№ 13 (68) 2009
Выпуск 17/2
НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского государственного университета

Основан в 1995 г.

Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics Physics

Учредитель:
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный университет»
Издатель:
Белгородский государственный университет.
Издательство БелГУ
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-21121 от 19 мая 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Оригинал-макет *Бекназаров М.Н.*
E-mail: beknazarov@bsu.edu.ru
Подписано в печать 25.12.2009 г.
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia, Impact
Усл. п. л. 15,57
Тираж 500 экз.
Заказ 251

Подписные индексы:
в каталоге агентства «Роспечать» – 81631,
в объединенном каталоге
«Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован
в издательстве Белгородского государственного университета
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

№ 13 (68) 2009
Issue 17/2
SCIENTIFIC REVIEWING JOURNAL

Founded in 1995

Belgorod State University
Scientific bulletin
Mathematics Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Белгородского государственного университета
Математика Физика

Founder:
State educational establishment of higher professional education "Belgorod State University"

Publisher:
Belgorod State University
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media
ПИ № ФС 77-21121 May, 19 2008.

CONTENTS

Dummy layout by M.N Beknazarov
e-mail: beknazarov@bsu.edu.ru
Passed for printing 25.12.2009
Format 60x84/8
Typeface Georgia, Impact
Printer's sheets 15,57
Circulation 500 copies
Order 251

Subscription reference in Rospechat'
agency catalogue – 81631,
In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at
Belgorod State University Publishing House
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

ВВЕДЕНИЕ

25 октября 2009 г. в БелГУ состоялась вторая сессия Российско-Китайского симпозиума «Комплексный анализ и его приложения. Первая сессия прошла в Москве в Институте проблем управления РАН с 21 по 24 октября 2009 г. Эти сессии были организованы Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) и Национальным фондом естественных наук Китая (НФЕК) в рамках совместного научного проекта «Комплексный анализ и его приложения» при поддержке ИПУ РАН и БелГУ.
В организационный комитет сессии вошли А. П. Солдатов (Белгород, Россия) председатель, Ч.-Ч. Янг (Гонконг, КНР), почетный председатель, А. Г. Александров (Москва, Россия), П.Ху (Шандонг, КНР).

Сессия была посвящена комплексному анализу и его приложениям в теории дифференциальных уравнений, динамических систем, в топологии и геометрии, в теории функций и пр. Целью симпозиума явилось обсуждение наиболее актуальных проблем комплексного анализа и его приложений, выявление новых перспектив развития научных исследований, а также возможностей для совместных научных исследований.

В состав иностранных участников конференции вошли такие крупные математики, как проф. П.Ху (Hu Peichu – КНР), проф. Ч.Ч. Янг (Chung Chun Yang - Гонконг), проф. Ванг (Wang Jian Ping – КНР), проф. Ксю (Jun Feng Xu - КНР), проф Киан Т. (Tao Qian – Австралия) , проф. Ш. Таджима (Sh. Tajima – Япония) и др. С обзорным докладом выступил действительный член польской АН, проф. Б. Боярский. В географии научных докладов представлены также Харьков и Донецк (Украина), Алма-Ата (Казахстан), Ереван (Армения).

В рамках научной программы с российской стороны приняли участие известные специалисты в области комплексного анализа и дифференциальных уравнений из многих научных центров страны, включая Москву, Санкт-Петербург, Новосибирск, Челябинск, Уфу, Красноярск и университеты центрального региона. В частности, от Московского государственного университета выступили с докладами профессора В.Н. Чубариков (декан механико-математического факультета) и Е.В. Радкевич, А.В. Боровских (кафедра дифференциальных уравнений), Вычислительный центр им. Дородницына РАН представлен проф. В.И. Власовым, приняли также участие проф. А.И. Назаров (Санкт-Петербургский госуниверситет) и проф. А.И. Кожанов (Новосибирский госуниверситет). В работе симпозиума широкое участие приняли ведущие математики Белгородского госуниверситета – проф. А.П. Солдатов, проф.А.М. Мейрманов, проф. О.М. Пенкин, проф. А.В. Глушак, проф. С.А. Гриценко и др. Труды симпозиума представлены в нескольких номерах журнала «Научные ведомости Белгородского государственного университета», включая настоящий выпуск.

УДК 515.17

STRATUM OF FREENESS FOR DEFORMATIONS OF SINGULARITIES

A.G. Aleksandrov

Institute for Control Sciences, Russian Academy of Sciences,
Profsojunaja str., 65, Moscow, 117997, Russian Federation, e-mail: ag_aleksandrov@mail.ru

Abstract. The purpose of this note is to study the problem of classification of quasihomogeneous Saito free divisors making use of deformation theory of varieties with $\mathbb{G}_m$-action. In particular, we describe an approach for computation of the stratum of freeness for deformations of quasicones over quasismooth varieties. We also discuss some useful applications in a more general context including methods of computation of this stratum for deformations of hypersurface singularities, the compactification of modular spaces, etc.

Keywords: logarithmic vector fields, free divisors, free deformations, compactification, stratum of freeness.

Introduction

The purpose of this note is to study the problem of classification of quasihomogeneous Saito free divisors making use of deformation theory of varieties with $\mathbb{G}_m$-action. In particular, we describe an approach for computation of free deformations of quasicones over quasismooth varieties. We also discuss some useful applications in a more general context. Among other things we show that from quite a general point of view in the theory of isolated singularities Saito free divisors play a role of stable curves of the classical theory of compactification of the moduli space for curves of given genus.

In the first section a brief survey of classification methods and technique is given. In the next three sections basic notions and results from the deformation theory of varieties with $\mathbb{G}_m$-action are described. Then we discuss the notion of Saito singularities, their basic properties and relations with problems of classification of non-isolated hypersurface singularities and compactification of flat families, deformations of isolated singularities. Some computational examples, problems and applications are also considered including computation of freeness locus for deformations of certain simple and unimodal singularities.

The paper clarifies the construction of a series examples of Saito free divisors in 3-dimensional case recently produced by J.Sekiguchi (see [19], [20], [21]). In contrast with our methods his approach is based essentially on the classification of Lie algebras formed by logarithmic vector fields tangent to a hypersurface.

1 Methods of classification, enumeration and deformations

Many problems concerning classification and enumeration of singularities are closely related with different aspects of the modern singularity theory. In general, one may consider different equivalence relations between singularities such as the right equivalence (change of coordinates in the source of defining mapping), contact equivalence (change of coordinates and multiplication

Partially supported by the Russian Foundation of Basic Research (RFBR) and by the National Natural Science Foundation of China (NSFC) in the framework of the bilateral project "Complex Analysis and its applications"(project No. 08-01-92208)

with a unit, that is, preserving the isomorphism class of the corresponding germ), and others. Anyway the initial stage of the solving of classification problems is a description of simple singularities. As a rule, one can write out a finite or at least perceptible list of normal forms or similar data. However a scheme of classification of more complicated isolated singularities seems to be a rather nontrivial and hard problem since such phenomenon as moduli or parametric families may occur. Furthermore, essential and serious difficulties arise in the theory of non-isolated singularities. Among different approaches to further classification it seems methods of the deformation theory are very fruitful and useful. The following observation is also very important: some types of non-isolated singularities appear as degenerate fibers in parametric families or deformations of isolated singularities, other ones (for example, divisors with normal crossing) are natural ingredients of compactifications of algebraic varieties in the Hodge theory and in related questions, and so on.

Historically, the theory of singularities originated in studies of quasihomogeneous functions with isolated critical points or, in other terms, hypersurfaces with isolated singularities given by quasihomogeneous functions. Unfortunately, in contrast with the theory of isolated singularities the type of homogeneity in non-isolated case does not determine neither topological nor analytical structure of singularities. Moreover, there are types of homogeneity associated with non-isolated singularities that can not be realized as types of isolated singularities at all.

In fact, there is a natural approach to the problem of classification of all objects of some given type. If one can organize them into families which are, in some extended sense, "continuous and then determine how nearby objects are related, their basic properties become more understandable and clearly expressed. The idea of continuous families or, in other words *deformations*, of abstract objects goes back at least to B.Riemann who found that the isomorphism classes of Riemann surfaces of genus $g > 0$ form a single continuous, almost everywhere analytic, complex family. Its complex dimension, called by B.Riemann "the number of moduli is given by the Riemann-Roch theorem and is equal to 1 for $g = 1$ and $3g - 3$ for $g > 1$.

There are few different ways of looking at the problem of classification or enumeration; they occur naturally in the context of the deformation theory. Thus in order to classify non-isolated singularities one can endeavor to create a list of them ordered by some rules or numerical invariants: Milnor numbers, types of homogeneity, weights of variables or vector fields, etc. It is also very important to choose a suitable representation for members of the list. In the standard theory one usually takes generators of the defining ideal, functions or polynomials, in other terms, normal forms of singularities (see [9], [1]). However in the non-isolated case any classification depends on types of singular loci of singularities themselves. So it is necessary to analyze singular loci. Further, it is possible to classify all pairs of singular hypersurfaces and their singular loci. Another way is to obtain a classification of local algebras associated with singularities, Lie algebras of differentiations (see [21]), and so on.

2 Singularities with $\mathbb{G}_m$-action

Let k be a field of characteristic zero, and let $P_w = k[z_1, \ldots, z_n]$ be the polynomial algebra graded as follows: $\deg(z_i) = w_i \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, \ldots, n$. Then $\mathbb{P}(w) = \mathrm{Proj}(P_w)$ is called the weighted projective space of type $w = (w_1, \ldots, w_n)$. For brevity, let us set $P = P(1, \ldots, 1)$ and, similarly, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, \ldots, 1)$. It should be underlined that weighted projective spaces are toric varieties.

Let X be a closed subscheme of a weighted projective space $\mathbb{P}(w)$. Denote by $U = \mathbb{A}^n - \{0\} = \mathrm{Spec}(P) - \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = (z_1, \ldots, z_n)$, and let $p\colon U \to \mathbb{P}(w)$ be the canonical projection. The scheme closure C_X of $p^{-1}(X) \subset \mathbb{A}^n$ is called the affine quasicone over X. The point $0 \in C_X$ is called the vertex of C_X.

Let $\mathbb{G}_m$ be the group k^* of units of the ground field k under multiplication. An affine algebraic variety V over k is called the quasicone if there is an effective action of $\mathbb{G}_m$ on V such that the intersection of the closures of all orbits is a closed point, the vertex of the quasicone. It is well-known that any affine quasicone is a quasicone. Conversely, any quasicone without embedded components in its vertex is an *affine* quasicone C_X for some $X \subset \mathbb{P}(w)$ (cf. [10]).

Denote by J the defining ideal of X in $\mathbb{P}(w)$ and by $I \subset P$ the ideal of C_X in $\mathbb{A}^n$. In the ordinary projective case (that is, $w = (1, \ldots, 1)$) we have

$$I \cong H^0(U, p^*(J) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}} \mathcal{O}_U) \cong \oplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^0(U, p^*(J) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}} \mathcal{O}_U(\nu)).$$

In particular, the ideal I is homogeneous. By analogy, it is possible to prove that for an arbitrary quasicone V there is a closed embedding $\iota\colon V \to \mathbb{A}^n$ such that the ideal of $\iota(V)$ is generated by weighted homogeneous polynomials with integer positive weights (called, for brevity, homogeneous elements of the graded ring $P(w)$).

