}\int\limits_1^y \psi_0 dy,$$

$$C_{1e}^{(0)} = C_{1e\infty} + \frac{M_0}{y}, \;\; t_e^{(1)} = \cos\theta\left\{\frac{\Gamma_1}{y^2} + \omega_1\left(\frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{4y^3}\right)\right\},$$

$$C_e^{(1)} = \cos\theta\left\{y + \frac{M_1}{y^2} + \omega_2\left(\frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{4y^3}\right)\right\},$$

$$t_i^{(1)} = \cos\theta\left\{B_1\,y + \frac{RJ_1}{3\lambda_iT_{e\infty}\,y^2} + \frac{\beta_1\Omega}{3y^2} + \frac{1}{3}\left[y\int\limits_1^y \frac{\chi_1}{y^2}dy - \frac{1}{y^2}\int\limits_1^y \chi_1 y dy\right]\right\}.$$

Здесь

$$\Gamma_0 = t_S - 1, \;\; t_S = T_S/T_{e\infty}, \; V = \frac{4}{3}\pi R^3, \; J_0 = \frac{1}{V}\int q_i dV, \; J_1 = \frac{1}{V}\int q_i z dV,$$

$$z=\cos\theta,\ M_1=-1-\omega_2\left(\frac{A_2}{2}-\frac{A_1}{4}\right)+C_S^*\left[\Gamma_1+\omega_1\left(\frac{A_2}{2}-\frac{A_1}{4}\right)\right],$$

$$M_0=C_S-C_{1e\infty},\quad C_S^*=\frac{\partial C_{1e}}{\partial T_i},\ \omega_1=\Gamma_0\,\beta_0,\quad \beta_0=\frac{\rho_e c_{pe} D_{12}}{\lambda_e},\quad \omega_2=M_0,$$

$$y=r/R,\quad \beta_1=\frac{\rho_i c_{pi} D_{12}}{\lambda_i},\quad \chi=\psi_1+\beta_1\Omega\big(A_3+A_4y^2\big),\quad \Omega_0=\int\limits_0^y\psi_0 dy,$$

$$\Gamma_1=\frac{RJ_1}{\lambda_i T_{e\infty}\delta}+3LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}+\frac{A_1}{4}\omega_1\left(1+\frac{\lambda_e}{\lambda_i\delta}\right)-\frac{A_2}{2}\omega_1\left(1-\frac{\lambda_e}{\lambda_i\delta}\right)+$$

$$+LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}\omega_2\left(\frac{A_2}{2}+\frac{A_1}{4}\right),$$

$$\delta=1+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}+2C_S^*LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i},$$

$$\psi_n=-\frac{(2n+1)R^2y^2}{2\lambda_i T_{e\infty}}\int\limits_{-1}^{1}q_i(r,\theta)P_n(cos\theta)d(\theta).$$

Постоянные интегрирования A_m $(m=1,2,...,5)$, B_0, B_1, входящие в выражения для полей температур, относительных концентраций, массовой скорости и давления, определяются из граничных условий на поверхности частицы (3 - 9). В частности, для коэффициента A_2 имеем

$$A_2=-\frac{3}{2}\frac{1+2\mu_e/3\mu_i}{1+\mu_e/\mu_i}-\frac{\varepsilon}{U\big(1+\mu_e/\mu_i\big)}\left\{K\left(\Gamma_1^*-\frac{5}{8}\kappa_3\frac{1+4\mu_e/5\mu_i}{1+\mu_e/\mu_i}\right)+\right.$$
$$+D_{12}\frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_{2e} R}\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu_e}{\mu_i}+\frac{\rho_e}{\rho_{1i}}\right)\left[3-2C_S^*\Gamma_1^*+\left(2C_S^*\frac{\omega_1\lambda_e}{\lambda_i\delta}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\omega_2}{\delta}\left(1+2\frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right)\right)\frac{1+4\mu_e/5\mu_i}{1+\mu_e/\mu_i}\right]\Bigg\},$$

где

$$K\ =\ K_{TS}^e\frac{\nu_e}{R\,t_S}-K_{TS}^i\frac{\nu_i}{R\,t_S}+\frac{1}{3\mu_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t_i}+K_{DS}^eC_S^*\frac{D_{12}}{R},$$

$$\kappa_3=\frac{\omega_1\lambda_e}{\lambda_i\delta}+LD_{12}\,\omega_2\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta},$$

$$\Gamma_1^*=\frac{RJ_1}{\lambda_i T_{e\infty}\delta}+3LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e T_{e\infty}\lambda_i\delta}.$$

Средняя температура поверхности капли T_S определяется из следующего выражения:

$$T_S=T_{e\infty}+\frac{1}{4\pi R\lambda_e}\int\limits_V q_i\,dV+LD_{12}\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e\lambda_e}\big(C_{1e\infty}-C_S\big).$$

Сила же, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по её поверхности, и в сферической системе координат находится по формуле [7,8]

$$\mathbf{F}_z = 4\pi R\mu_e\, U\, A_2 \mathbf{n}_z \ . \tag{15}$$

Выражение (15) позволяет оценивать общую силу, которая действует на крупную испаряющуюся каплю сферической формы в бинарной газовой смеси во внешнем заданном поле градиента концентрации с учетом движения среды. При этом внутри капли имеются неравномерно распределённые по её объёму тепловые источники. Конвективные члены в уравнении диффузии влияют на движение в поле градиента концентрации. Это может иметь большое значение в практических приложениях, например, при описании движения испаряющихся капель в диффузионных полях. Поскольку задача решается при малых относительных перепадах температуры, то вклад движения может составить не более 10%.

Чтобы оценить, какой вклад в силу диффузиофореза оказывает влияние движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности и диффузии), необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В этом случае выражения для J_0 и J_1 находятся в явном виде. В настоящее время достаточно хорошо разработаны численные методы, позволяющие решить задачу Ми внутри частицы [5,6].

Литература

1. Галоян В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах / В.С. Галоян, Ю.И. Яламов. – Ереван: Луйс,1985. – 208 с.

2. Вальтберг А.Ю. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями / А.Ю. Вальтберг, П.М. Исянов, Ю.И. Яламов. – СПб.: Нииогаз-фильтр,1993. – 236 с.

3. Дерягин Б.В., Яламов Ю.И. Теория движения капель растворов в диффундирующей бинарной газовой смеси // ДАН СССР. – 1967. – 175;1. – С.59-62.

4. Щукин Е.Р. Избранные вопросы физики аэрозолей: учеб. пособие для студ. и асп. / Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов, З.Л. Шулиманова. – М.: МПУ,1992. – 298 с.

5. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. – М.: МИР, 1986. – 660 с.

6. Пришивалко А.П. Распределение энергии внутри светорассеивающих частиц / А.П. Пришивалко, Л.Г. Астафьева. – Мн., 1974. – 288 с.

7. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука,1986. – 736 с.

8. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж.Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1960. – 630 с.

9. Яламов Ю.И., Юшканов А.А. Диффузионное скольжение бинарной газовой смеси вдоль искривленной поверхности // ДАН СССР. – 1977. – 237;2. – С.303-306.

10. Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ДАН СССР. – 1980. – 254;2. – С.1047-1050.

INFLUENCE OF MEDIUM MOVEMENT ON DIFFUSIOPHORESIS OF LARGE VAPOR DROP OF SPHERICAL FORM IN VISCOUS GASEOUS MEDIUM

K.S. Ryazanov

Belgorod State University
Studencheskaya St.,14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: rksb@rambler.ru

It is found the analytic solution of the stationary movement problem at small Reinolds numbers corresponding to large vapor drop of spherical form which is in the gas binary mixture when the concentration gradient exists. It is supposed that the average temperature of the particle surface differs negligibly from the temperature of the surrounding gas medium. During the solving of the equation system of gas dynamics analytic expressions of the force and the velocity of diffusiophoresis are obtained with the account of the medium movement influence.

Key words: diffusiophoresis, Hadamar-Rybchinskii problem.

УДК 51-73

ПОСТРОЕНИЕ ГАУССОВСКОЙ ФЛУКТУАЦИОННОЙ МОДЕЛИ РАВНОВЕСНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ [5)]

М.А. Сапрыкин, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Предложена стохастическая модель равновесного теплового электромагнитного излучения в твёрдом диэлектрике, которая удовлетворяет условию сохранения заряда при наличии структурных флуктуаций среды.

Ключевые слова: тепловое излучение, флуктуации, корреляционная функция.

1. Введение. Радиационно-кондуктивный теплообмен представляет собой один из трёх элементарных типов переноса тепловой энергии в среде (помимо теплопроводности и конвекции). В твёрдотельных средах, в отсутствие явления конвекции он может играть при достаточно сильной их нагретости существенную роль в переносе тепла. В этом случае радиационно-кондуктивный теплообмен феноменологически осуществляется при любой ненулевой температуре посредством следующих друг за другом актов испускания каждым элементом объёма области пространства, заполняемой средой, электромагнитного излучения со сплошным спектром (теплового излучения), за счёт превращения внутренней энергии вещества в энергию электромагнитных волн (фотонов, с квантовой точки зрения), последующего переноса этого излучения в пространстве среды и затем его поглощения средой в другом элементе объёма, который сопровождается превращением его снова во внутреннюю энергию. Существующая в настоящая время математическая формулировка теории радиационно-кондуктивного теплообмена [1] аналогична теории переноса частиц (например, нейтронов) в среде и не основана на каком-либо теоретическом микроскопическом анализе этого явления. Более того, в этой формулировке совершенно отсутствует само электромагнитное поле. Попыткой хотя бы частичного преодоления этого недостатка, в смысле построения математической схемы, в которой бы явным образом присутствовало переносящее тепловую энергию электромагнитное поле, могут служить работы С.М.Рытова, суммированные в монографии [2]. Несколько отличный от построений, описанных в [2], подход был предложен нами в работе [3]. В настоящей статье мы развиваем этот подход и уточняем некоторые его базовые положения. Попутно мы показываем, в чём состоит существенное различие нашей формулировки с описанной в [3]. Конкретно в данной работе мы описываем математически, на языке стохастического электромагнитного поля, порождаемого случайными тепловыми флуктуациями среды, полностью заполняющей пространство, имеющийся в ней равновесный радиационно-кондуктивный обмен.