Closed subvarieties in weighted projective spaces are called *affine* isomorphic if their affine quasicones are isomorphic; they are called *projectively* isomorphic if their quasicones are $\mathbb{G}_m$-isomorphic.

3 Deformations of weighted hypersurfaces and quasicones

A closed subscheme $X_0 \subset \mathbb{P}(w)$ is called quasismooth if the corresponding affine quasicone $Y_0 = C_{X_0}$ is smooth outside its vertex, that is, Y_0 has an isolated singularity at the vertex. In particular, a quasismooth variety as well as its affine quasicone are reduced schemes.

It is well-known that in quasismooth case the $\mathbb{G}_m$-action on Y_0 can be extended to the minimal versal deformation. Moreover, the space of infinitesimal deformations of the first order $T^1(Y_0)$ is endowed with a natural grading $T^1 = \oplus_{\nu \in \mathbb{Z}} T^1(Y_0)_\nu$. Of course, T^1 is finite-dimensional over the ground field, its dimension is called the Tjurina number of the singularity; it is denoted by τ.

Below we restrict ourselves to the case when X_0 is a quasismooth hypersurface. Thus the ideal I of C_{X_0} is generated by a homogeneous element $f \in P(w)$, that is, by a quasihomogeneous polynomial in P, so that $g \in \mathbb{G}_m$ takes f to $g^d f$ for some $d \in \mathbb{Z}_+$ called the degree or weight of f. The collection $(d; w_1, \ldots, w_n)$ is called the type of weighted singularity X_0 or its quasicone Y_0; it is denoted by π. Choose also a homogeneous (monomial) basis $\sigma_k \in T^1(Y_0)_{\nu_k}$, $\sigma_k \in P$, $k = 1, \ldots, \tau$, and set $R = k[[t_1, \ldots, t_\tau]]$, $S = \mathrm{Spec}(R)$. Then the minimal versal deformation $\phi\colon Y \to S$ of the singularity Y_0 is defined by the element $F = f + t_1\sigma_1 + \ldots + t_\tau\sigma_\tau \in R[z_1, \ldots, z_n]$, so that t_k has weight $-\nu_k$ under the natural action of $\mathbb{G}_m$.

Now one can projectivize the fibers of the versal deformation without projectivization of its base substituting $t_i z_0^{-\nu_i}$ for t_i in F (cf. [15], (13.3)). Denote the polynomial so obtained by $\overline{F}$. Then the quotient ring $A = R[z_0, \ldots, z_n]/(\overline{F})$ is a graded k-algebra in $z_0, \ldots, z_n$ alone with $z_1, \ldots, z_n$ having the same weights w_i as before and z_0 having weight 1. In the case when $-\nu_i \geq 0$ for all $i = 1, \ldots, \tau$, that is, C_{X_0} has negative grading in the sense of [15] the morphism $\varphi\colon \overline{Y} = \mathrm{Proj}(A) \to S$ is flat and proper with fibers reduced projective curves (cf. [loc. cite],

(13.4)). All the fibers of the flat morphism φ (as well as ϕ) a given $\mathbb{G}_m$-orbit of S are isomorphic. Of course, φ is not, in general, versal or minimal versal.

Remark. One can often take the weight of new variable z_0 equals not only to 1, but to any positive (or even non-positive) integer. In general it gives different projectivizations and families of singularities.

Let U be the open subset of S consisting of all the points $s \in S$ such that fibers Y_s of the deformation $\phi\colon Y \to S$ are smooth. Then U is $\mathbb{G}_m$-invariant as well as its complement $D = S\backslash U$, called the discriminant of the deformation ϕ. It is well-known that for the minimal versal deformation of a hypersurface isolated singularity the discriminant D is reduced and defined by a principal ideal in the base ring R. So one can choose its generator as a quasihomogeneous polynomial $h \in R$ without multiple factors. When ϕ is not minimal versal then D may have multiple components. On the other hand, points of U correspond namely to fibers of the flat mapping φ, which are reduced smooth projective curves, while all the fibers φ over D are singular.

Of course, this construction can be applied to deformations of Y_0 associated with arbitrary collections of monomials σ_i of $T^1(Y_0)$. When the family ϕ is the minimal versal deformation then U as well as D are non-empty sets. In general, U may be empty while D is always non-empty because the discriminant contains the origin.

4 Weighted plane curves

It is well-known that a quasismooth hypersurface X_0 of type $\pi = (d; w_0, w_1, w_2)$ in a weighted projective plane is a smooth projective curve (see [10]); its affine quasicone Y_0 has an isolated singularity at the origin given by a weighted-homogeneous polynomial of degree d. Set $c = d - w_0 - w_1 - w_2$, so that $-c$ is equal to the weight of a generator of Grothendieck dualizing module in virtue of the canonical isomorphism $\omega_{Y_0} \cong \mathcal{O}_{Y_0}(dz/df)$. In fact, c is nothing but the degree of canonical class of the projective curve X_0. Then any weighted plane curve with $c < 0$ is affine isomorphic to one of curves with simple elliptic singularities of types A_k, D_k, E_6, E_7, E_8. A weighted plane curve with $c = 0$ is projectively isomorphic to one of three types of weighted curves with parabolic singularities P_8, X_9, J_{10}. Furthermore, there are only 31 non-isomorphic weighted plane curves with $c = 1$ (see Table (5.5) in [2]). Moreover, it is possible to prove that for any fixed c there is only a finite number of collections $(d; w_0, w_1, w_2)$ for which there exists a smooth weighted plane curve of the same type π (cf. [10]).

Let us illustrate the construction from the previous section by concrete examples of quasicones over isolated singularities. First, let Y_0 be a simple A_1-singularity. Set $z_1 = y,\ z_2 = z$. Then Y_0 is defined by $f = y^2 + z^2$, and $T^1(Y_0) = k\langle 1\rangle$ is generated by the unit of k. Let us consider the principal deformation $F = y^2+z^2+t,\ t \in k$. The discriminant of the deformation consists of one point, the origin, its defining equation is $t = 0$. There are many different ways to projectivize fibers. For example, one gets two flat mappings φ associated with polynomials $\overline{F}_1 = tx+y^2+z^2$ and $\overline{F}_2 = tx^2 + y^2 + z^2$, where $x = z_0$ has weight equals to 2 and 1, respectively; and so on. In the first case quasicones over fibers $\overline{Y}_t$ for all $t \neq 0$ are isomorphic to a hyperplane. While in the second case all the fibers $\overline{Y}_t$ of the deformation φ are isomorphic to a smooth rational projective curve, the projectivization of the Milnor fiber of the deformation. In this case the quasicones over $\overline{Y}_t$ are isomorphic to an ordinary cone having a normal singularity at the origin. In both cases the quasicones over the fiber $\overline{Y}_0$ are isomorphic to a two-dimensional linear non-isolated singularity of type A_∞.

Similarly, in the case of an A_2-singularity we have $f = y^2 + z^3$, the space $T^1 = k\langle 1, z\rangle$ is generated by two monomials. As before one can consider two different projectivizations: $\overline{F}_1 = y^2 + z^3 + t_2x^2z + t_1x^6$, and $\overline{F}_2 = y^2 + z^3 + t_2xz + t_1x^2$, where $t_1, t_2 \in k$. In both cases the discriminant D is defined as zero set of the function $h = 27t_1^2 + 4t_2^3$. Further, all the fibers of φ over U are smooth curves and their quasicones have isolated singularity at the origin, they are normal varieties. Fibers over the discriminant D are singular, their quasicones are two-dimensional affine hypersurfaces with non-isolated singularities.

5 Saito free divisors and non-isolated Saito singularities

Let S be the germ of a complex manifold of dimension m, and let $D \subset S$ be a reduced hypersurface defined by $h \in \mathcal{O}_S$. Following K.Saito [16], we denote the $\mathcal{O}_S$-module of vector fields *logarithmic* along $D \subset S$ by $\mathrm{Der}_S(\log D)$. This module consists of germs of holomorphic vector fields $V \in \mathrm{Der}(\mathcal{O}_S)$ on S such that $V(h)$ belongs to the principal ideal $(h)\cdot\mathcal{O}_S$. The hypersurface $D \subset S$ is called *Saito free* divisor if the module of germs of logarithmic vector fields $\mathrm{Der}_S(\log D)$ is a free $\mathcal{O}_S$-module (cf. [11]).

It should be remarked that the singular locus of a Saito divisor has codimension one; in other words, this hypersurface has non-normal singularities (see [5]). The following statement is due to K.Saito [16], it gives a criterion of freeness for reduced hypersurfaces.

Proposition 1 (Saito's Criterion) *The $\mathcal{O}_{S,0}$-module $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ is free if and only if there are m germs of logarithmic vector fields $V^0, \dots, V^{m-1} \in \mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ such that the determinant of the $m \times m$-matrix $\mathcal{V} = \| v_{ij}\|$ whose entries are the coefficients of V^i, $i = 0, \dots, m-1$, is equal to αh, where α is a unit. These vector fields form a basis of $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$.*

For example, $\mathrm{Der}_S(\log D)$ as well as its $\mathcal{O}_S$-dual $\Omega^1_S(\log D)$, the module of logarithmic differential forms with poles along D, are locally free if D is a hyperplane, a plane curve or a divisor with *strict* normal crossings. In the latter case a defining equation of D can be written as $h = z_1 \cdots z_k = 0$, where $k \le m$. It is not difficult to verify that $\Omega^1_S(\log D) \cong \Omega^1_S[\log D]$, where

$$\Omega^1_S[\log D] = \mathcal{O}_S\left\langle \frac{dz_1}{z_1}, \dots, \frac{dz_k}{z_k}, dz_{k+1}, \dots, dz_m \right\rangle.$$

Further, the discriminants of the minimal versal deformations of isolated hypersurface or complete intersection singularities are Saito free divisors (see [16], [5]).

In the local situation the germ of a Saito free divisor D is called the Saito singularity. However, it is often more convenient to exclude trivial cases of hyperplanes or smooth hypersurfaces since they have no singularities at all. The following statement [5] can be considered as an improvement of Saito's Criterion.

Proposition 2 (Determinantal Criterion) *The $\mathcal{O}_{S,0}$-module $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$ is free if and only if there are m germs of logarithmic vector fields $V^0, \dots, V^{m-1}$, such that $V^i(h) = g_i \cdot h$, $g_i \in \mathcal{O}_S$, $i = 0, \dots, m-1$, and such that maximal minors of the $m \times (m+1)$-matrix formed by the column $(g_0, \dots, g_{m-1})^T$ and m columns of the matrix $\mathcal{V} = \| v_{ij}\|$ are equal to h and to its partial derivatives up to invertible factors from $\mathcal{O}^*_S$. These vector fields form a basis of $\mathrm{Der}_{S,0}(\log D)$.*

The next proposition [5] delivers a purely algebraic characterization of Saito free divisors and their singularities.

Proposition 3 (CM-Criterion) *Let $Z = \operatorname{Sing} D$ be the subgerm of D defined by the Jacobi ideal $J(h) = \sum(\partial h/\partial z_i)\mathcal{O}_D$ of the function h. Suppose that codim $(Z, D) = 1$. Then the following conditions are equivalent:*
1) *D is a Saito singularity;*
2) *Z is a determinantal germ;*
3) *Z is a Cohen-Macaulay germ.*

Recall (see [3]) that a singularity (D, x) is called Euler-homogeneous (or, equivalently, E-homogeneous) if there is a vector field $E \in \operatorname{Der}_S(\log D)$ such that $E(h) = gh$, where the function h is a local equation of D and $g \in \mathcal{O}_S^*$ is invertible. In particular, every weighted homogeneous singularity is E-homogeneous. Of course, the conversion is not true.

Let $\mathfrak{N} = \{V \in \operatorname{Der}_S(\log D)\colon V(h) = 0\}$ be a Lie subalgebra of $\operatorname{Der}_S(\log D)$. Elements of $\mathfrak{N}$ are called nilfields (see [4]) or trivial vector fields (see [6]). Then coefficients of an arbitrary vector field $V \in \mathfrak{N}$ define a relation or syzygy of the first order between partial derivatives of the function h and vice versa. All such relations generate an $\mathcal{O}_S$-module naturally isomorphic to the module $Z_1(dh)$ of 1-cycles of the usual Koszul complex $K_\bullet(dh)$ generated by the partial derivatives of h. In general, there are non-trivial relations between generators of $Z_1(dh)$ represented by syzygies of the second order. They generate $\mathcal{O}_S$-module $Z_2(dh)$, and so on. As a result we obtain the following statement which can be considered as a criterion of freeness for E-homogeneous singularity.

Proposition 4 (Syzygy Criterion) *Let D be an E-homogeneous Saito singularity. Then there is the following splitting into the direct sum of $\mathcal{O}_S$-modules:*

$$\operatorname{Der}_S(\log D) \cong \mathcal{O}_S\langle E\rangle \oplus \mathfrak{N},$$

where $\mathfrak{N} \cong Z_1(dh)$ is free. In particular, all syzygies $Z_i(dh)$, $i \geq 2$, of higher orders are trivial.

Proof. The condition of E-homogeneity gives us the relation $Eh = gh$, $g \in \mathcal{O}_S^*$. Take $V \in \operatorname{Der}_S(\log D)$. Then $V(h) = \theta h$, $\theta \in \mathcal{O}_S$. This implies $V - g^{-1}\theta E \in \mathfrak{N}$, that is, the splitting required. The freeness of $Z_1(dh)$ follows from definition of Saito singularity (cf. [22], [3]).

In other words, obstructions for freeness of a non-normal hypersurface singularity can be considered as a triviality condition of the second Koszul cohomology $Z_2(dh)$.

The above Determinantal Criterion can be reformulated in the E-homogeneous case as follows (see [3]).

Proposition 5 (E-determinantal Criterion) *Let D be an E-homogeneous singularity. Then D is a Saito singularity if and only if there exist $m-1$ germs of logarithmic vector fields $V^1, \ldots, V^{m-1} \in \operatorname{Der}_{S,0}(\log D)$, $V^i(h) = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, such that maximal minors of the $(m-1) \times m$-matrix $\mathcal{V} = \| v_{ij} \|$ are equal to partial derivatives of h up to sign. These $(m-1)$ vector fields form a basis of the free submodule $\mathfrak{N} \subset Der_{S,0}(\log D)$.*

There are also other criteria in terms of Lie algebra of logarithmic vector fields in three-dimensional weighted homogeneous case due to J.Sekiguchi (see [19], [20], [21]); they are based on the classification of Lie algebras formed by logarithmic vector fields tangent to a hypersurface, properties of the fundamental antiinvariants of finite reflection groups, etc.

6 Locus and stratum of freeness

Now we are going to apply the construction of projectivization of fibers in order to show how Saito singularities appear in flat families. The following results are typical for the case $c < 0$, that is, for simple singularities. Thus, in notations of section 4 among different projectivizations for an A_1-singularity one can consider the flat mapping φ associated with polynomial $\overline{F}_1 = tx+y^2+z^2$. In this case for all $t \neq 0$ the corresponding quasicones are isomorphic to a Saito free divisor (more exactly, to a hyperplane) due to Saito's criterion of freeness with the following data:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 2x & y & z \\ y & -t/2 & 0 \\ z & 0 & -t/2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathcal{V}) = t(tx+y^2+z^2)/2.$$

When $t = 0$ the corresponding quasicone is isomorphic to the direct product of x-line and a plane quadric, that is, it is a Saito singularity.

This example leads to the following definition. In notations of section 4 let us consider the deformation $\phi\colon Y \to S$ of the singularity Y_0 and its projectivization $\varphi^\nu\colon \overline{Y} \to S$ obtained with the help of the variable z_0 whose weight is equal to an integer $\nu \in \mathbb{Z}$.

Definition 1. Let us denote by $\mathcal{L}_\nu(Y_0)$ the subset of the discriminant $D \subset S$ of the deformation φ^ν consisting of all the points $s \in D$ such that the quasicones over the fibers $\overline{Y}_s$ have Saito singularities. Then $\mathcal{L}_\nu(Y_0)$ is called the *locus of freeness* of the deformation φ^ν.

Of course, in a similar manner the locus of freeness is defined in a more general situation, without the assumption on quasihomogeneity. Criteria from section 5 implies that the locus of freeness is, in fact, a closed set. In particular, one obtains that $\dim \mathcal{L}_\nu(A_1) = 0$ for all $\nu \neq 2$, since the locus of freeness consists of one point $\{0\}$. However, it is possible to show that in general the locus of freeness is not an equidimensional set, it may contain components of different dimensions. As a result one can pose the following question:

Problem 1. How one can compute the locus of freeness $\mathcal{L}_\nu(Y_0)$ for a given singularity ?

In fact, it is possible to give a natural description of the locus of freeness in terms of the so-called *flattening stratum* (cf. [8]). Thus, let us take an embedding $C_{\overline{Y}} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \times S \to S$ associated with the deformation $\psi\colon C_{\overline{Y}} \to S$ induced by the mapping of projectivization $\varphi\colon \overline{Y} \to S$, obtained with the help of the variable z_0 whose weight is equal to an integer $\nu \in \mathbb{Z}$ in the notations of section 2. Set further $\Pi = \mathbb{C}^{n+1} \times S$. Then the defining ideal of $C = C_{\overline{Y}}$ is generated by one function, say $F \in \mathcal{O}_\Pi$.

Let $\Omega^1_{\Pi/S}$ be the $\mathcal{O}_\Pi$-module of relative Kähler differentials and let $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\Pi/S)$ be the module of relative vector fields on Π over S, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\Pi/S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\Pi}(\Omega^1_{\Pi/S}, \mathcal{O}_\Pi)$.

Let us consider a coherent $\mathcal{O}_\Pi$-module $\mathrm{Der}_{\Pi/S}(\log C/S)$ of *relative logarithmic* vector fields consisting of the elements $v \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\Pi/S)$ such that $v(F) \subseteq (F)\mathcal{O}_\Pi$. In fact, v induces vector fields on each fibers C_s tangent at their non-singular points. In other words, v induces the *vertical* vector field $\overline{v} \in T^0(C/S, \mathcal{O}_C)$ on the total space of the deformation ψ.

The above definition of the locus of freeness implies that $\mathcal{L}_\nu(Y_0) \subseteq S$ is the maximal locally closed subspace consisting of those points $s \in S$ such that the restriction $\mathrm{Der}_{\Pi/S}(\log C/S)\big|_{\mathbb{C}^{n+1}\times\{s\}}$ is a locally free $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}$-module.

It should be remarked that the locus of freeness one can determine making use of a slightly modified algorithm for computation of *flattening stratum* (see [8]). The original algorithm generalizing Massey product computations was implemented in SINGULAR language [12]; it was used in computing of the modular stratum, a very interesting and important object in the

deformation theory. As a result one can produce the following definition in a rather general context.

Definition 2. Let $\psi\colon X \to S$ be a flat deformation of a hypersurface singularity X_0, and let $X \hookrightarrow \Pi = \mathbb{C}^{n+1} \times S$ be the corresponding embedding of the total deformation space. Then the intersection of the discriminant $D \subset S$ of the deformation and the image of the projection of the flattening stratum associated with the sheaf of $\mathcal{O}_\Pi$-modules $\mathrm{Der}_{\Pi/S}(\log X/S)$ on the second factor of Π is called the *stratum of freeness* of the deformation ψ.

In fact, the computational procedure of the above mentioned algorithm gives us explicit equations for the stratum, that is, this stratum is endowed by a non-trivial *structure sheaf*. In general, the stratum of freeness contains singularities, it may be non-reduced, etc.

Thus, in the above notations for conic singularities the image of the projection on the second factor of Π of the flattening stratum associated with $\mathrm{Der}_{\Pi/S}(\log X/S)$ gives us the locus of freeness $\mathcal{L}_\nu(Y_0)$ for the deformation ψ of the quasicone $X_0 = C_{\overline{Y}_0}$; in fact, it is the reduced part of the stratum of freeness, its "sous-jacent."

For completeness it should be noted that there are other methods for computation of locus of freeness based on criteria from section 5. However, an experience shows that they require highly difficult calculations (cf. [8]).

7 Degeneration and compactification of deformations

Now let us discuss another situation when Saito free divisors and their non-isolated singularities closely related with properties of deformations of isolated singularities. In fact, there are many types of isolated critical points of functions or, equivalently, isolated singularities of hypersurfaces which can be deformed to non-isolated ones. The corresponding values of parameters of the family are defined by conditions of degeneracy, the associated fibers are called degenerate fibers of the deformation (cf. [9]). In general, it is very interesting to understand properties of degenerate fibers of flat families (cf. [15], (14.11)). We show below that sometimes such fibers are nothing but non-isolated Saito singularities. We call the corresponding family *free deformation* of the singularity.

On the other hand, any non-isolated hypersurface singularity can be deformed to isolated one: we can add some additional monomials to its defining equation which are defined by conditions of non-degeneracy for functions (some types of such conditions have been described by [16], [9], [1], [2], etc.). Of course, if a non-isolated singularity is weighted homogeneous and one wants to keep the grading up to a (multiple) common factor then the task is more complicated and occasionally becomes in an intractable problem.

Remark. It should be also underlined that in contrast with the theory of isolated singularities the type of homogeneity π in non-isolated case does not determine in general either topological or analytical structure of a singularity. Moreover, there are types of homogeneity that can not be realized as types of isolated singularities at all. However if we analyze non-isolated Saito singularities then the type of homogeneity together with weights of basis logarithmic vector fields determine basic properties of the associated local ring, the local cohomology of the De Rham complex, the structure of the Lie algebra of vector fields tangent to the hypersurface, Milnor numbers, and so on (see [4]).

Further when one constructs a deformation over an affine base space then an initial non-isolated singularity can be often included in a flat family as a fiber at infinity, the corresponding value of parameters defines a point at infinity of compactification of the base space of the family.

In fact, the following problem is also well-known in the theory of singularities (cf. [15], (14.11), 2)).