2. Постановка задачи. Запишем эволюционные уравнения Максвелла для электромагнитного поля в диэлектрике:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{B}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0\,, \quad (\nabla, \mathbf{D}) = 0 \tag{2}$$

[5)]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

в отсутствие сторонних зарядов, где c – скорость света в вакууме. Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ – соответственно напряжённости изменяющихся в пространстве $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$ и времени $t\in\mathbb{R}$ электрического и магнитного полей, а также поля электрической и магнитной индукций. Мы будем далее предполагать наличие простейшей формы материальных уравнений, связывающих соответствующие друг другу поля напряжённостей и индукций:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\,,\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\,, \tag{3}$$

где коэффициенты ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости диэлектрика, которые предполагаются постоянными. Уравнения (1) - (3), в отсутствие каких-либо источников, и в предположении об однородности физического состояния имеют только постоянные решения, которые не описывают распространение переносящих тепло электромагнитных волн. Следовательно, для описываемой физической ситуации решения уравнений (1) и (2) полагаются нулевыми.

Наша теория радиационно-кондуктивного теплообмена основана на предположении о наличии случайных флуктуаций зарядов $\tilde\rho(\mathbf{r},t)$ и токов $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ в объёме диэлектрика, вызванных случайными актами излучения и поглощения фотонов, передаваемых от атома к атому (от молекулы к молекуле) и переносящих тепловую энергию от одного элемента объёма к другому. Средние значения этих полей равны нулю:

$$\langle\tilde\rho(\mathbf{r},t)\rangle=0\,,\quad \langle\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)\rangle=0 \tag{4}$$

(здесь и далее угловые скобки, окружающие математическое выражение, содержащее случайную функцию, обозначают усреднение по распределению вероятностей этой функции). В этом случае уравнения (1), (2) заменяются на стохастические уравнения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{B}}+[\nabla,\tilde{\mathbf{E}}]=0\,,\qquad (\nabla,\tilde{\mathbf{B}})=0\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{D}}-[\nabla,\tilde{\mathbf{H}}]=-\frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}\,,\qquad (\nabla,\tilde{\mathbf{D}})=4\pi\tilde\rho \tag{6}$$

для случайных полей $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$. Уравнения (5), (6) содержат стохастические источники в виде случайных полей $\tilde\rho(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$. При этом материальные уравнения (3) остаются справедливыми для всех случайных реализаций полей. Уравнения же для средних значений $\langle\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)\rangle$, в силу свойства (4), совпадают с уравнениями (1),(2), и, следовательно, эти средние значения, согласно сформулированному основному предположению теории, равны нулю. Стохастические свойства полей $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ полностью определяются стохастическими свойствами источников. Нашей задачей является построение простейшей схемы усреднения для источников, которая бы удовлетворяла разумным физическим ограничениям и позволила бы вычислять такие важные для теории радиационно-кондуктивного теплообмена величины, как среднюю плотность энергии и среднюю плотность потока энергии теплового электромагнитного поля, удовлетворяющего системе уравнений (3), (5), (6), и при этом дала возможность связать указанные величины с температурой среды.

3. Конструкция модели. Сформулируем основные требования, предъявляемые к источникам, вытекающие из физической постановки задачи.

1). Случайные поля $\tilde\rho(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ будем предполагать стационарными во времени и однородными в пространстве (в дальнейшем для упрощения терминологии будем называть

эти их свойства просто *стационарностью*). Естественность этих свойств связана с тем, что мы строим стохастическое описание равновесного теплового излучения, находящегося в равновесии с термодинамически однородной средой.

2). Источники $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ будем предполагать гауссовскими, так как они описывают очень малые короткодействующие флуктуации. А для флуктуаций такого типа достаточно учесть только парную корреляционную функцию. Ввиду линейности уравнений (3), (5), (6), поля $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ также являются гауссовскими.

Напомним, что гауссовские поля с нулевым средним полностью характеризуются парными корреляционными функциями. По этой причине основной задачей теории является вычисление всего набора парных корреляционных функций $\langle\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)\tilde{E}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle\tilde{H}_k(\mathbf{r},t)\tilde{H}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)\tilde{H}_{'}(\mathbf{r}',t')\rangle$; $k,k'=1,2,3$ электромагнитного поля, переносящего тепло. Начиная с этого места мы будем предпочтительно пользоваться индексными обозначениями векторов с использованием соглашения о суммировании по повторяющимся индексам. Так как поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)$ полностью определяются стохастическими характеристиками случайных гауссовских источников, то указанные парные корреляционные функции однозначным образом связаны с парными корреляционными функциями $\langle\tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle$; $k,k'=1,2,3$. Наложим на эти последние величины следующие естественные ограничения.

3). Корреляционные функции $\langle\tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle$; $k,k'=1,2,3$ должны стремиться к нулю (при наличии равенств нулю средних значений заряда и тока), когда $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty$.

4). Флуктуации зарядов и токов должны подчиняться уравнению непрерывности (условие сохранения заряда):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+(\nabla,\tilde{\mathbf{j}})=0\,, \tag{7}$$

следующему из (6). Из этого условия следует, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle=0\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle+\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\tilde{j}_k(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle=0\,.$$

Тогда, учитывая условие 3), получаем

$$\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle=-\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\tilde{j}_k(\mathbf{r},s)\tilde{\rho}(\mathbf{r}',t')\rangle ds\,,$$

$$\langle\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle=-\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\tilde{j}_k(\mathbf{r},s)\tilde{j}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle ds\,.$$

Полученные соотношения показывают, что корреляционные функции для компонент флуктуаций тока $\tilde{j}_k(\mathbf{r},t)$, $k=1,2,3$ полностью определяют искомую стохастическую модель. Они, в силу стационарности случайного поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$, зависят только от разностей $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, $(t-t')$. Потребуем, чтобы случайное поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ было стохастически изотропным, что отражает физическую равнозначность флуктуаций по всем направлениям в пространстве.

Стохастическая изотропия случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r})$ означает его эквивалентность любому из полей $\mathsf{U}\,(\mathsf{A}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}))$, где $\mathsf{A}(\mathbf{r})$ – произвольные ортогональные при каждом $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ матрицы, поворачивающие значения поля в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, а U – ортогональная матрица, поворачивающая пространство $\mathbb{R}^3$. Свойство стохастической изотропии выражается в том, что характеристический функционал поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r})$, по определению, равный

$$\langle \exp\left(i \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi_\alpha(\mathbf{r}) u_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \rangle \,,$$

где $u_\alpha(\mathbf{r})$ – произвольная финитная непрерывная функция, совпадает с характеристическим функционалом

$$\langle \exp\left(i \int\limits_{\mathbb{R}^3} [\mathsf{U}\,(\mathsf{A}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}))]_\alpha u_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \rangle$$

поля $\mathsf{U}\,(\mathsf{A}(\mathbf{r})\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}))$. Для гауссовского случайного поля с нулевым средним это приводит к тому, что зависимость его парной корреляционной функции от пространственных координат сводится к зависимости только от взаимного расстояния $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ между радиус-векторами, и, кроме того, зависимость её от тензорных индексов l, l', имеет вид

$$\langle \tilde{j}_l(\mathbf{r},t)\tilde{j}_{l'}(\mathbf{r}',t')\rangle = \delta_{l,l'} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, t-t')$$

с некоторой положительно-определённой функцией $G(\cdot,\cdot)$. Для определения вида функций $G(|\mathbf{r}|,t)$ мы потребуем наличия более жёсткого свойства. Нужно выбрать такой её вид, который бы обеспечивал стационарность по времени пары случайных полей, являющихся решениями системы уравнений (3), (5), (6). Этого мы добиваемся наложением следующего условия (именно в этом пункте наши построения серьёзно расходятся со схемой, предложенной в [2]).

5). Будем считать, что флуктуации тока определяются соотношением

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) = \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)\,, \tag{8}$$

где $\sigma > 0$ и $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ – случайное поле в точках $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, изменяющееся во времени t. Это поле будем считать стационарным и гауссовским с нулевым средним $\langle\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)\rangle = 0$. Установление корректности конструируемой модели теплового электромагнитного поля состоит в доказательстве того, что формула (8) обеспечивает выполнимость сформулированных выше свойств поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ и стационарность теплового электромагнитного поля. Заметим, что наличие поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ в формуле (8) существенно, так как в его отсутствие система уравнений (3), (5), (6) была бы самосогласованной и не содержала стохастических источников, что, с точки зрения моделируемой нами ситуации, приводило бы только к тривиальным решениям $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{H}} = 0$. Это связано с тем,что из уравнения непрерывности (7) и выражения для дивергенции поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ в (6) получается уравнение для флуктуаций заряда $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\,\tilde{\rho} = 0\,, \tag{9}$$

которое уже не является стохастическим, и единственное его стационарное (с точки зрения теории случайных процессов) решение тривиально $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t) = 0$.

Наличие гауссовского стационарного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$, обладающего нулевым средним значением, связано с тепловыми флуктуациями среды. Для завершения конструкции нашей стохастической модели теплового электромагнитного поля, необходимо определить его посредством задания парной корреляционной функцией. Мы выбираем её следующий общий вид:

$$\langle\tilde{\varphi}_l(\mathbf{r},t)\tilde{\varphi}_{l'}(\mathbf{r}',t')\rangle = \delta_{l,l'}K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,t-t')\,, \tag{10}$$

где $K(|\mathbf{r}|,t)$ – локализованная по обоим аргументам функция. Такая форма корреляционной функции обеспечивает стохастическую изотропию поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ флуктуаций тока и, следовательно, решений уравнений (3), (5),(6). Тот факт, что поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ определяется тепловыми флуктуациями тока и, следовательно, электромагнитного поля, отражается в том, что корреляционная функция должна зависеть от абсолютной температуры T как от параметра.

4. Флуктуирующее электромагнитное поле. В этом пункте мы вычислим компоненты корреляционной функции $\langle\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)\tilde{E}_{k'}(\mathbf{r}',t')\rangle$ теплового электромагнитного поля, или, что эквивалентно, корреляционной функции $\langle\tilde{\tilde{E}}_k(\mathbf{r},\omega)\tilde{\tilde{E}}^*_{k'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle$, где

$$\tilde{E}_k(\mathbf{r},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t}dt$$

на основе сформулированной нами модели.