Problem 2. How one can describe degenerate fibers or compactifications of a flat family of isolated singularities ?

The study of a particular families such as minimal versal deformations, maximal modular germs, modular spaces is a very interesting and intriguing problem (cf. [14]). For example, based on considerations below it is not difficult to see that Saito free divisors or Saito non-isolated singularities, appeared in the problems of compactification of flat families or modular deformations (at least in some special cases), are analogous to stable curves from Deligne-Mumford theory where compactifications of the moduli space of smooth curves of given genus with the help of singular curves are investigated.

Summarizing these observations one can see that in the classification of weighted homogeneous non-isolated singularities the following question looks like very natural and useful:

Problem 3. How one can classify weighted homogeneous Saito singularities based on analysis of deformations of isolated singularities ?

In view of the constructions described in Section 3, this problem is reduced to analysis of properties of quasicones over various projectivizations of fibers associated with deformations of isolated singularities. In addition, considerations from Section 4 show that it is possible to carry out the analysis in a systematic way if we classify deformations of isolated singularities filtered by the numerical invariant $c = d - \sum w_i$, the degree of the canonical class of the base of the corresponding quasicone.

8 Compactification of modular deformations

Let us consider an example which shows how one can compactify a concrete flat family, deformation of an isolated singularity. Thus, let Y_0 be a simple D_4-singularity. In the notations of section 4 the singularity Y_0 is given by the polynomial $f = y^3 + z^3$, the cotangent space $T^1(Y_0) = k\langle 1, y, z, yz\rangle$ is generated by four monomials. Let us consider the following two-parameter deformation: $F = y^3 + z^3 + ayz + b$. It is not difficult to verify that the discriminant D of the deformation is defined by the weighted homogeneous polynomial $h = a^3b + 27b^2 = b(a^3 + 27b)$.

The projectivization of fibers by means of the new variable $x = z_0$ of weight 1 gives us the flat mapping φ associated with the polynomial $\overline{F} = bx^3 + y^3 + z^3 + axyz$. Thus, for $b = 0$ one gets the family $f_a = y^3 + z^3 + axyz$. For all $a \neq 0$ quasicones over the corresponding fibers of this family are isomorphic to the non-isolated surface singularity $f_1 = y^3 + z^3 + xyz$. Further, for $b \neq 0$ one gets a family isomorphic to the *modular deformation* of a P_8-singularity $\overline{F}_\alpha = x^3 + y^3 + z^3 + \alpha xyz$ with condition of non-degeneracy $\alpha^3 + 27 \neq 0$, where $\alpha = a/\sqrt[3]{b}$, while for $a \neq 0$ one has the deformation $\overline{F}_b = bx^3 + y^3 + z^3 + xyz$ with the following condition of non-degeneracy: $b(27b + 1) \neq 0$. In both cases the degeneration means, in fact, that quasicones over the corresponding fibers are non-isolated two-dimensional hypersurface singularities. To be more precise we obtain four such singularities in all containing in the first family $\overline{F}_\alpha$: one is determined by $b = 0$, while others are given by the conditions $a = -3, 3j, -3j^2$, where $j = \exp(\pi i/3)$ is the primitive root of the third order of -1, that is,

1) $y^3 + z^3 + xyz$,
2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,
3) $x^3 + y^3 + z^3 + 3jxyz$,

4) $x^3 + y^3 + z^3 - 3j^2xyz$.

The degenerate fiber of the second family $\overline{F}_b$ with $b = -1/27$ is isomorphic to the fourth singularity. Here we observe an interesting phenomenon closely related with the theory of compactification of modular spaces or deformations (see details in [7]). In fact, a clear description of modular spaces is given by collections of charts or finite coverings, that is, by a collection of proper multivalent mappings $\varphi_V : V \to \mathcal{M}$, where $\mathcal{M}$ is the maximal modular deformation, $m = \dim \mathcal{M}$, and $V \subset \mathbb{C}^m$ are open subsets. It is well-known that P_8-singularity is *unimodular*, that is, $m = 1$ (cf. [loc. cite]). Set $V = \mathbb{C}^1$. Then the family $\mathcal{P}_8$ is given by the mapping $f : X \to V$ such that any fiber $X_a \subset \mathbb{C}^3$, $a \in V$, is given by the equation $x^3+y^3+z^3+axyz = 0$. Let us define a chart $\varphi_V : V \to \mathbb{CP}$ by $\varphi_V(a) = a^3$. The chart φ_V covers the Riemann sphere $\mathbb{CP}$, except for ∞. It may be covered by another chart. To see this, let us consider the second family $bx^3+y^3+z^3+xyz$, $b \in W = \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$. Then $\varphi_W : W \to \mathbb{CP}$, defined by $\varphi_W(b) = 1/b$, will be the desirable chart. Besides φ_W maps to ∞ the fiber of the family over $b = 0$. It is not difficult to verify that both charts are glued along $\varphi_V^{-1}(N)$ and $\varphi_W^{-1}(N)$, where $N = \varphi_V(V) \cap \varphi_W(W)$, to the sphere $\mathbb{CP}$. In fact, the gluing isomorphism is given by the formula $a^3 = 1/b$.

As a result the Riemann sphere $\mathbb{CP}$ is covered by two charts φ_V, φ_W, containing *non-isolated* singularities defined above. Thus, the following question arises:

Problem 4. (cf. [14], Problem 4.4). Does there exist a collection of charts corresponding to flat families of *isolated* singularities that covers all the points of $\mathbb{CP}$?

Considerations described above lead to a slightly different version of this problem:

Problem 4′. Does there exist such compactification of modular deformations by means of flat families of isolated and *non-isolated* singularities of certain type or types (e.g. Saito singularities).

The above computation gives us some information on the locus of freeness for deformations of the quasicone over a D_4-singularity. In fact, it is not difficult to verify that germs 2) - 4) satisfy Saito's Criterion in view of the following representation of the corresponding data by *symmetric* matrices:

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & j^2z & -jx \\ z & -jx & j^2y \end{pmatrix},$$

where $\det(\mathcal{V}_1) = -(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, $\det(\mathcal{V}_2) = j(x^3 + y^3 + z^3 + 3jxyz)$, and $\det(\mathcal{V}_3) = -j^2(x^3 + y^3 + z^3 - 3j^2xyz)$. As a result, one obtains three non-isomorphic Saito singularities among quasicones associated with deformations of a simple isolated singularity D_4. Hence, the locus of freeness contains three points corresponding to germs $2) - 4)$. That is, $\dim \mathcal{L}_1(D_4) = 0$.

In conclusion let us fix a type of homogeneity $\pi = (d; w_0, \ldots, w_n)$. Denote by $\mathcal{S}(\pi)$ the set of equivalence classes of Saito singularities of given type π modulo analytic isomorphisms. Thus, the above considerations imply that $\mathcal{S}(2; 2, 1, 1)$ contains a point corresponding to the deformation $\overline{F}_1 = tx + y^2 + z^2$ of an A_1-singularity, $\mathcal{S}(3; 1, 1, 1)$ contains at least three distinct points corresponding to germs $2) - 4)$ from the above, and so on. As a result one can pose the following question:

Problem 5. How one can describe the set $\mathcal{S}(\pi)$ for a given type of homogeneity ?

Bibliography

1. A.G. Aleksandrov. Normal forms of one-dimensional quasihomogeneous complete intersections. Matem. Sbornik (N.S.), 117(159)(1982), no. 1, 3-31 (Russian); translation in Math. USSR, Sb. 45 (1983), 1-30.

2. A.G. Aleksandrov. Cohomology of a quasihomogeneous complete intersection. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 49 (1985), no. 3, 467–510 (Russian); translation in Math. USSR, Izv. 26 (1986), 437-477.

3. A.G. Aleksandrov. Euler-homogeneous singularities and logarithmic differential forms. Ann. Global Anal. Geom. 4 (1986), no. 2, 225-242.

4. A.G. Aleksandrov. The Milnor numbers of nonisolated Saito singularities, Funct. Anal. i ego Prilozh. 21 (1987), no. 1, 1-10 (Russian); translation in Funct. Anal. Appl. 21 (1987), 1-9.

5. A.G. Aleksandrov. Nonisolated Saito singularities, Matem. Sbornik (N.S.) 137(179) (1988), no. 4, 554-567 (Russian); translation in Math. USSR, Sb. 65(1990), no. 2, 561-574.

6. A.G. Aleksandrov. Nonisolated hypersurface singularities. In: Theory of singularities and its applications, 211-246, Adv. in Soviet Math. v. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

7. A.G. Aleksandrov. Modular space for complete intersection curve singularities. In: Finite or infinite dimensional complex analysis (Fukuoka, 1999), 1-19, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 214, Dekker, New York, 2000.

8. A.G. Aleksandrov, J. Sekiguchi. Free deformations of hypersurface singularities. In: Geometry and analysis on complex algebraic varieties, RIMS Kōkyūroku, 19 pp. (to appear)

9. V.I. Arnol'd. Normal forms of functions in the neighborhood of degenerate critical points. Uspekhi Mat. Nauk 29 (1974), no. 2(176), 11-49 (Russian); translation in Russ. Math. Surv. 29 (1974), No.2, 10-50.

10. I.V. Dolgačhev. Weighted projective varieties, Lecture Notes in Math. 956, Springer-Verlag, 1982, 34-71.

11. P. Cartier. Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire. Bourbaki Seminar, Vol. 1980/81, 1-22, Lecture Notes in Math. 901, Springer, Berlin-New York, 1981.

12. G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann. SINGULAR 3.0. - A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2005). Available from `http://www.singular.uni-kl.de`.

13. B. Martin. Algorithmic computation of flattenings and of modular deformations. J. Symbolic Comput. 34(2002), no. 3, 199-212.

14. V.P. Palamodov. Moduli and versal deformations of complex spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR 230 (1976), no. 1, 34-37 (Russian); translation in Sov. Math., Dokl. 17(1977), 1251-1255.

15. H.C. Pinkham. Deformations of algebraic varieties with $\mathbb{G}_m$-action. Astérisque, no. 20. Société Mathématique de France, Paris, 1974, 1-131.

16. K. Saito. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Invent. Math. 14 (1971), 123-142.

17. K. Saito. On the uniformization of complements of discriminant loci. In: Hyperfunctions and Linear partial differential equations, RIMS Kōkyūroku 287 (1977), 117-137.

18. K. Saito. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser. IA 27 (1980), no. 2, 265-291.

19. J. Sekiguchi. Some topics related with discriminant polynomials. In: Algebraic analysis and number theory, RIMS Kōkyūroku 810 (1992), 85-94.

20. J. Sekiguchi. A classification of weighted homogeneous Saito free divisors. J. Math. Soc. Japan 61(2009), no. 4, 1071-1095.

21. J. Sekiguchi. Three dimensional Saito free divisors and deformations of singular curves. In: Geometry and analysis on complex algebraic varieties, RIMS Kōkyūroku, 20 pp. (to appear)

22. H. Terao. Arrangements of hyperplanes and their freeness I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser. I A, 27 (1980), no. 2, 293-312.

СТРАТ СВОБОДНОСТИ ДЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ ОСОБЕННОСТЕЙ

А.Г. Александров

Институт проблем управления РАН,

ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, Россия, e-mail: ag_aleksandrov@mail.ru

Аннотация. Цель этой заметки – изучение проблемы классификации квазиоднородных свободных дивизоров Саито с помощью теории деформаций многообразий с $\mathbb{G}_m$-действием. В частности, мы описываем подход к вычислению страта свободности для деформаций квазиконусов над квазигладкими многообразиями. Мы также обсуждаем некоторые полезные приложения в более общем контексте, включая методы вычисления этого страта для деформаций особенностей гиперповерхностей, компактификации пространств модулей и т.д.

Ключевые слова: логарифмические дифференциальные формы, форма-вычет,регулярные мероморфные дифференциальные формы, кручение голоморфных дифференциалов.

УДК 517.983

ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ

Е.А. Аршава

Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры, ул.Сумская, 40, 61002, г. Харьков, Украина, e-mail: elarshava@mail.ru

Аннотация. Изучается задача обращения некоторых классов интегральных операторов методом операторных тождеств, доказывается конечномерность соответствующих коммутационных операторов и исследуется структура обратного оператора. Полученные результаты используются при решении задачи фильтрации и прогноза нестационарных случайных процессов и сигналов.

Исследуется уравнение со специальной правой частью, к которому сводится решение ряда задач астрофизики, теории переноса излучения.

Ключевые слова: операторные тождества, обратный оператор, обобщенные коммутационные соотношения.

1 Введение

Метод операторных тождеств был впервые применен В.А. Амбарцумяном при изучении проблем астрофизики [1]. Затем В.В. Соболев [2] , В.В. Иванов [3] применили коммутационные соотношения для решения интегральных уравнений, которые возникают в задачах переноса излучения и рассеивания света.

В этих работах использовалась связь интегрального оператора с разностным ядром и оператора дифференцирования, т.е. в коммутационном соотношении присутствовал неограниченный оператор. Такой подход приводил к существенным трудностям при построении общей математической теории.

Наиболее весомый вклад в разработку представленной тематики сделал Л.А. Сахнович [4]. Было предложено вместо оператора дифференцирования использовать несамосопряженный оператор интегрирования. При этом Л.А. Сахновичем рассматривался класс уравнений вида

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} S(x-t)f(t)dt = \varphi(x), \tag{1}$$

который является наиболее общим классом уравнений с разностным ядром. Это дало возможность Л.А. Сахновичу с единой точки зрения исследовать различные виды уравнений с разностным ядром как первого, так и второго рода.

Основная идея метода состоит в доказательстве конечномерности соответствующего интегрального оператора. В этом случае обратный оператор к данному интегральному оператору строится при помощи функций, которые определяют вырожденность коммутационного оператора.

В работах И.И. Кальмушевского, А.Б. Нерсесяна, А.Л. Сахновича и др. Метод операторных тождеств использовался при изучении систем интегральных уравнений с разностным ядром, сумматорных уравнений с матрицей коэффициентов Тёплица, двумерных интегральных уравнений.

2 Построение обратного оператора

Рассмотрим задачу обращения оператора вида

$$Sf = L_x(\alpha)\int\limits_0^\omega S(x,t)f(t)dt \tag{2}$$

с ядром $S(x,t) = 0$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$(L_x(\alpha) - L_t(\alpha))S(x,t) = 0, \qquad L_x(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0, \tag{3}$$

Можно доказать, что для любого ограниченного оператора вида (2) с ядром, которое удовлетворяет условиям (3), имеют место соотношения:

$$(A_0S - SA_0^*)f = \int\limits_0^\omega \left(M_1(x) + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}M_2(x) + M_3(t) + \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}M_4(t)\right)f(t)dt, \tag{4}$$

где
$$\begin{array}{lll} A_0 = L_x^{-1}(\alpha), & M_1(x) = S(x,0), & M_2(x) = S'(x,0), \\ M_3(t) = -S(0,t), & M_4(t) = -S'(0,t), & f(t) \in L_2(0,\omega). \end{array}$$

Если оператор S имеет ограниченный обратный T, тогда верно представление:

$$(TA_0 - A_0^*T)f = \int\limits_0^\omega R(x,t)f(t)dt,$$

где $R(x,t) = \sum\limits_{i=1}^4 P_i^*(t)Q_i(x)$, кроме того, для $P_i(t)Q_i(x), (i = \overline{1,4})$ выполняются соотношения вида:

$$\begin{array}{llll} S^*P_1 = 1, & S^*P_2 = M_3^*(t), & S^*P_3 = M_4^*(t), & S^*P_4 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ SQ_1 = M_1(x), & SQ_2 = 1, & SQ_3 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}, & SQ_4 = M_2(x). \end{array} \tag{5}$$

Если оператор S ограничен вместе со своим обратным оператором T и существуют функции $P_i(t), Q_i(x), (i = \overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (5), тогда для оператора $T = S^{-1}$ имеет место интегральное представление:

$$Tf = L_x(\alpha)\int\limits_0^\omega f(t)L_t(-\alpha)\Phi(x,t)dt,$$

где $\Phi(x,t)$ выражается через ядро оператора $R = (TA_0 - A_0^*T)$, $f(t) \in L_2(0,\omega)$.

Полученные результаты перенесены на случай обобщенных функций вида:

$$f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega - x) + g(x), g(x) \in L_2(0,\omega), \delta(x) - \text{дельта-функция Дирака.}$$

3 Решение задачи фильтрации нестационарных случайных процессов

В качестве примера рассмотрим интегральный оператор

$$SG = \int_0^\omega K(x,t)G(t,\tau)dt, \tag{6}$$

где $K(x,t) = g(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f(x+t)$ - корреляционная функция случайного входного процесса, τ фиксированный параметр. Интегральные операторы такого вида встречаются при решении задачи фильтрации нестационарного случайного сигнала на конечном интервале [5]. Оператор (6) можно записать в виде

$$SG = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int_0^\omega S(x,t)G(t,\tau)dt,$$

где $S(x,t) = g_1(x-t)e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + f_1(x+t)$ - ядро оператора S.

Пусть $S(x,t) = \frac{sign(x-t)}{\nu}e^{-\nu|x-t|}e^{\frac{-\alpha(x+t)}{2}} + e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)(x+t)}$. Тогда

$$M_1(x) = S(x,0) = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)x},$$

$$M_2(x) = S'(x,0) = \left(-1-\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)x},$$

$$M_3(t) = -S(0,t) = \left(\frac{1}{\nu}-1\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)t},$$

$$M_4(t) = -S'(0,t) = \left(1+\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)t}.$$

Решая уравнения (5) в классе функций $f(x) = \gamma\delta(x) + \beta\delta(\omega-x) + g(x)$, где $g(x) \in L_2(0,\omega)$, получаем

$$P_1(t) = \frac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha(\nu-1)}\left(\frac{\nu}{\alpha-2\nu}-\frac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(t) + \frac{2\nu}{\alpha(2\nu-\alpha)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega-t),$$

$$P_2(t) = \frac{4}{\alpha^2-4\nu^2}\delta(t), \qquad P_3(t) = \frac{4\nu}{(\nu-1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(1+\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\delta(t),$$

$$P_4(t) = \frac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha+2\nu}-\frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu}\right)\delta(\omega-t) + \frac{\nu}{\alpha^2} + \frac{8\nu^2(\nu+1)}{\alpha^2(\alpha^2-4\nu^2)(\nu-1)}\delta(t),$$

$$Q_1(t) = \frac{4}{4\nu^2-\alpha^2}\delta(t),$$

$$Q_2(t) = -\frac{\nu}{\alpha}e^{\alpha t} - \frac{2\nu}{\alpha(\nu+1)}\left(\frac{1}{\alpha+2\nu}+\frac{1}{\alpha-2\nu}\right)\delta(t) + \frac{2\nu}{\alpha(\alpha-2\nu)}e^{\alpha\omega}\delta(\omega-t),$$

$$Q_3(t) = -\frac{\nu}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \frac{2\nu}{\alpha^2}\left(\frac{e^{\alpha\omega}}{\alpha-2\nu}-\frac{1}{\alpha+2\nu}\right)\delta(\omega-t) - \frac{\nu}{\alpha^2} + \frac{8\nu^2(\nu-1)}{\alpha^2(4\nu^2-\alpha^2)(\nu+1)}\delta(t),$$

$$Q_4(t) = \frac{4\nu}{(\nu+1)(4\nu^2-\alpha^2)}\left(-1-\frac{\alpha}{2\nu}-\nu-\frac{\alpha}{2}\right)\delta(t).$$

4 Уравнение со специальной правой частью

На основе полученных результатов рассмотрим уравнение со специальной правой частью, которое играет существенную роль в астрофизике, теории переноса излучения

$$Sf = e^{i\lambda x},$$

где S оператор вида (2).

Легко доказать, что если функции $M_1(x)$, $M_2(x)$, x, $\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ и 1, где $M_1(x)$, $M_2(x)$ определены формулами (5), принадлежат области значений оператора $S-R_S$, тогда R_S плотно в $L_2(0,\omega)$.

Пусть

$$SL_m = x^{m-1},\ (m=\overline{1,\infty}). \tag{7}$$

Покажем, что существуют функции L_m, которые удовлетворяют соотношениям (7). Полагая в (4) сначала, $f=\frac{1}{\alpha}L_m$, а потом $f=\frac{1}{m}L_{m+1}$ и складывая полученные результаты, имеем:

$$\frac{x^{m+1}}{\alpha m(m+1)} = S\left[\int\limits_x^\omega \frac{1-e^{\alpha(x-t)}}{\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt+\right.$$

$$+\int\limits_0^\omega\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_1(x)+\int\limits_0^\omega\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_2(x)+$$

$$\left.+\int\limits_0^\omega M_3(t)\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_3(x)+\int\limits_0^\omega M_4(t)\left\{\frac{1}{\alpha}L_m+\frac{1}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_4(x)\right],$$

где функции $N_i(x)$, $(i=\overline{1,4})$, такие, что

$$SN_1 = M_1(x),\ SN_2 = M_2(x),\ SN_3 = 1,\ SN_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}.$$

Эти функции существуют, т.к. $M_1(x)$, $M_2(x)$, 1, $\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ из R_S.

Следовательно,

$$\frac{L_{m+2}}{m(m+1)} = \int\limits_x^\omega \frac{1-e^{\alpha(x-t)}}{\alpha}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt+\int\limits_0^\omega\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_1(x)+$$

$$+\int\limits_0^\omega\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_2(x)+\int\limits_0^\omega M_3(t)\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_3(x)+$$

$$+\int\limits_0^\omega M_4(t)\left\{L_m+\frac{\alpha}{m}L_{m+1}\right\}dt\cdot N_4(x). \tag{8}$$

По условию существуют $L_1(x)=N_3(x)$, $L_2(x)=S^{-1}x$. Соотношения (8) определяют все последующие члены последовательности $L_m(x)$. Таким образом, $x^m\in R_S$ при $(m=\overline{0,\infty})$.