Дифференцируя по t уравнение (5) и используя (3), (6), находим

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\,\ddot{\tilde{E}}_k = \frac{1}{c}\epsilon_{klm}\nabla_l\dot{\tilde{H}}_m - \frac{4\pi}{c^2}\dot{\tilde{j}}_k = -\mu^{-1}\epsilon_{klm}\nabla_l\epsilon_{mij}\nabla_i\tilde{E}_j - \frac{4\pi}{c^2}(\sigma\dot{\tilde{E}}_k + \dot{\tilde{\varphi}}) =$$

$$= \mu^{-1}\Delta\tilde{E}_k - \frac{4\pi}{\varepsilon\mu}\nabla_k\tilde{\rho} - \frac{4\pi}{c^2}(\sigma\dot{\tilde{E}}_k + \dot{\tilde{\varphi}}_k)\,.$$

Вводя показатель преломления $n = (\varepsilon\mu)^{1/2}$ и декремент затухания $\nu = 4\pi\mu\sigma$, полученное соотношение запишем в виде уравнения для поля $\tilde{E}_k(\mathbf{r},t)$,

$$\frac{n^2}{c^2}\,\ddot{\tilde{E}}_k - \Delta\tilde{E}_k + \frac{\nu}{c^2}\dot{\tilde{E}}_k = -\tilde{\psi}_k\,, \tag{11}$$

где введено случайное поле

$$\tilde{\psi}_k = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\nabla_k\tilde{\rho} + \frac{n^2}{c^2}\dot{\tilde{\varphi}}_k\right)\,. \tag{12}$$

Вычислим корреляционную функцию случайного поля $\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t)$. Для этого заметим, что правая часть (12) полностью определяется случайным полем $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$. Это следует из того, что, согласно (7),(8), имеет место

$$\dot{\tilde{\rho}} + \frac{\nu}{n^2}\tilde{\rho} = -\nabla_k\tilde{\varphi}_k\,,$$

и поэтому стационарное поле $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$ выражается через поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r},t)$ посредством следующей формулы:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r},t) = -\nabla_k\int\limits_{-\infty}^{t}\tilde{\varphi}_k(\mathbf{r},s)\exp\left[-\frac{\nu}{n^2}(t-s)\right]ds\,.$$

Это следует из формулы (П6) при $a = \nu/n^2$ и $\tilde{\xi}(\mathbf{r},t) = -\nabla_k\tilde{\varphi}_k(\mathbf{r},t)$.

Таким образом, на основании (12)

$$\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\frac{n^2}{c^2}\dot{\tilde{\varphi}}_k(\mathbf{r},t) - \nabla_k\int\limits_{-\infty}^{t}\nabla_l\tilde{\varphi}_l(\mathbf{r},s)\exp\left[-\frac{\nu}{n^2}(t-s)\right]ds\right). \tag{13}$$

Введём спектральную амплитуду

$$\tilde{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t}dt$$

и вычислим её корреляционную функцию. Согласно (12) запишем

$$\tilde{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left((\nabla_k\tilde{\bar{\rho}})(\mathbf{r},\omega) + \frac{n^2}{c^2}\tilde{\bar{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)\right).$$

После этого воспользуемся для преобразования первого слагаемого формулой (П7) при $a = \nu/n^2$, положив в ней $\tilde{\bar{\xi}}(\mathbf{r},\omega) = -(\nabla_l\tilde{\bar{\varphi}}_l)(\mathbf{r},\omega)$, а для преобразования второго слагаемого – формулой (П8), заменив в ней $\tilde{\bar{\xi}}(\mathbf{r},\omega)$ на векторно-значное поле $\tilde{\bar{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)$. В результате получим

$$\tilde{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(i\frac{\omega n^2}{c^2}\,\tilde{\bar{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega) - \frac{(\nabla_k\nabla_l\tilde{\bar{\varphi}}_l)(\mathbf{r},\omega)}{\nu/n^2 + i\omega}\right). \tag{14}$$

Вычисленная спектральная амплитуда $\tilde{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)$ определяет спектральную амплитуду $\tilde{\bar{E}}_k(\mathbf{r},\omega)$, которая, согласно (11), удовлетворяет уравнению

$$\Delta\tilde{\bar{E}}_k(\mathbf{r},\omega) + \frac{\omega}{c^2}\left(\omega n^2 - i\nu\right)\tilde{\bar{E}}_k(\mathbf{r},\omega) = \tilde{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)\,. \tag{15}$$

Заметим, что на основании (10)

$$\langle\tilde{\varphi}_l(\mathbf{r},\omega)\tilde{\varphi}^*_{l'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle = 2\pi\delta(\omega-\omega')\delta_{l,l'}\bar{K}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\omega)\,, \tag{16}$$

где

$$\bar{K}(|\mathbf{r}|,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}K(|\mathbf{r}|,t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

Тогда, используя (14),

$$\langle\tilde{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)\tilde{\bar{\psi}}^*_k(\mathbf{r}',\omega')\rangle = \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\left\langle\left[i\frac{\omega n^2}{c^2}\,\tilde{\bar{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)\right]\cdot\left[-i\frac{\omega' n^2}{c^2}\,\tilde{\bar{\varphi}}^*_{k'}(\mathbf{r}',\omega')\right]\right\rangle =$$

$$= \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\omega\omega'\left[\frac{n}{c}\right]^4\delta_{kl}\delta_{k',l'}\langle\tilde{\bar{\varphi}}_l(\mathbf{r},\omega)\tilde{\bar{\varphi}}^*_{l'}(\mathbf{r}',\omega')\rangle =$$

$$= \frac{32\pi^3}{\varepsilon^2}\delta(\omega-\omega')\left[\frac{\omega n^2}{c^2}\right]^2\delta_{kl}\delta_{k',l'}\delta_{l,l'}\bar{K}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\omega)\,. \tag{17}$$

Это выражение записывается более компактно для корреляционной функции пространственных спектральных амплитуд

$$\tilde{\hat{\psi}}_k(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}_k(\mathbf{r},\omega) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} d\mathbf{r}\,, \quad k = 1,2,3 \tag{18}$$

случайных полей $\tilde{\hat{\psi}}_k(\mathbf{r},\omega)$, используя тот факт, что корреляционная функция для пространственных спектральных амплитуд

$$\tilde{\hat{\varphi}}_k(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\varphi}_k(\mathbf{r},\omega) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} d\mathbf{r}\,, \quad k = 1,2,3$$

полей $\tilde{\hat{\varphi}}_k(\mathbf{r},\omega)$, на основании (16), равна

$$\langle \tilde{\hat{\varphi}}_m(\mathbf{k},\omega) \tilde{\hat{\varphi}}^*_{m'}(\mathbf{k}',\omega') \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega-\omega')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{m,m'} \hat{K}(\mathbf{k},\omega)\,,$$

где

$$\hat{K}(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} \bar{K}(|\mathbf{r}|) d\mathbf{r}\,.$$

Тогда, вычисляя преобразования Фурье по пространственным переменным $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ от обеих частей формулы (17), получаем искомое выражение для корреляционной функции спектральных амплитуд (18)

$$\langle \tilde{\hat{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega) \tilde{\hat{\psi}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega') \rangle = (2/\varepsilon)^2 (2\pi)^6 \delta(\omega-\omega')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \left[\frac{\omega n^2}{c^2}\right]^2 \delta_{l,l'} \hat{K}(\mathbf{k},\omega)\,. \tag{19}$$

Это выражение определяет общий вид корреляционной функции спектральных амплитуд случайного поля $\tilde{\psi}_k(\mathbf{r},t)$. Спектральные же амплитуды

$$\tilde{\hat{E}}_l(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{E}_l(\mathbf{r},\omega) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{r})} d\mathbf{r}\,, \quad l = 1,2,3$$

поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)$ на основании уравнения (15) связаны с амплитудами $\tilde{\hat{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)$ как

$$\tilde{\hat{E}}_l(\mathbf{k},\omega) = \frac{c^2 \tilde{\hat{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)}{\omega(\omega n^2 - i\nu) - (c\mathbf{k})^2}\,, \quad l = 1,2,3\,.$$

Поэтому корреляционная функция этих амплитуд следующим образом выражается через корреляционную функцию амплитуд $\tilde{\hat{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega)$,

$$\langle \tilde{\hat{E}}_l(\mathbf{k},\omega) \tilde{\hat{E}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega') \rangle = \frac{c^4 \langle \tilde{\hat{\psi}}_l(\mathbf{k},\omega) \tilde{\hat{\psi}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega') \rangle}{((n\omega)^2 - (ck)^2)^2 + \omega^2\nu^2}\,. \tag{20}$$

6. Заключение. Нами построена стохастическая модель электромагнитного поля, находящегося в тепловом равновесии в диэлектрической среде. Следующим шагом в построении теории радиационно-кондуктивного теплообмена на её основе является обобщение

модели на случай термодинамически неравновесной среды и вычисление плотности потока энергии. Однако, даже в равновесном случае, которому посвящена настоящая статья, остался невыясненным вопрос о точной взаимосвязи предложенной модели и модели, описанной в монографии [2]. В следующей публикации мы намереваемся ответить на этот вопрос.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стационарный случайный процесс, связанный со стохастическим дифференциальным уравнением 1-го порядка

Рассмотрим стационарный процесс $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, траектории которого удовлетворяют простейшему стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) + a\tilde{\rho}(t) = \tilde{\xi}(t)\,, \tag{П1}$$

где $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ – заданный стационарный случайный процесс с известным распределением вероятностей, $a > 0$ – постоянная и точкой над буквой обозначена производная по времени. Общее решение при фиксации значения $\tilde{\rho}(t_0)$ случайного процесса $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ в произвольный момент времени t_0 имеет вид

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t_0)e^{-a(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-a(t-s)}\tilde{\xi}(s)ds\,. \tag{П2}$$

Устремив t_0 к $-\infty$, получим форму для траекторий процесса $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, стохастически инвариантную относительно трансляций времени

$$\tilde{\rho}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)}\tilde{\xi}(s)ds\,, \tag{П3}$$

где интеграл сходится с вероятностью единица. Если $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ – стационарный процесс, то очевидным образом процесс $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ также стационарный. Это связано с тем, что

$$\tilde{\rho}(t+T) = \int\limits_{-\infty}^{t+T} e^{-a(t+T-s)}\tilde{\xi}(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)}\tilde{\xi}(s+T)ds\,,$$

и если процесс $\langle\tilde{\xi}(t+T); t \in \mathbb{R}\rangle$ стохастически эквивалентен процессу $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, то процесс $\langle\tilde{\rho}(t+T); t \in \mathbb{R}\rangle$ стохастически эквивалентен процессу $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$.