Пусть существуют такие функции $N_i \in L_2(0,\omega)$, $(i=\overline{1,4})$, что выполняются равенства:

$$SN_1 = M_1(x),\ SN_2 = M_2(x),\ SN_3 = 1,\ SN_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}. \tag{9}$$

Тогда верны соотношения:

$$S^*\hat{M}_1 = 1,\ S^*\hat{M}_2 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha},\ S^*\hat{M}_3 = \overline{M_3(t)},\ S^*\hat{M}_4 = \overline{M_4(t)},$$

где

$$\hat{M}_1(t) = \overline{N_3(\omega-t)}, \qquad \hat{M}_2(t) = \overline{N_4(t)},$$
$$\hat{M}_3(t) = \frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha} + \overline{N_1(\omega-t)} - \frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}\overline{N_2(t)},$$
$$\hat{M}_4(t) = -\alpha\overline{N_1(\omega-t)} - \overline{N_2(\omega-t)} - \alpha\overline{N_1(t)} - 1.$$

Если оператор S является ограниченным и существуют функции $N_i \in \in L_2(0;\omega)$, $(i=\overline{1,4})$, удовлетворяющие равенствам (9), тогда имеют место следующее представление:

$$SB(x,\lambda) = e^{i\lambda x},$$

где

$$B(x,\lambda) = u(x,\lambda) + \frac{i\lambda\alpha - \lambda^2}{\alpha+2i\lambda}\int\limits_0^x u(t,\lambda)\cdot\left(e^{i\lambda(t-x)} + e^{(\alpha+i\lambda)(x-t)}\right)dt,$$

$$u(x,\lambda) = a(\lambda)N_1(x) + b(\lambda)N_2(x) + c(\lambda)N_3(x) + d(\lambda)N_4(x),$$

$$a(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)N_3(\omega-t)dt, \quad b(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)N_4(t)dt,$$

$$c(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)\left(\frac{1-e^{\alpha(\omega-t)}}{\alpha} + N_1(\omega-t) - \frac{1-e^{\alpha\omega}}{\alpha}N_2(t)\right)dt,$$

$$d(\lambda) = \int\limits_0^\omega e^{i\lambda t}\left(i\lambda\alpha - \lambda^2\right)\left(-\alpha N_1(\omega-t) - N_2(\omega-t) - \alpha N_1(t) - 1\right)dt.$$

5 Обобщенные коммутационные соотношения

Рассмотрим задачу обращения оператора S вида

$$Sf = e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}S(x,t)f(t)dt. \tag{10}$$

Пусть операторы R и T определены следующим образом

$$Rf = f(x) - 2\int\limits_0^x sh(x-t)f(t)dt, \qquad Tf = f(x) - 2\int\limits_x^\omega e^{x-t}f(t)dt,$$

а ядро оператора (10) удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} - 2I\right) S(x,t) = 0$$

Если предположить, что $S(x,t) = e^{x+3t}\tilde{S}(x,t)$, тогда для конечномерности оператора $S - RST$ достаточно, чтобы $\tilde{S}(x,t)$ удовлетворяло уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{S}(x,t) = 0.$$

Легко доказать, что имеют место соотношения:

$$(S - RST)f = \int\limits_0^\omega \left(K_1(x)L_1(t) + K_2(x)L_2(t)\right) f(t)dt,$$

где $K_1(x) = 4shx, \quad K_2(x) = -2shx, \quad L_1(t) = e^{-t}\int\limits_0^t S(0,\xi)d\xi, \quad L_2(t) = S(0,t).$

Используя изложенный подход, можно рассмотреть случай оператора $S - RSR^*$. Тогда

$$(S - RSR^*)f = Sf(x) - RS\left(f(x) - \int\limits_x^\omega e^{t-x}f(t)dt + \int\limits_x^\omega e^{x-t}f(t)dt\right) =$$

$$= Sf(x) - R\left(Sf(x) - e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}S(x,t)\int\limits_t^\omega e^{\xi-t}f(\xi)d\xi dt +\right.$$

$$\left. + e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}S(x,t)\int\limits_t^\omega e^{t-\xi}f(\xi)d\xi dt\right) = \int\limits_0^\omega (O_1(x)H_1(t) + O_2(x)H_2(t))f(t)dt,$$

где

$$O_1(x) = -2shx, \qquad O_2(x) = -4shx,$$
$$H_1(t) = e^{-t}S(0,t), \quad H_2(t) = \int\limits_0^t sh(t-\xi)e^{-\xi}S(0,\xi)d\xi,$$

а ядро $S(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) - 2I\right] S(x,t) = 0.$$

Для оператора $Q = S^{-1}$, если он существует и ограничен, верно равенство:

$$(Q - R^*QR)f = \int\limits_0^\omega (G_1(x)\Pi_1^*(t) + G_2(x)\Pi_2^*(t))f(t)dt,$$

где

$$S(R^*)^{-1}G_1 = -2shx, \quad S(R^*)^{-1}G_2 = -4shx,$$
$$RS^*\Pi_1^* = \overline{S(0,t)}, \qquad RS^*\Pi_2^* = \overline{\int\limits_0^t sh(t-\xi)e^{-\xi}S(0,\xi)d\xi}.$$

Найдем общий вид обратного оператора Q. Пусть

$$Qf = e^{-x}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\omega e^{-t}Q(x,t)f(t)dt, \tag{11}$$

а ядро $Q(x,t)$ удовлетворяет условию $Q(\omega,t)=0$.

Тогда

$$TQRf = \int\limits_0^\omega \Bigg(e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t) - e^{-x-t}\int\limits_t^\omega \frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi + 2e^{-x-t}Q(x,t)+$$

$$+e^{-x+t}\int\limits_t^\omega e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x-t}\int\limits_x^\omega Q(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-$$

$$-2e^{-x-t}\int\limits_t^\omega Q(x,\xi)d\xi + 4e^{x-t}\int\limits_x^\omega e^{-2\xi}\int\limits_t^\omega Q(\xi,\tau)d\tau d\xi+$$

$$+\,2e^{-x+t}\int\limits_t^\omega e^{-2\xi}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x+t}\int\limits_x^\omega e^{-2\xi}\int\limits_t^\omega e^{-2\tau}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi\Bigg) f(t)dt.$$

Введем оператор

$$Q_1 f = \int\limits_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt,$$

где

$$\Phi(x,t) = e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t) - e^{-x-t}\int\limits_t^\omega \frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi + 2e^{-x-t}Q(x,t)+$$

$$+e^{-x+t}\int\limits_t^\omega e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x-t}\int\limits_x^\omega Q(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-$$

$$-2e^{-x-t}\int\limits_t^\omega Q(x,\xi)d\xi + 4e^{x-t}\int\limits_x^\omega e^{-2\xi}\int\limits_t^\omega Q(\xi,\tau)d\tau d\xi+$$

$$+2e^{-x+t}\int\limits_t^\omega e^{-2\xi}Q(x,\xi)d\xi - 4e^{x+t}\int\limits_x^\omega e^{-2\xi}\int\limits_t^\omega e^{-2\tau}Q(\xi,\tau)d\tau d\xi. \tag{12}$$

То есть $Q_1 f = TQRf$. В этом случае

$$(Q_1 - TQ_1R)f = TDRf = Cf = \int\limits_0^\omega C(x,t)f(t)dt,$$

где ядро

$$C(x,t) = e^{-x-t}\frac{\partial}{\partial x}D(x,t) - e^{-x-t}\int\limits_t^\omega \frac{\partial}{\partial x}D(x,\xi)d\xi + 2e^{-x-t}D(x,t)+$$

$$+e^{-x+t}\int\limits_t^\omega e^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial x}D(x,\xi)d\xi - 4e^{x-t}\int\limits_x^\omega D(\xi,t)e^{-2\xi}d\xi-$$

$$-2e^{-x-t}\int\limits_t^\omega D(x,\xi)d\xi + 4e^{x-t}\int\limits_x^\omega e^{-2\xi}\int\limits_t^\omega D(\xi,\tau)d\tau d\xi+$$

$$+2e^{-x+t}\int\limits_t^\omega e^{-2\xi}D(x,\xi)d\xi - 4e^{x+t}\int\limits_x^\omega e^{-2\xi}\int\limits_t^\omega e^{-2\tau}D(\xi,\tau)d\tau d\xi. \qquad (13)$$

С другой стороны

$$Cf = (Q_1 - TQ_1R)f = \int\limits_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt - TQ_1\cdot\left(f(x) - \int\limits_0^x e^{x-t}f(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^x e^{t-x}f(t)dt\right) = \int\limits_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt - T\cdot\left(\int\limits_0^\omega \Phi(x,t)f(t)dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\omega \Phi(x,t)\int\limits_0^t e^{t-\xi}f(\xi)d\xi dt + \int\limits_0^\omega \Phi(x,t)\int\limits_0^t e^{\xi-t}f(\xi)d\xi dt\right) =$$

$$= \int\limits_0^\omega\left(\int\limits_t^\omega e^{\xi-t}\Phi(x,\xi)d\xi - \int\limits_t^\omega e^{t-\xi}\Phi(x,\xi)d\xi - 2\int\limits_x^\omega e^{x-\xi}\Phi(\xi,t)d\xi+\right.$$

$$\left.+\,2e^{x-t}\int\limits_x^\omega e^{-\xi}\int\limits_t^\omega e^{\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi - 2e^{x+t}\int\limits_x^\omega e^{-\xi}\int\limits_t^\omega e^{-\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi\right)f(t)dt.$$

Следовательно,

$$C(x,t) = \int\limits_t^\omega e^{\xi-t}\Phi(x,\xi)d\xi - \int\limits_t^\omega e^{t-\xi}\Phi(x,\xi)d\xi - 2\int\limits_x^\omega e^{x-\xi}\Phi(\xi,t)d\xi+$$

$$+2e^{x-t}\int\limits_x^\omega e^{-\xi}\int\limits_t^\omega e^{\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi - 2e^{x+t}\int\limits_x^\omega e^{-\xi}\int\limits_t^\omega e^{-\tau}\Phi(\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

Дифференцирование полученного равенства приводит к уравнению

$$2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} - 4I\right)\Phi(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - I\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\right)C(x,t). \qquad (14)$$

Применяя соотношения (11)-(14), можно восстановить обратный оператор.

Пусть задан ограниченный в $L_2(0,\omega)$ оператор S вида (2).
Оператор $\tilde{A}f = A_0^2 f$, где

$$A_0 f = \int\limits_0^x \frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha} f(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Выясним, при каких условиях оператор $\tilde{A}S - S\tilde{A}^*$ представляет собой конечномерный оператор. Учитывая (15), получаем

$$\tilde{A}f = \int\limits_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$\tilde{A}^*f = \int\limits_t^\omega (\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_t^\omega \frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi.$$

Тогда имеет место соотношение

$$(\tilde{A}S - S\tilde{A}^*)f = \int\limits_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), \qquad M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), \qquad N_2(t) = -\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right] S(t,\tau) = 0.$$

Если у оператора S вида (2) существует ограниченный обратный T, то он удовлетворяет соотношению

$$(T\tilde{A} - \tilde{A}^*T)f = \int\limits_0^\omega (Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$S^*P_1 = M_1^*, \quad S^*P_2 = M_2^*, \quad SQ_1 = N_1, \quad SQ_2 = N_2.$$

Рассмотрим аналогичную задачу для оператора $\tilde{A}S - SB$, когда

$$\tilde{A}f = \int\limits_0^t (t-\xi)\frac{1+e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha^2} f(\xi)d\xi + 2\int\limits_0^t \frac{e^{\alpha(\xi-t)}-1}{\alpha^3} f(\xi)d\xi,$$

$$Bf = \int\limits_0^t \frac{1-e^{\alpha(\xi-t)}}{\alpha} f(\xi)d\xi.$$

В этом случае получаем

$$(\tilde{A}S - SB)f = \int\limits_0^\omega (N_1(t)M_1(\tau) + N_2(t)M_2(\tau))f(\tau)d\tau,$$

где

$$M_1(\tau) = S'(0,\tau), \qquad M_2(\tau) = S(0,\tau),$$

$$N_1(t) = -\frac{t}{\alpha^2}(1+e^{-\alpha t}) + \frac{2}{\alpha^3}(1-e^{-\alpha t}), \qquad N_2(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha},$$

при этом ядро интегрального оператора должно удовлетворять уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right] S(t,\tau) = 0.$$

Обратный оператор T к оператору S вида (2) удовлетворяет соотношению

$$(T\tilde{A} - BT) = \int\limits_0^\omega R(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

где

$$R(t,\tau) = Q_1(t)P_1^*(\tau) + Q_2(t)P_2^*(\tau),$$

$$S^*P_1 = M_1^*, \quad S^*P_2 = M_2^*, \quad SQ_1 = N_1, \quad SQ_2 = N_2.$$

Пусть

$$Tf = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^\omega F(x,t)f(t)dt, \tag{16}$$

причем

$$F(\omega,0) = 0, \quad \int\limits_0^\omega |F(x+\Delta x,t) - F(x,t)|^2\, dt \le \|T\|^2\, |\Delta x|\,.$$

Можно показать, что

$$BT\tilde{A}f = \int\limits_0^\omega f(t)\int\limits_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi) + F(x,\xi) - e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi - t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2} + 2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt.$$

Обозначим через $T_1 f = \int\limits_0^\omega G(x,t)f(t)dt$, где

$$G(x,t) = \int\limits_t^\omega \left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}F'(0,\xi) + F(x,\xi) - e^{-\alpha x}F(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt, \tag{17}$$

$G(x,\omega)=0.$

Тогда $T_1 f = BT\tilde{A}f$ и $T_1\tilde{A}-BT_1=H$, $Hf=BR\tilde{A}f=\int\limits_0^\omega H(x,t)f(t)dt$,

$$H(x,t)=\int\limits_t^\omega\left(-\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}R'(0,\xi)+R(x,\xi)-e^{-\alpha x}R(0,\xi)\right)\times$$

$$\times\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi. \tag{18}$$

Так как

$$(T_1\tilde{A}-BT_1)f=\int\limits_0^\omega f(t)\int\limits_t^\omega G(x,\xi)\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi dt-$$

$$-\int\limits_0^\omega f(t)\int\limits_0^x G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}d\xi dt,$$

имеет место уравнение

$$\int\limits_t^\omega G(x,\xi)\left((\xi-t)\frac{1+e^{\alpha(t-\xi)}}{\alpha^2}+2\cdot\frac{e^{\alpha(t-\xi)}-1}{\alpha^3}\right)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^x G(\xi,t)\frac{1-e^{\alpha(\xi-x)}}{\alpha}d\xi=H(x,t).$$

Дифференцируя последнее уравнение по x и по t, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)H(x,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x,t). \tag{19}$$

Таким образом, с помощью формул (16)-(19) можно получить представление для обратного оператора T.

6 Выводы и перспективы дальнейших исследований

Метод операторных тождеств является современным математическим аппаратом для исследования многих теоретических и прикладных задач теории линейных операторов. Представляет интерес рассмотреть задачу обращения интегрального оператора на основе двух операторных тождеств. В этом случае в качестве интегрального оператора имеет смысл рассматривать ограниченный оператор в $L_2(U)$, где

$$U=\{x;0<x_1<\omega_1,\ 0<x_2<\omega_2\}-\text{прямоугольник на плоскости},$$

вида

$$Sf = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\limits_U V(x,t)f(t)dt,\ x=(x,t),\ t=(t_1,t_2),\ V(x,t)\in L_2(u),\ \forall x\in U.$$

Такое представление для оператора верно при $k=1,\ j=2;\ k=2,\ j=1$.

Рассматриваются операторы

$$\hat{A}_1 f = \int\limits_0^{x_1}(t_1-x_1)f(t_1,x_2)dt_1, \quad \hat{A}_1 f = \int\limits_{x_1}^{\omega_1}(x_1-t_1)f(t_1,x_2)dt_1,$$

$$\hat{A}_2 f = \int\limits_0^{x_2}(t_2-x_2)f(x_1,t_2)dt_2, \quad \hat{A}_2 f = \int\limits_{x_2}^{\omega_2}(x_2-t_2)f(x_1,t_2)dt_2,$$

то есть $\hat{A}_1 = A_1^2,\ \hat{A}_2 = A_2^2,$ где $A_1 f = i\int\limits_0^{x_1} f(t_1,x_2)dt_1,\ A_2 f = i\int\limits_0^{x_2} f(x_1,t_2)dt_2.$

Литература

1. В.А. Амбарцумян. Научные труды. - Ереван, 1960.,
2. В.В. Соболев. Рассеяние света в атмосферах планет. - М.: Наука. 1972.
3. В.В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел. - М.: Наука. 1969.
4. Л.А. Сахнович. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке. // Успехи математических наук. - М.,1980. - Т.35, Вып. 4 (214). С. 69-129.
5. В.С.Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: ГТТИ, 1957.

THE INVERSING OF INTEGRAL OPERATORS BY THE METHOD OF OPERATOR IDENTITIES

E.A. Arshava

Kharkiv State Technical University of Civil Engineering and Architecture,
Sumskaya str., 40, Kharkiv, 61002, Ukraine, e-mail: elarshava@mail.ru

Abstract. The problem of integral operator's inversing on the finite interval, whose kernel satisfies to the differential equation in the particular of a hyperbolic type, is studied by the operator identities method. The generalized commutations relations are investigated and the sufficient conditions of the finite-dimensionness of the corresponding commutation operator are obtained.

The equation with a special right part to which the decision of some problems of astrophysics is reduced, theories of carry of radiation is investigated.

Keywords: operator identities, inverse operator, generalized commutation relations.

УДК 517.63

ОБ ОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДВУМЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.И. Безродных, В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: sergeyib@pochta.ru,vlasov@ccas.ru

Аннотация. При практическом использовании гармонических отображений $\mathcal{F}$ для конструирования расчетных сеток в сложных областях $\mathcal{Z}$, как правило, строят обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$, преобразующее каноническую область (обычно, квадрат $\mathcal{Q}$) на $\mathcal{Z}$, так как имеющаяся в $\mathcal{Q}$ естественная декартова сетка удобна для реализации численных методов, применяемых для вычисления $\mathcal{F}^{-1}$. Вместе с тем, вычислительная практика показала, что, несмотря на теорему Радо — Кнезера, гарантирующую гомеоморфизм отображения $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Z}$, в реальных вычислениях такое (приближенное) отображение нередко оказывается неоднолистным, либо обладающим большой и неустранимой погрешностью. В работе показано, что для построения $\mathcal{F}$ с высокой точностью, а значит, и высококачественной расчетной сетки в $\mathcal{Z}$, может быть эффективно применен метод мультиполей.

Ключевые слова: гармонические отображения, расчетные сетки, вычислительные методы, метод мультиполей.

1 Гармонические отображения

1.1. Пусть жордановы области $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{W}$ с кусочно–гладкими границами $\partial\mathcal{Z}$ и $\partial\mathcal{W}$ расположены соответственно на комплексных плоскостях $z = x + iy$ и $w = u + iv$, а функция $w = \mathcal{B}(z)$ осуществляет гомеоморфное отображение $\partial\mathcal{Z}$ на $\partial\mathcal{W}$. Если функция $w = \mathcal{F}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, непрерывная в замкнутой области $\overline{\mathcal{Z}}$ и дважды непрерывно дифференцируемая в $\mathcal{Z}$ по совокупности переменных (x, y), т.е. $\mathcal{F}(z) \in C^2(\mathcal{Z}; \mathbb{R}^2) \cap C(\overline{\mathcal{Z}}; \mathbb{R}^2)$, является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta\,\mathcal{F}(z) \,=\, 0, \qquad z \in \mathcal{Z}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{F}(z) \,=\, \mathcal{B}(z), \qquad z \in \partial\mathcal{Z}, \tag{1.2}$$

то такую функцию $\mathcal{F}(z)$ называют *гармоническим отображением области* $\mathcal{Z}$ (см., например, [1], [2]). Если при этом $\mathcal{F}$ осуществляет гомеоморфизм замыканий областей ($\mathcal{F} : \overline{\mathcal{Z}} \xrightarrow{Hom} \overline{\mathcal{W}}$), то такую функцию $\mathcal{F}$ называют *гармоническим отображением области* $\mathcal{Z}$ *на область* $\mathcal{W}$ и пишут $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{W}$.

Подчеркнем, что гармоническое отображение, вообще говоря, не является конформным, так как компоненты $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вектора $\mathcal{F}$ не обязаны быть связанными условиями Коши — Римана.

Гармонические отображения были предметом широких исследований (см., например, [1]-[8]) и нашли многочисленные приложения, в частности для построения расчетных

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00500, 07-01-00503), программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3 "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач" и программой РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики"

сеток [9]–[17]. Отметим, что решение $\mathcal{F}$ задачи (1.1), (1.2), т.е. непрерывное гармоническое продолжение гомеоморфизма $\mathcal{B} : \partial\mathcal{Z} \xrightarrow{Hom} \partial\mathcal{W}$ границ областей, не обязательно обеспечивает гомеоморфизм самих областей $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{W}$. Приведем пример подобного отображения (другие примеры даны, например, в [8], [15], [18]-[20]).

1.2. Примем в качестве области $\mathcal{Z}$ изображенную на рис. 1а равнобедренную трапецию с вершинами $A = -1 - i,\ C = 1 - i,\ E = 1/2 + 3i/4,\ G = -1/2 + 3i/4,$ а область $\mathcal{W}$ определим как внутренность контура $F(\partial\mathcal{Z})$ — образа границы $\partial\mathcal{Z}$ при отображении

$$F(z) = x + i(x^2 - y^2). \tag{1.3}$$

Область $\mathcal{W}$ изображена на рис. 1б; ее границу составляют последовательно соединенные четыре параболические дуги,

$$\partial\mathcal{W} = (ABC) \cup (CDE) \cup (EFG) \cup (GHA),$$

являющиеся образами одноименных сторон трапеции при отображении (1.3).

Точки на плоскостях z и w, переходящие при отображении (1.3) друг в друга, обозначаем одинаковыми буквами; дуги — круглыми скобками, внутри которых перечисляются их начальная, промежуточные и конечная точки; области, ограниченные замкнутыми контурами, — квадратными скобками с указанными в них граничными точками, порядок перечисления которых соответствует положительному направлению обхода (когда область остается слева).