Введём спектральные амплитуды $\langle\tilde{\tilde{\xi}}(\omega); \omega \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle\tilde{\tilde{\rho}}(\omega); \omega \in \mathbb{R}\rangle$ стационарных процессов $\langle\tilde{\xi}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle\tilde{\rho}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$:

$$\tilde{\tilde{\xi}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{\xi}(t)dt\,, \quad \tilde{\tilde{\rho}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{\rho}(t)dt$$

соответственно. Тогда, согласно (П2),

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)} \tilde{\xi}(s) ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{as} \tilde{\xi}(s) ds \int\limits_{s}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{\tilde{\tilde{\xi}}(\omega)}{a + i\omega} \,.$$

Формула (П3) и полученное соотношение

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\omega) = \frac{\tilde{\tilde{\xi}}(\omega)}{a + i\omega} \tag{П4}$$

тривиальным образом распространяется на тот случай, если имеется случайное поле $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ такое, что относительно переменной t оно представляет собой стационарный процесс, случайные реализации которого подчиняются стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{\rho}}(\mathbf{r}, t) + a\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) \,, \quad a > 0 \,, \tag{П5}$$

где $\langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ – заданное стационарное случайное поле (возможно, обобщённое) с известным распределением вероятностей. Тогда

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a(t-s)} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, s) ds \tag{П6}$$

и для спектральных амплитуд по переменной t полей $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ и $\langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$, определяемых соотношениями

$$\tilde{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) dt \,, \quad \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{r}, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) dt \,,$$

справедливо соотношение

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\tilde{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, \omega)}{a + i\omega} \,. \tag{П7}$$

Сделаем ещё одно замечание. Спектральные амплитуды $\langle \tilde{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, \omega); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R} \rangle$ и $\langle \dot{\tilde{\tilde{\xi}}}(\mathbf{r}, \omega); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R} \rangle$ стационарных случайных процессов $\langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ и $\langle \dot{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, t); \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \rangle$ связаны соотношением

$$\dot{\tilde{\tilde{\xi}}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \tilde{\tilde{\xi}}(\mathbf{r}, \omega) \,, \tag{П8}$$

так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) dt = i\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{\xi}(\mathbf{r}, t) dt \,.$$

Литература

1. Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс, пер. с англ. – Л.: Энергия, Ленингр. отд., 1972. – 296 с.

2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.II. Случайные поля. 2-е изд. / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов Ю.А., В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

3. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2009. – 5(60); 16. – С. 47-67.

GAUSSIAN FLUCTUATION MODEL OF EQUILIBRIUM THERMAL IRRADIATION

M.A. Saprykin, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

The stochastic model of thermal equilibrium electromagnetic irradiation in dielectric solids is proposed. It satisfies the charge conservation when the medium fluctuations exist.

Key words: thermal irradiation, fluctuations, correlation function.

УДК 519.673, 539.182

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ

А.С. Старовойтов, А.Г. Шкловский

Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308015, Россия, e-mail: shklovskii@bsu.edu.ru

Описан расчёт полной энергии в методе локального функционала электронной плотности, использующий новую модель обменно-корреляционной энергии. Эта модель позволяет вычислять полные энергии атомов с экспериментальной точностью. Для этого вводится модифицированный локальный потенциал, включающий потенциал Слетера и предложенный авторами аппроксимирующий обменно-корреляционный потенциал. Этот модифицированный локальный потенциал выбирается так, чтобы вычисленные значения энергии последнего занятого уровня равнялись экспериментальным энергиям ионизации в соответствующих атомах.

Ключевые слова: функционал электронной плотности, локальный потенциал, X_α-потенциал Слетера, энергия ионизации.

1. Введение. С момента опубликования работы Кона-Шема (см., например, [2]) многочисленные авторы предлагали различные варианты обменно-корреляционных потенциалов для получения наилучшей электронной плотности атомов, молекул и твердых тел. Как известно, общих принципов построения хороших потенциалов не существует. Поэтому в литературе предложено очень много вариантов обменно-корреляционных потенциалов и создано много различных программных комплексов, на которых удаётся получить полные энергии атомов и молекул с точностью около 1%. К сожалению, энергии ионизации получить не удаётся с точностью больше 10-15%. Вычисление энергии ионизации как разницы между полными энергиями атома и иона наталкивается на ту трудность, что полные энергии имеют для достаточно больших атомов значения в десятки тысяч электрон-вольт, в то время как энергия ионизации имеет порядок нескольких электрон-вольт. В то же время, точность, с которой экспериментально измерены полные энергии, значительно уступает точности, с которой измерены энергии ионизации. Поэтому большое значение придаётся поиску такого потенциала, который позволяет вычислить энергию последнего занятого уровня, равную энергии ионизации.

В статье [1] обсуждалась универсальная аппроксимирующая функция для функционала обменно-корреляционной энергии. В настоящей работе предпринята попытка улучшения приближения локальной плотности для обменно-корреляционной энергии в рамках теории функционала электронной плотности и предложен модифицированный локальный потенциал Слетера (МЛПС), использующий эту универсальную аппроксимирующую функцию. Предлагаемый метод применяется для нахождения полной энергии и энергии ионизации атомов. В работе используется атомная система единиц $\hbar = e^2 = m_e = 1$.

Рассмотрим выражение для вычисления полной энергии многоэлектронных систем в рамках теории функционала электронной плотности [2]

$$E = T_e[n] + E_{har}[n] + E_{xc}[n] + \int V_e(\vec{r}) \cdot n(\vec{r}) d\vec{r}, \qquad (1)$$

где $T_e[n]$ – функционал кинетической энергии, который будет обсуждаться ниже, $E_{har}[n]$ – функционал Хартри, $E_{xc}[n]$ – обменно-корреляционный функционал, $V_e(\vec{r})$ – потенциал поля, в котором находится многоэлектронная система, $n(\vec{r})$ – плотность электронов в системе, а интегрирование проводится по всему объему электронной системы. Для обменно-корреляционного функционала и функционала Хартри существуют известные выражения [2]:

$$E_{har}[n] = \frac{1}{2}\int \frac{n(\vec{r}_1)n(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\,, \tag{2}$$

$$E_{xc}[n] = \frac{1}{2}\int \frac{n(\vec{r}_1)\bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)n(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\,. \tag{3}$$

Здесь

$$\bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \int_0^1 (g_\lambda(\vec{r}_1,\vec{r}_2) - 1)\, d\lambda\,, \tag{4}$$

где $g_\lambda(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ – парная корреляционная функция для системы с электрон-электронным взаимодействием с фиктивным зарядом λ, который изменяется от 0 (для не взаимодействующей системы электронов) до 1 (электрон-электронное взаимодействие включено полностью).

К сожалению, вычисление функции g_λ является очень сложной задачей. Поэтому прямое решение соответвующих уравнений для парной корреляционной функции до сих пор не привело к успеху, кроме случая однородного электронного газа и некоторых простейших модельных систем. Несмотря на это, было доказано, что функция $\bar{h}$ должна обладать некоторыми общими свойствами [2]: во-первых, она обязана быть симметричной:

$$\bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \bar{h}(\vec{r}_2,\vec{r}_1)\,, \tag{5}$$

во-вторых, на достаточно больших расстояниях она должна обращаться в нуль:

$$\lim_{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|\to\infty} \bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = 0\,, \tag{6}$$

и в-третьих, она должна удовлетворять правилу сумм:

$$\int n(\vec{r}_2)\bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)d\vec{r}_2 = -1\,, \quad \int n(\vec{r}_1)\bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)d\vec{r}_1 = -1\,. \tag{7}$$

При рассмотрении ограниченных систем (атомов или молекул) из функции $\bar{h}$ можно естественным образом выделить постоянное слагаемое [3], описывающее компенсацию усредненного самодействия, которое входит в потенциал Хартри. Второе слагаемое обозначим $\eta(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$. В результате имеем

$$\bar{h}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \left(-\frac{1}{N_e} + \eta(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\right)\Theta(R - |\vec{r}_1|)\cdot\Theta(R - |\vec{r}_2|)\,, \tag{8}$$

где N_e – число электронов в атоме; R – радиус атома; $\Theta(R - r)$ – функция Хевисайда, обеспечивающая наличие обмена и корреляции только внутри атома. В настоящей работе для слагаемого $\eta(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ будет использоваться аппроксимирующее выражение:

$$\eta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{(3 + N_e^{1/3})(N_e - 1)}{N_e} \cdot F(r_1) \cdot F(r_2)\,, \tag{9}$$

где $F(x)$ – универсальная аппроксимирующая функция, которая имеет следующий вид:

$$F(x) = x \cdot \ln(a \cdot x) \cdot \exp(-b \cdot x^2)\,. \tag{10}$$

В этой функции параметр a определяет точку перемены знака функции $F(x)$ и он вычисляется исходя из условия

$$\int_0^R r^2 \cdot F(r) \cdot n(r) dr = 0, \tag{11}$$

которое обеспечивает выполнение закона сохранения перераспределённого заряда обменно-корреляционной дырки. Параметр b определяет скорость убывания перераспределённого заряда обменно-корреляционной дырки.

В работе [1] удалось с наперёд заданной точностью получить все полные энергии легких атомов, подбирая для каждого атомной системы параметр b и определяя соответствующий параметр a, согласно (11). Однако, получившиеся при этом энергии последнего занятого уровня каждого из атомов отличались от энергий ионизации. Кроме того, они оказались менее точными, чем вычисленные ранее в методе Хартри-Фока по теореме Купменса (см., например, [4], [7]). Хотя энергии внешних электронов в методе функционала электронной плотности и не удовлетворяют теореме Купменса, принято считать, что при хорошей точности аппроксимации электронной плотности эти энергии должны быть близки к энергиям ионизации.

В теории функционала электронной плотности широко используется метод локального X_α-потенциала Слетера [4]. Он основывается на расчете обменной энергии в однородном электронном газе. В этом случае отсутствуют слагаемые с кулоновской потенциальной энергией классического вида из-за существования нейтрализующего фона однородного положительного заряда. Потенциальная энергия в "приближении ферми-дырки" [2] является исключительно обменной. Её можно рассматривать как электростатическое взаимодействие между электроном, находящимся в начале координат и создаваемой им вокруг себя дыркой с плотностью $n_0(g(r) - 1)$. Здесь корреляционная функция $g(r)$ находится точно, и она была вычислена ещё в работе [5]. Было показано, что для однородного электронного газа с плотностью n_0, она имеет вид:

$$g(r) = 1 - \frac{9}{2}\left[\frac{j_1(k_f r)}{k_f r}\right]^2,\ \ n_0 = \frac{k_f^3}{3\pi^2},\ j_1(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}\,. \tag{12}$$

Вычисляя интеграл (3) для обменной энергии однородного электронного газа, с учётом (12), легко получим выражение

$$E_{xc}[n_{\downarrow 0}] = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \int n_{\downarrow 0}^{4/3}(\vec{r}_1)\, d\vec{r}_1\,. \tag{13}$$

Здесь $n_{\downarrow 0}$ – электронная плотность однородного электронного газа со спином, направленным вниз. Этот результат получен для однородной бесконечной системы, для которой можно пренебречь самодействием. Слетер [4] предложил использовать этот результат как

приближённый в случае неоднородных ограниченных систем, заменив постоянный коэффициент в (13) на коэффициент α, который подбирался для каждого атома из условия равенства энергий (1) с учетом (13) и энергий, вычисленных по методу Хартри-Фока.

2. Модифицированный локальный потенциал. В настоящей работе делается попытка построения комбинированного приближения, которое бы учитывало достоинства обоих методов: метода обменного потенциала Слетера и приближения аппроксимированного локального потенциала (8-11). Введем приближение модифицированного локального потенциала Слетера (МЛПС). Оно включает в себя модифицированную энергию Слетера (13) и вклад от усредненного самодействия и обменно-корреляционного члена из (8) с учётом (9-11). В итоге получается следующее выражение для обменно-корреляционной энергии в МЛПС:

$$E_{xc}[n] = -\frac{1}{2N_e}\left[\frac{3}{2}\,\beta(N_e-1)\int n^{4/3}(\vec{r}_1)\,d\vec{r}_1 + \int \frac{n(\vec{r}_1)n(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\right] - \\ -\frac{(3+N_e^{1/3})(N_e-1)}{2N_e}\int \frac{F(\vec{r}_1)n(\vec{r}_1)F(\vec{r}_2)n(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\,d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\,. \tag{14}$$

Коэффициент β подбирается из условия наилучшего приближения энергии последнего заполненного уровня к энергии ионизации. Поэтому он не является коэффициентом при обменном члене и не совпадает с коэффициентом в X_α-потенциале Слетера.

Приведём вывод уравнения Кона-Шема для атома в приближении МЛПС. Будем искать минимум функционала (1) при условии

$$\int n(\vec{r})d\vec{r} = N_e, \quad n(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{Ne} |\Psi_i(\vec{r})|^2. \tag{15}$$

Здесь N_e – количество электронов в атоме, а функция $\Psi_i(\vec{r})$ является решением уравнения Кона-Шема:

$$[-(1/2)\Delta + V_{at}(\vec{r})]\cdot\Psi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i\Psi_i(\vec{r}). \tag{16}$$

Как обычно, считаем, что уравнение Кона-Шема описывает систему невзаимодействующих квазичастиц с энергией ε_i, находящихся в некотором эффективном внешнем потенциале $V_{at}(\vec{r})$. Этот потенциал выбирается таким образом, чтобы электронная плотность квазичастиц $n(\vec{r})$ была та же, что и у электронов в рассматриваемом атоме. Поэтому для функционала $T_e[n]$ имеем выражение

$$T_e[n] = \sum_{i=1}^{Ne}\varepsilon_i - \int V_{at}(\vec{r})n(\vec{r})d\vec{r}. \tag{17}$$

С учётом (2), (17) и приближения (14), для обменно-корреляционной энергии $E_{xc}[n]$, функционал полной энергии (1) с точностью до аппроксимирующих констант b и β становится определённым. Минимум функционала (1) определяется из равенства нулю его первой вариации по электронной плотности $n(r)$. При этом поправки к полной энергии E, например, за счёт малого изменения электронной плотности или потенциала $V_{at}(r)$ будут иметь второй порядок малости. Поэтому вблизи от точной электронной плотности модифицированный функционал можно считать известным вплоть до второго порядка. Так

как параметры аппроксимации b и β подбираются из условия равенства полной экспериментальной энергии для атома, взятой из [6] с поправками на релятивистские эффекты, значению функционала (1) в приближении МЛПС, то при вычислении первой вариации эти параметры можно считать неизменными. В этих условиях, можно вычислять вариацию по электронной плотности, считая параметры аппроксимации постоянными.

Вычисляя вариацию функционала (1) по электронной плотности $n(r)$ и приравнивая её к нулю, получим выражение для неизвестного потенциала $V_{at}(r)$:

$$V_{at}(r) = \nu_{xc}(r) + \nu_{har}(r) - \frac{Z}{r} \,. \tag{18}$$

Здесь Z – заряд ядра атома, $\nu_{har}(r)$ – хартриевский и $\nu_{xc}(r)$ – обменно-корреляционный потенциалы атома в приближении МЛПС.

Варьируя (1) по электронной плотности $n(r)$, с учётом (14), для суммы потенциалов $\nu_{har}[r] + \nu_{xc}[r]$, входящих в (18), получим выражение

$$\nu_{xc}[r] + \nu_{har}[r] = \frac{(N_e - 1)}{N_e} \int \frac{n(\vec{r}_2)}{|\,\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_2|}\, d\vec{r}_2 + V_s[n] + V_{xcp}[n] \,. \tag{19}$$

Здесь введено обозначение для потенциала Слетера $V_s[n]$:

$$V_s[n] = -(N_e - 1) \cdot \frac{\beta}{N_e} \cdot [n(r)]^{1/3} \,, \tag{20}$$

а также для потенциала перераспределённого обменно-корреляционного заряда $V_{xcp}[n]$:

$$V_{xcp}[n] = (N_e - 1) \cdot \frac{q_{xcp}(r)}{r} \,. \tag{21}$$

"Заряд" $q_{xcp}(r)$, приходящийся на один электрон в сферически симметричном атоме, задаётся формулой:

$$q_{xcp}(r) = \frac{4\pi \cdot (3 + N_e^{1/3}) \cdot F(r)}{N_e} \int\limits_r^R x^2 F(x) n(x) \left(1 - \frac{r}{x}\right) dx \,. \tag{22}$$

Из (22) видно, что в МЛПС для сферического атома потенциал $V_{xcp}[n]$ получается локальным без дополнительных приближений.

На рис. 1 приведён график перераспределённого обменно-корреляционного заряда $(N_e - 1) \cdot q_{xcp}(r)$ для атома Al. Этот график рассчитывался нами по формуле (22).

Подставляя в (18) выражения (19) – (22) с аппроксимирующей функцией (10), получим для сферического атома

$$V_{at}(r) = -\frac{Z}{r} + \frac{(N_e - 1)}{r} \cdot (1 - q_{har}(r) + q_s(r) + q_{xcp}(r)) \,. \tag{23}$$

Величина $q_s(r)$, которую можно назвать зарядом Слетера, приходящимся на одну частицу, имеет вид

$$q_s(r) = -\frac{\beta \cdot r}{N_e} \cdot [n(r)]^{1/3} \,. \tag{24}$$

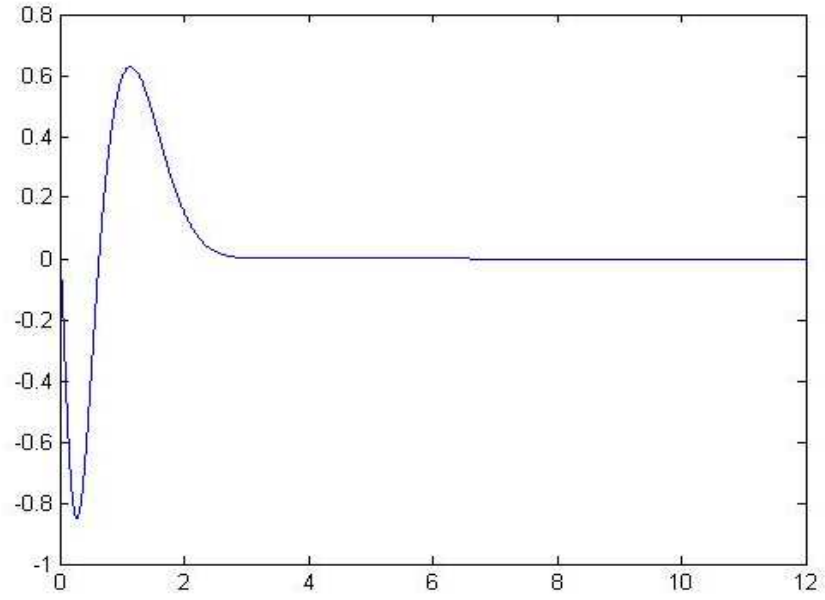


Рис. 1. Перераспределённый заряд $(N_e - 1) \cdot q_{xcp}(r)$ в атоме Al.
Расстояние электрона от ядра даётся в радиусах Бора.

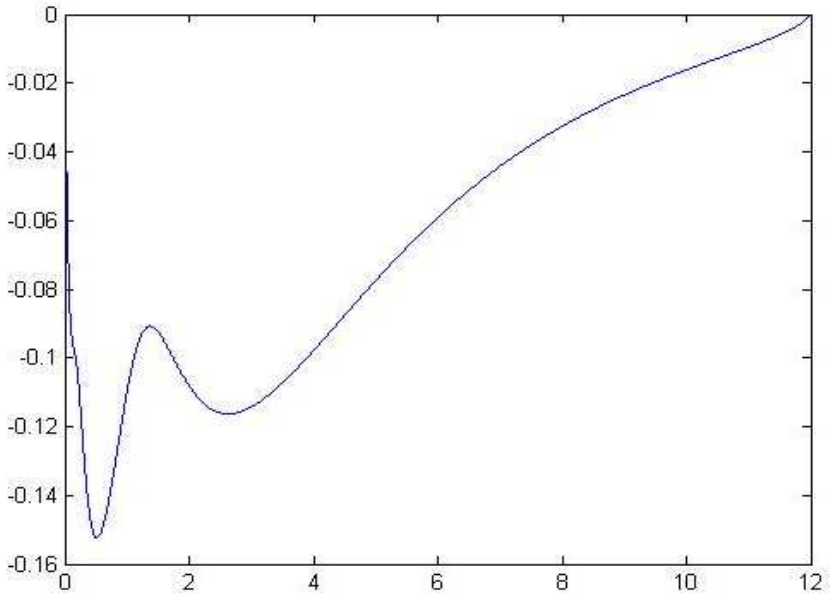
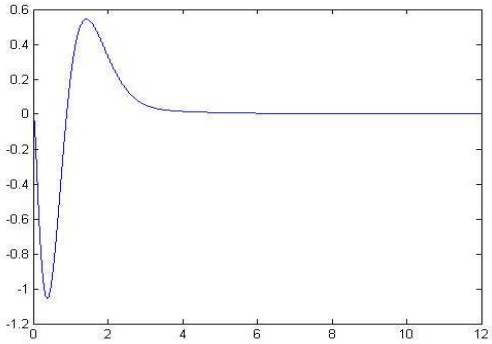


Рис. 2. Заряд Слетера $(N_e - 1) \cdot q_s(r)$ в атоме Al.
Расстояние электрона от ядра даётся в радиусах Бора.

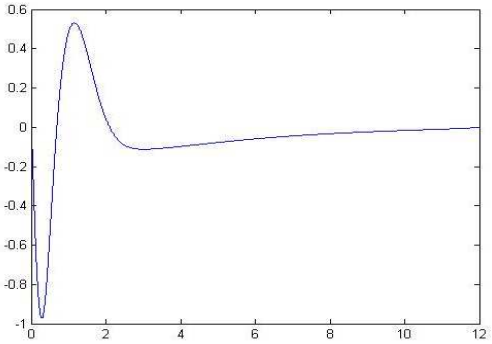
На рис. 2 приведён график зависимости этого заряда от расстояния электрона от ядра для атома Al, рассчитанный по формуле (24). В модели МЛСП константа β, определяющая величину слетеровского заряда, не связана напрямую с обменом, поэтому её знак не всегда положителен. График на рис. 2 соответствует положительному значению $\beta = 0,2047$. Однако, например, в случае кислорода имеем параметр $\beta = -0,0855$, и похожий график

будет располагаться выше оси абсцисс. Обычно константа β не велика, и заряд Слетера играет роль малой добавки к аппроксимированному обменно-корреляционному заряду, а полный перераспределенный заряд имеет вид аналогичный показанному на рис. 1.

Для иллюстрации этого положения на рис. 3 показаны графики суммы перераспределённого заряда $(N_e - 1) \cdot q_{xcp}(r)$ и слетеровского заряда $(N_e - 1) \cdot q_s(r)$ в атомах кислорода с отрицательным коэффициентом β и алюминия с положительным коэффициентом β.



а)



б)

Рис. 3. Полные перераспределенные обменно-корреляционные заряды в атомах кислорода (а) и алюминия (б). Расстояние электрона от ядра даётся в радиусах Бора.

Как видно из рис. 3а и 3б, разный знак заряда Слетера приводит к незначительному перераспределению обменно-корреляционного заряда в области последней занятой электронной оболочки.

В формуле (24) введено также обозначение $q_{har}(r)$ для величины, которую можно назвать средним зарядом Хартри, приходящимся на один электрон:

$$q_{har}(r) = \frac{4\pi}{N_e} \int\limits_r^R x^2 n(x) \left(1 - \frac{r}{x}\right) dx \,. \tag{25}$$

Для удобства используем формулу (18) и перепишем выражение (1) для полной энергии E в виде

$$E = \sum_{\alpha=1}^{Ne} \varepsilon_\alpha - \int V_{at}(\vec{r}) n(\vec{r}) d\vec{r} + E_{har}[n] + E_{xc}[n] + \int V_e(\vec{r}) n(\vec{r}) d\vec{r} \,. \tag{26}$$

Подставляя (24) в (27) и приводя подобные члены, получим окончательное выражение для полной энергии атома:

$$E = \sum_{\alpha=1}^{Ne} \varepsilon_\alpha - (N_e - 1) \cdot 2\pi \cdot \int\limits_0^R r \cdot n(r) \cdot (1 - q_{har}(r) + 0.5 \cdot q_s(r) + q_{xcp}(r)) dr \,. \tag{27}$$

Здесь использованы обозначения (25) для среднего заряда Хартри $q_{har}(r)$ и (24) для заряда Слетера $q_s(r)$, приходящегося на одну частицу.

3. Вычислительный эксперимент. Результаты апробации выведенных нами формул мы дадим на примере расчетов полных нерелятивистских энергий атомов таблицы

Менделеева, от He до Ar. Для нахождения усреднённой по сфере электронной плотности $n(r)$ и занятых уровней энергии ε_i самосогласованное уравнение Кона-Шема (17) с потенциалом (24) решается итерационным методом аналогично [1].

В табл. 1 приведены результаты расчета полной энергии и соответствующие им экспериментальные энергии [6] в электрон-вольтах с поправками на релятивистские эффекты. Полная энергия атома рассчитывалась по формулам (27), (22), (25) и (24), а функция $F(r)$ – по формуле (10). Для сравнения приведены энергии Хартри-Фока, взятые из работы [7]. В таблице также приведены значения энергий ионизации лёгких атомов из [6] и коэффициентов β для заряда Слетера вместе с коэффициентами b для аппроксимирующей функции $F(x)$ соответствующих атомов. Коэффициенты β подбирались так, чтобы экспериментальные энергии ионизации равнялись вычисленным значениям энергии последнего занятого уровня в соответствующих атомах. При этом коэффициенты b подбирались так, чтобы экспериментальные полные энергии совпадали с полными энергиями, вычисленными по формуле (27).

В заключение хочется отметить, что предложенная модификация метода функционала электронной плотности позволяет при очень высокой скорости расчетов получать точные полные энергии и энергии ионизации.

Таблица 1

Результаты расчета полной энергии и энергий ионизации лёгких атомов, а также соответствующие им экспериментальные энергии [6]

Z	At	$E_{exp}[eV]$	$E_{HF}[eV]$	$E_{teor}[eV]$	$E_{iexp}[eV]$	$E_{iteor}[eV]$	β	b
2	He	-79,00	-77,872	-79,0021	-24,5876	-25,7655	0	0,54
3	Li	-203,4	-202,257	-203,397	-5,3918	-5,39199	-0,1614	0,1570
4	Be	-399,1	-396,560	-399,0979	-9,3227	-9,32272	0,0717	0,2035
5	B	-670,8	-667,480	-670,811	-8,2981	-8,29808	0,0192	0,1892
6	C	-1029,7	-1025,57	-1029,694	-11,2643	-11,26434	0,3044	0,7822
7	N	-1485,3	-1480,34	-1485,299	-14,53414	-14,53416	0,4191	1,2304
8	O	-2042,1	-2035,69	-2042,11	-13,618	-13,61809	-0,0855	0,1403
9	F	-2713,2	-2705,1	-2713,163	-17,423	-17,42308	0,0997	0,3369
10	Ne	-3507,8	-3497,99	-3507,803	-21,565	-21,5649	0,2699	0,7032
11	Na	-4415,9	-4404,46	-4415,86	-5,1391	-5,13917	0,0861	0,1785
12	Mg	-5446	-5431,85	-5445,95	-7,6463	-7,6464	0,1635	0,3084
13	Al	-6598	-6581,88	-6598,05	-5,9858	-5,98589	0,2047	0,4003
14	Si	-7879	-7860,22	-7878,96	-8,1517	-8,15172	0,3085	0,6098
15	P	-9291	-9271,54	-9290,93	-10,4868	-10,48676	0,4049	0,9016
16	S	-10839	-10816,79	-10839,03	-10,3600	-10,3601	0,1996	0,6399
17	Cl	-12531	-12503,29	-12530,97	-12,968	-12,9676	0,2940	0,8556
18	Ar	-14371	-14335,6	-14370,98	-15,760	-15,75967	0,3839	1,1275

Литература

1. Шкловский А.Г. Аппроксимация обменно-корреляционного потенциала в методе функционала электронной плотности // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физико-математические науки. – 2007. – 6(37);13. – С.150-155.

2. Теория неоднородного электронного газа / под ред. С. Лундквиста, Н. Марча. – М.: Мир, 1987. – 400 с.

3. Старовойтов А.С., Шкловский А.Г. Обменно-корреляционная энергия в методе локального функционала электронной плотности // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физико-математические науки. – 2006. – 6(26);12. – С.114-121.

4. Слэтер Дж. Методы самосогласованного поля для молекул и твердых тел / Дж. Слэтер. – М.: Мир, 1978. – 658 с.

5. Wigner E.P., Seitz F. // Phys. Rev. – 1933. – 43. – P.804.

6. Бабичев А.П. Физические величины. Справочник / А.П. Бабичев, И.А. Бабушкина, А.М. Братковский, и др. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

7. Фудзинага С. Метод молекулярных орбиталей / С. Фудзинага. – М.: Мир, 1983. – 460 с.

MODIFIED LOCAL POTENTIAL FOR CALCULATION OF ATOMIC IONIZATION ENERGIES

A.S. Starovoitov, A.G. Shklovskii

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: shklovskii@bsu.edu.ru

New model of the exchange-correlated energy at the calculation of total energy by the method of the local functional of electron density is proposed. It makes be possible to compute total atom energies in the accordance with experimental accuracy. It is used the modified local potential which includes the Slater potential and the approximating exchange-correlated potential proposed ealier. To choose the modified potential, it is taken into account that calculated energies of last filled levels would be equal to experimental ionization energies for each corresponding atom.

Key words: electron density functional, local potential, Slater X_α-potential, ionization energy.

УДК: 533.72

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В СФЕРОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ[6)]

Н.Н. Миронова

Белгородский государственный университет
ул.Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: mironovanadya@mail.ru

Получено решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат со степенным видом зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры.

Ключевые слова: обтекание, сфероид, уравнение Навье-Стокса.

1. Система уравнений Навье-Стокса, представляющая собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывает движение вязкой ньютоновской среды (газ, жидкость). Она состоит из уравнения движения и уравнения непрерывности. Система уравнений Навье-Стокса является одним из важнейших объектов изучения в математической физике и она применяется для описания многих природных явлений и технических задач [1-3]. К числу очень важных математических вопросов, связанных с системой Навье-Стокса относятся: доказательство существования у неё глобальных гладких решений трёхмерных начально-краевах задач, нахождение общего аналитического решения системы Навье-Стокса для пространственного или плоского потока и т.д. Влоть до настоящего времени решения системы уравнений Навье-Стокса найдены лишь для некоторых весьма частных случаев [1-3].

При описании движения частиц в разнотемпературных каналах, при зондировании атмосферы лазерным излучением и т.п. средняя температура поверхности частиц может существенно отличаться от температуры окружающей среды вдали от них. В этом случае система уравнений Навье-Стокса решается совместно с уравнениями тепло- и массопереноса. Это связано с тем, что коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) в указанных случаях уже нельзя считать постоянными величинами. В результате получается довольно сложная начально-краевая задача.

При рассмотрении многих прикладных задач газовой динамики общая сила, действующая на рассматриваемую систему, равна нулю, т.е. система движется равномерно и прямолинейно. Например, термофоретическое движение частиц возникает во внешнем поле градиента температуры относительно неподвижного газа. Под действием термофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды частицы приобретают постоянную скорость, называемую скоростью термофореза. В таких задачах начало системы отсчёта координат связывают с центром массы частицы (системы). Это удобно, поскольку в этом случае задача, по существу, сводится к задаче обтекания неподвижной частицы (системы) плоскопараллельным потоком газа со скоростью, равной по величине характерной скорости задачи и направленной в противоположную сторону. Таким образом, при математическом

[6)]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (Государственный контракт №П29 от 25 марта 2010 г.)

описании движения частиц в вязкой неизотермической газообразной среде природа сил, вызывающих это движение, в общем случае не конкретизируется. Она может быть магнитной, электрофоретической, термофоретической, гравитационной и т.д., что позволяет распространять математические методы решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса, разработанные для узкой физической задачи, на очень широкий класс физических задач.

Частицы, входящие в состав реальных систем (газ, жидкость), могут иметь форму поверхности, отличную от сферической, например, сфероидальную (вытянутый или сплюснутый эллипсоид вращения). В настоящее время движение аэрозольных частиц несферической формы достаточно подробно изучено лишь при малых относительных перепадах температуры в их окрестности, в так называемом изотермическом случае, когда пренебрегают зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. При этом влияние нагрева поверхности на движение аэрозолей было изучено лишь в случае сферической формы.

Нами было получено аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат $(\tau,\, \eta,\, \varphi)$ [2]. При этом предполагалось, что имеют место степенные зависимости коэффициентов вязкости $\mu_g = \mu_\infty\ t_g^\beta$, теплопроводности $\lambda_g = \lambda_{g\infty}\ t_g^\alpha$, $\lambda_p = \lambda_{p\infty}\ t_p^\gamma$ и плотности $\rho_g = \rho_{g\infty}/t_g$ газообразной среды от температуры $(\mu_\infty = \mu_g\,(T_\infty)$, $\lambda_{g\infty} = \lambda_g\,(T_\infty)$, $\rho_{g\infty} = \rho_g\,(T_\infty)$, $t_g = T_g/T_\infty$, $0,5 \le\ \alpha,\, \beta \le 1$, $-1 \le \gamma \le 1)$. Здесь и далее, индексы "g" и "p" будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом "∞" обозначены параметры газообразной среды на бесконечности в невозмущенном потоке.

Проведенное исследование показало, что при поиске решений в виде выражений для компонент массовой скорости газа в виде

$$U_g\,(\tau,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\tau\,\mathrm{ch}\tau}\,G\,(\tau)\,\cos\eta\,, \qquad U_\eta\,(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty}{c\,H_\tau}\,g\,(\tau)\,\sin\eta\,,$$

где $G\,(\tau)$ и $g\,(\tau)$ – некоторые произвольные функции, зависящие от радиальной координаты τ; H_τ – коэффициент Ламе [2]; U_∞ – величина скорости набегающего потока, линеаризованную по скорости систему уравнений Навье-Стокса можно свести к обыкновенному неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции $G\,(\tau)$ с изолированной особой точкой, решение которого можно получить в виде обобщенных степенных рядов [4-7]. При этом радиус сходимости степенных рядов, определяющих решения полученного уравнения, равен единице.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

2. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

3. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1961. – 704 с.

5. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука. 1978. – 224 с.

APPROXIMATED ANALYTIC SOLUTION OF VELOCITY LINEARIZED STOKES EQUATION IN SPHEROIDAL COORDINATE SYSTEM

N.N. Mironova

Belgorod State University
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: mironovanadya@mail.ru

The solution of velocity linearized Stokes equation in spheroidal coordinate system is obtained. It is used the power-type form of the dynamical viscousity dependence on temperature.

Key words: flow around, spheroid, Stokes equation.

УДК 669.15-194.55:621.785.7

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТПУСКА НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТАЛИ 10Х9В1М1ФБР

А.Ю. Кипелова, М.В. Однобокова, И.В. Дудзич

Белгородский государственный университет
ул.Победы, 85, г.Белгород, 308015, Россия, e-mail: kipelova@bsu.edu.ru

Изучено влияние термической обработки на статические механические свойства стали 10Х9В1М1ФБР.

Ключевые слова: стали мартенситного класса, отпуск, микроструктура, механические свойства.

1. Введение

В последние десятилетия высокохромистые жаропрочные стали мартенситного класса рассматриваются как перспективные материалы для компонентов энергоблоков электростанций нового поколения, работающих на угле [1, 2]. В настоящее время за рубежом разработан целый ряд жаропрочных сталей мартенситного класса, работающих при температурах пара $\leq 620°C$. Их режим термической обработки представляет собой нормализацию с последующим отпуском. Параметры структуры, формирующиеся в сталях мартенситного класса при отпуске, определяют весь комплекс механических свойств теплотехнических сталей. Соответственно, результаты детальных исследований процессов, происходящих при отпуске в сталях мартенситного класса, позволят разработать оптимальные режимы термообработки, так как дадут необходимую информацию для управления их структурой и механическими свойствами. В свою очередь, это позволит существенно повысить эксплуатационные свойства жаропрочных сталей мартенситного класса.

Целью настоящей работы является определение зависимости механических свойств стали 10Х9В1М1ФБР от температуры отпуска.

2. Методика проведения исследований

Была исследована жаропрочная сталь 10Х9В1М1ФБР следующего химического состава (% массы): 0,13C, 9,5Cr, 0,95W, 1,04Mo, 0,2V, 0,06Nb, 0,05N, 0,005B, 0,03Mn, 0,01Ni, 0,12Si, 0,01P, 0,01S, вся остальная доля массы – Fe. Образцы подвергали нормализации от 1060°C и отпуску в интервале температур 200 – 800°C в течение 3 ч. Определяли влияние температуры на характеристики статической прочности и пластичности. Для этого образец после отпуска при заданной температуре в обычной печи охлаждали. Затем его заново нагревали до этой же температуры в печи универсальной испытательной машины "Instron 5882" и испытывали на растяжение со скоростью деформации $1 \cdot 10^{-3}с^{-1}$.

Использовались плоские образцы с рабочей частью длиной 25 мм и поперечным сечением $7 \cdot 3$ мм.

Для экспериментируемых образцов определялось влияние температуры отпуска на их твёрдость при комнатной температуре. Твёрдость по Бринеллю измерялась с помощью цифрового твёрдомера фирмы Wolpert 3000BLD при нагрузке 29400 Н с применением шарика диаметром 10 мм из твёрдого сплава. Анализ тонкой структуры образцов осуществлялся с использованием просвечивающего электронного микроскопа (ПЭМ) Jeol

"JEM-2100" с ускоряющим напряжением 200 кВ. Определение характеристик структуры мартенсита выполняли с использованием сканирующего электронного микроскопа FEI "Quanta 600F", оснащённого анализатором дифракции обратно рассеянных электронов. По данным дифракции обратно рассеянных электронов, строили карты разориентировок с учётом угловых разориентировок выше 2°.

3. Исходная микроструктура

Микроструктура, сформировавшаяся в стали 10Х9В1М1ФБР после нормализации от 1060°С, показана на рис. 1. По данным дифракции обратно рассеянных электронов, 55% разориентировки границ являются высокоугловыми (рис. 1а), при этом 20% границ имеют кристаллографические параметры, которые в соответствии с критерием Брэндона позволяют отнести их к специальным границам. Средний угол разориентировки границ составил 32°. Нужно отметить, что представленные данные по доле высокоугловых границ несколько завышены, поскольку при построении карт разориентировок не учитывали малоугловые границы с разориентировкой менее 2°.

Тонкая структура стали 10Х9В1М1ФБР представлена на рис. 1б. Поперечный размер реек пакетного мартенсита составляет около 200 нм. Внутри реек мартенсита наблюдается высокая плотность дислокаций – $9 \cdot 10^{14}$ м$^{-2}$. После закалки наблюдаются пластины карбида типа Me_3C, выделившегося в процессе самоотпуска. Кроме того, электронно-микроскопическое исследование выявило как первичные, так и вторичные карбонитриды круглой формы типа Nb(C,N). Вторичные карбонитриды типа Nb(C,N) располагаются равномерно по объему стали.

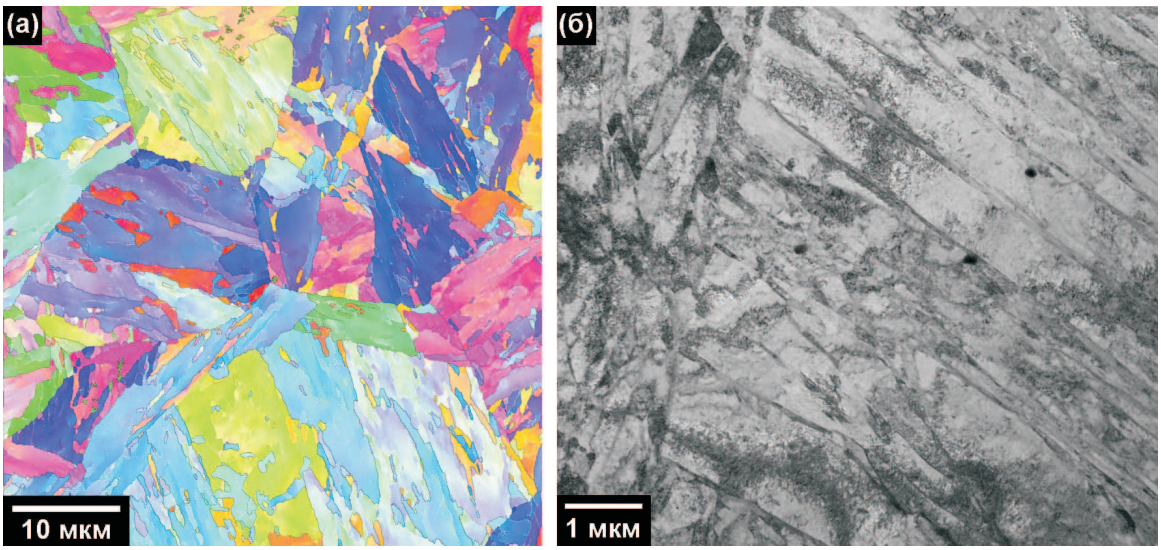


Рис. 1. Карта разориентировок (а) и микроструктура (ПЭМ) (б) стали 10Х9В1М1ФБР после нормализации от 1060°С. Границы с разориентировкой менее и более 15° показаны соответственно белым и черным цветом.

4. Механические свойства

Влияние температуры отпуска на твёрдость показано на рис. 2а. Видно, что повышение температуры отпуска приводит к увеличению твёрдости, которая достигает своего максимума при 500°С. Твёрдость образца после отпуска при этой температуре на 5% выше, чем

после нормализации, т.е. сталь 10Х9В1М1ФБР ведёт себя как классическая дисперсионно-упрочняемая сталь – проявляет как первичную, так и вторичную твёрдость. Дальнейшее повышение температуры приводит к непрерывному уменьшению твёрдости. После отпуска при 760°С она уменьшается почти в 2 раза по сравнению с максимумом при 500°С. Твёрдость снижается до 218 HBW, что является максимальной величиной, при которой теплотехническая сталь обладает удовлетворительной свариваемостью и может эксплуатироваться [3]. Следовательно, температура отпуска 760°С при выдержке 3 ч обеспечивает оптимальное значение твёрдости для стали 10Х9В1М1ФБР.

Температурная зависимость предела текучести $\sigma_{0,2}$ и временного сопротивления разрыву σ_B представлена на рис. 2б. В интервале температур испытания 200 - 400°С в стали 10Х9В1М1ФБР наблюдается позитивная температурная зависимость условного предела текучести: повышение температуры деформации способствует повышению напряжений течения. Это достаточно редкий для металлических материалов феномен [4, 5]. Причём, при 400°С величина $\sigma_{0,2} = 960$ МПа, что достаточно много для стали, содержащей всего 0,13% С.

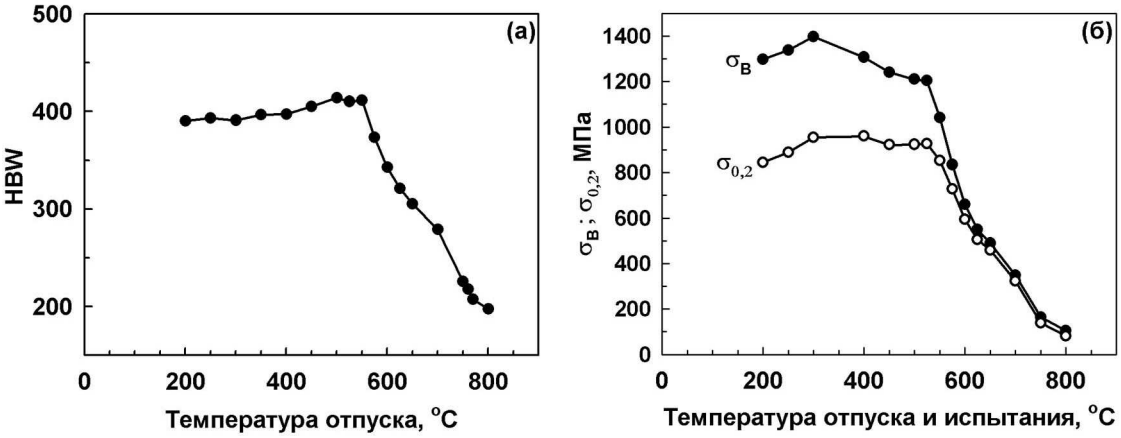


Рис. 2. Зависимость твёрдости HBW (а) от температуры отпуска и зависимость механических характеристик (σ_B, $\sigma_{0,2}$) от температуры отпуска и испытаний (б).

При дальнейшем повышении температуры испытаний от 525 до 800°С начинается резкое снижение характеристик прочности (рис. 2б). Следует отметить, что почти при всех температурах испытаний $t < 575$°С отношение $\sigma_B/\sigma_{0,2} > 1{,}3$, а при $t \geq 575$°С оно становится близко к 1. Следовательно, повышение температуры испытаний в интервале 575-800°С уменьшает величину деформационного упрочнения.

5. Выводы

1. Нормализация от 1060°С приводит к образованию пакетного мартенсита с поперечным размером реек 200 нм и плотностью дислокаций $9 \cdot 10^{14}$м$^{-2}$.

2. Температура отпуска 760°С при выдержке 3 ч обеспечивает оптимальное значение твёрдости для стали 10Х9В1М1ФБР.

Работа выполнена на оборудовании Центра коллективного пользования научным оборудованием Белгородского государственного университета при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию, в рамках государственного контракта № П846.

Литература

1. Vaillant J.C., Vandenberghe B., Hahn B., Heuser H., Jochum C. // T/P23, 24, 911 and 92: New grades for advanced coal-fired power plants-properties and experience // Inter. J. Press. Vess. Pip. – 2008. – 85. – P.38-46.

2. Ennis P.J., Czyrska-Filemonowicz A. Recent Advances in Creep Resistant Steels for Power Plant Applications // Operation Maintenance Mater. Issue. – 2002. – 1;1. – P.1-28.

3. Haarmann K., Vaillant J.C., Vandenberghe B. Bendick W., Arbab A. Vallourec & Mannesmann Tubes. The T91/P91 book. – 2002. – P.62.

4. Couret A., Caillard D. Prismatic slip in beryllium. I. The controlling mechanism at the peak temperature // Phil. Mag. A. – 1989. – 59;4. – P.783-800.

5. Кипелова А.Ю., Беляков А.Н., Скоробогатых В.Н., Щенкова И.А., Кайбышев Р.О. Структурные изменения при отпуске в стали 10Х9К3В1М1ФБР и их влияние на механические свойства // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2010. – 657;3. – С.14-25.

INFLUENCE OF TEMPERING TEMPERATURE ON 10Kh9V1M1FBR STEEL MECHANICAL PROPERTIES

A.Yu. Kipelova, M.V. Odnobokova, I.V. Dudzich

Belgorod State University
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kipelova@bsu.edu.ru

The result of heat treatment on static mechanical properties of 10Kh9V1M1FBR steel was studied.
Key words: martensitic steels, tempering, microstructure, mechanical properties.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Блажевич С.В. – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Ванько В.И. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (г. Москва)

Вирченко Ю.П. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Витохина Н.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и теории чисел Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Волчок О.И. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ННЦ «Харьковский физико-технический институт» НАНУ (г. Харьков)

Довбня А.Н. – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАНУ, директор Института высоких энергий и ядерной физики Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» НАНУ (г. Харьков)

Дьяконов Г.С. – младший научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Дудзич И.В. – аспирант кафедры материаловедения и нанотехнологий Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Жеребцов С.В. – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Камышанченко Н.В. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Кипелова А.Ю. – инженер Центра наноструктурных материалов Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Корнеева Е.А. – аспирант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Красильников В.В. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры материаловедения и нанотехнологий Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Кузнецов Д.П. – магистрант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Кунгурцев М.С. – аспирант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Купленников Э.Л. – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» НАНУ (г. Харьков)

Кучеев С.И. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Лопатин Н.В. – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории объёмных наноструктурных материалов Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Малай Н.В. – доктор физико-математических наук, декан физического факультета, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Миронова Н.Н. – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Неклюдов И.М. – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАНУ, директор ННЦ «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины (г. Харьков)

Никулин И.С. – аспирант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Носков А.В. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Однобокова М.В. – аспирант кафедры материаловедения и наноструктурных материалов Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Рязанов К.С. – ассистент кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Салищев Г.А. – доктор технических наук, профессор, руководитель лаборатории объёмных наноструктурных материалов Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Сапрыкин М.А. – аспирант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Старовойтов С.А. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Тучина Ю.С. – аспирант кафедры общей физики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Цымбал В.А. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ННЦ «Харьковский физико-технический институт» НАНУ (г. Харьков)

Шкловский А.Г. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета (г. Белгород)

Щукин Е.Р. – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник ИВТ РАН (г. Москва)

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. Два выпуска журнала посвящены чисто математическим работам и два – работам по физике и прикладной математике.

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков и физиков в соответствии с выпуском журнала. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (условий проведения эксперимента, если это экспериментальная работа по физике). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором (ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата A4. Она должна быть написана шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

Представленная рукопись после подготовки одним из членов редколлегии заключения о её соответствии нормам журнала "Научные ведомости" рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

Рукопись должна состоять из следующих частей:

1) основной содержательной части, представляемой на русском или английском языках. При этом название статьи не должно состоять не более чем из 20 слов.

2) номера УДК того научного направления, которому посвящена статья;

3) списка авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке. Её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) списка ключевых слов (не более 10-12);

6) перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английский язык;

7) списка литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данных об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании.

Особое внимание должно быть уделено рисункам, если они имеются в рукописи. Они должны быть качественно оформлены и приготовлены в виде отдельных электронных файлов в формате "ps"(можно также присылать файлы рисунков в формате "eps", но при этом, они должны быть транслированы в этот формат посредством программы "Coreldraw"так, чтобы их можно было транслировать в формат "ps"). Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п.7).

Внимание!

1. На представляемых в электронном формате рисунках не следует наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

2. Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Обращаем внимание авторов на то, что список литературы должен быть оформлен строго в соответствии с существующими ГОСТами. При этом нужно обратить особое внимание на то, чтобы были указаны полные названия журнальных статей и статей в сборниках, на которые есть ссылки в тексте рукописи, а также указание не только начальных страниц этих статей, но, обязательно, также и конечных. Каждая из монографий в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (LaTeX, AMS LaTeX) следующие:

1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;

2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерация, соответствующая номеру формулы в тексте. Допускается применение для формульных меток цифр,

снабжённых штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако, этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста;

3) в случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложнения. Каждый из разделов-приложений начинаются словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть равняться по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения;

4) литературные источники в ссылках на основе команд ref или cite в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.