Отображение (1.3), осуществляющее гомеоморфизм границ $\partial\mathcal{Z}$ и $\partial\mathcal{W}$, является решением задачи (1.1), (1.2). Вместе с тем это отображение переводит область $\mathcal{Z}$ не в область $\mathcal{W}$, а в двулистное многообразие $\widetilde{\mathcal{W}} \supset \mathcal{W}$, состоящее из двух плоских областей $\mathcal{W}^- = [ABCDOHA]$ и $\mathcal{W}^+ = [HGFEDOH]$, соединяющихся через дуговой интервал $\mathrm{int}(DOH)$ и являющихся однолистными образами соответственно нижней $\mathcal{Z}^- := \mathcal{Z} \cap \mathbb{H}^-$ и верхней $\mathcal{Z}^+ := \mathcal{Z} \cap \mathbb{H}^+$ половины трапеции, где $\mathbb{H}^-$ и $\mathbb{H}^+$ — нижняя и верхняя полуплоскости (см. рис. 1а).

Отметим, что линия (DOH), соединяющая $\mathcal{W}^-$ и $\mathcal{W}^+$, является образом отрезка вещественной оси, где якобиан $J = -2y$ отображения (1.3) обращается в нуль. При этом якобиан положителен в области $\mathcal{Z}^-$ и отрицателен в $\mathcal{Z}^+$.

1.3. Проблема гомеоморфизма является одной из центральных в теории гармонических отображений. Вопрос о том, какие условия обеспечивают такой гомеоморфизм, исследовался многими авторами [1]-[5], [7]-[8], [13], [20]-[22].

Для плоских односвязных областей в работах Т.Радо [3] и Х.Кнезера [4] установлено, что если $\mathcal{W}$ выпукла, то при любом гомеоморфизме $\mathcal{B}$ границ решение $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{W}$ задачи (1.1), (1.2) осуществляет гомеоморфизм $\overline{\mathcal{Z}}$ и $\overline{\mathcal{W}}$.

В работе Г.Шоке [5] был указан другой способ доказательства этого утверждения и дана "обратная" теорема: для любой невыпуклой жордановой области $\mathcal{W}$ существует такой гомеоморфизм границ $\mathcal{B}$, что решение $\mathcal{F}$ задачи (1.1), (1.2) не является гомеоморфизмом областей $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{W}$.

Отметим, что выпуклость образа (области $\mathcal{W}$) не является необходимым условием для того, чтобы гармоническое продолжение $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{W}$ гомеоморфизма $\mathcal{B}$ границ было бы гомеоморфизмом (однолистным отображением) областей $\mathcal{Z}$ на $\mathcal{W}$. Вопрос о необходимых и достаточных условиях однолистности гармонического отображения круга $\mathbb{U} = \{|x| < 1\}$ на область $\mathcal{W}$ с ляпуновской границей был решен в работе Л.Д.Кудрявцева [7].

2 Метод Уинслоу

2.1. Одним из наиболее важных приложений гармонических отображений, как уже было отмечено в п. 1.1, является построение с их помощью расчетных сеток в областях $\mathcal{Z}$ сложной конфигурации. Для этого в качестве области $\mathcal{W}$ выбирается квадрат $\mathcal{Q} := [0,1]\times[0,1]$, а требуемая сетка $\mathfrak{Z}_h$ получается путем переноса естественной для квадрата* равномерной с шагом h) декартовой сетки $\mathfrak{Q}_h$ в область $\mathcal{Z}$ с помощью гармонического отображения $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{Q}$, т.е. $\mathfrak{Z}_h = \mathcal{F}^{-1}(\mathfrak{Q}_h)$. Напомним очевидное определение сетки $\mathfrak{Q}_h$ с шагом $h = 1/N$ при некотором $N \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел:

$$\mathfrak{Q}_h := \Big\{ z_{m,\,n} = (m-1)h + i(n-1)h \Big\}_{m=1,\,n=1}^{N+1,\,N+1}. \tag{2.1}$$

При этом граничный гомеоморфизм $B : \partial\mathcal{Z} \xrightarrow{Hom} \partial\mathcal{Q}$ выбирается таким образом, чтобы на прообразах $l_n := B^{-1}(L_n)$ сторон L_n квадрата $\mathcal{Q}$ "граничная производная" dS/ds отображения $w = B(z)$ была постоянна, т.е.

$$dS(z)/ds = |l_n|^{-1}, \qquad z \in l_n\,. \tag{2.2}$$

Здесь $s(z)$ и $S(w)$ — длины дуг на $\partial\mathcal{Z}$ и на $\partial\mathcal{Q}$, отсчитываемые в положительном направлении (так, что область остается слева) соответственно от точек $z = 0$ и $w = B(0)$, а L_1, L_2, L_3 и L_4 — соответственно нижняя, правая, верхняя и левая стороны квадрата $\mathcal{Q}$. Таким образом, для отображения $w = \mathcal{F}(z)$ задача Дирихле (1.1), (1.2) приобретает следующий вид:

$$\Delta\mathcal{F}(z) = 0, \qquad z \in \mathcal{Z}, \tag{2.3}$$

$$B(z) = z_n - (i)^{n+1}\,|l_n|^{-1}\big[s(z) - \sigma_n\big], \qquad z \in l_n, \quad n = \overline{1,\,4}; \tag{2.4}$$

здесь $\sigma_n := \sum\limits_{k=1}^{n-1} |l_k|$, а z_n — вершины квадрата $\mathcal{Q}$, определяемые равенствами

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = i.$$

Получаемая таким способом регулярная† четырехугольная сетка $\mathfrak{Z}_h$ будет адаптированной к области $\mathcal{Z}$ в том смысле, что все ее узлы будут лежать в замыкании этой области, а сама сетка (при достаточно малом размере h ее ячеек) не будет содержать самоналеганий. Эти свойства вытекают из того, что рассматриваемое отображение $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{Q}$ осуществляет гомеоморфизм замыканий областей $\overline{\mathcal{Z}}$ и $\overline{\mathcal{Q}}$; последнее следует из теоремы Радо — Кнезера с учетом выпуклости квадрата $\mathcal{Q}$.

2.2. Для построения требуемого отображения $\mathcal{F}$ необходимо решить задачу Дирихле (2.3), (2.4). Но так как область $\mathcal{Z}$ имеет сложную форму, то для решения такой задачи приходится применять численные методы, реализация которых, в свою очередь, требует наличия адаптированной к $\mathcal{Z}$ сетки. Получается, что для построения адаптированной к области сетки необходимо уже иметь такую сетку!

---

*) Вместо квадрата может использоваться другая область, в которой сетка строится удобным способом.

†) Регулярной называется сетка, у которой ячейки представляют собой многоугольники с одинаковым числом вершин.

Выход из этого порочного круга был указан А.Уинслоу [9], предложившим строить не прямое $\mathcal{F} : \mathcal{Z} \xrightarrow{harm} \mathcal{Q}$, а "обратное гармоническое" отображение

$$\mathcal{F}^{-1}(w) \,=\, x(u,\,v) + iy(u,\,v) :\ \mathcal{Q} \xrightarrow{harm^{-1}} \mathcal{Z}.$$

Компоненты $x(u,\,v)$ и $y(u,\,v)$ такого отображения, как показано в [9], представляют собой решение системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_v^2 \,+\, y_v^2)\, x_{uu} \,-\, 2\,(x_u x_v \,+\, y_u y_v)\, x_{uv} \,+\, (x_u^2 \,+\, y_u^2)\, x_{vv} \,=\, 0\,, \\ (x_v^2 \,+\, y_v^2)\, y_{uu} \,-\, 2\,(x_u x_v \,+\, y_u y_v)\, y_{uv} \,+\, (x_u^2 \,+\, y_u^2)\, y_{vv} \,=\, 0\,, \end{array} \right. \tag{2.5}$$

в квадрате $\mathcal{Q}$ с граничными условиями Дирихле, определяемыми обратным к (2.4) отображением $B^{-1} : \partial\mathcal{Q} \xrightarrow{Hom} \partial\mathcal{Z}$ и имеющими вид

$$x(u,v) = \operatorname{Re} B^{-1}(w), \quad y(u,v) = \operatorname{Im} B^{-1}(w), \qquad w \in \partial\mathcal{Q}. \tag{2.6}$$

Нижние индексы в (2.5) означают соответстующие частные производные функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, а через $\operatorname{Re} a$ и $\operatorname{Im} a$ обозначены вещественная и мнимая части комплексного числа a.

Эффективность описанного метода Уинслоу, широко применяемого в практике построения расчетных сеток [11]–[13], [15]-[17], [19], [22], [23], обусловлена тем, что квадрат $\mathcal{Q}$, где нужно решать систему уравнений (2.5), снабжен естественной декартовой сеткой $\mathfrak{Q}_h$, на которой легко строится стандартная конечно–разностная схема [25], а нелинейность системы (2.5) учитывается в этой схеме с помощью метода простой итерации [26] либо близких методов [11].

2.3. Для построения отображения $\mathcal{F}^{-1}(w) \,=\, x(u,v) + iy(u,v)$ нередко используется также родственный методу Уинслоу вариационный подход, предложенный в работе [27] и получивший дальнейшее развитие в [15], [28]-[30] и др. Он заключается в минимизации следующего функционала, представляющего собой интеграл Дирихле для системы (2.5):

$$I(\mathcal{F}^{-1}) = \int_Q \frac{g_{11} + g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv,$$

где величи́ны $g_{kl}(u,v)$, определяемые равенствами

$$g_{11}(u,v) := x_u^2 + y_u^2, \quad g_{22}(u,v) := x_v^2 + y_v^2, \quad g_{12}(u,v) := x_u y_u + x_v y_v,$$

имеют геометрический смысл элементов метрического тензора g для отображения $\mathcal{F}^{-1}(w)$. Исходя из такой интерпретации, подынтегральную функцию в (3.1) можно записать в бескоординатном виде $\operatorname{tr}(g)/\sqrt{\det g}$, удобном для проведения различных модификаций и обобщений [15], [19], [31]-[35]; здесь, как обычно, использованы символы tr и det для обозначения следа и определителя матрицы.

При численной реализации процедуры минимизации функционала (3.1) обычно используется двумерная квадратурная формула прямоугольников для приближения интеграла с простейшей конечно–разностной аппроксимацией входящих в этот функционал производных [15].

3 Проблема Кнаппа — Лучака

Практика применения метода Уинслоу и описанных в пп. 2.2, 2.3 родственных методов построения обратного гармонического отображения $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Q} \xrightarrow{harm^{-1}} \mathcal{Z}$ показала, что, при всех их достоинствах, эти методы нередко теряют эффективность и приводят к неудовлетворительным результатам.

Одними из первых, кто обратил внимание на эти трудности, были П.Кнапп и Р.Лучак. В работе [36] они применили метод Уинслоу для построения обратного гармонического отображения F^{-1} квадрата (рис. 2а) на подковообразную область $\mathcal{S}$ (рис. 2б), границу $\partial\mathcal{S}$ которой составляют два отрезка вещественной оси $l_1 := [1,\, 2]$ и $l_3 := [-2,\, -1]$, полуэллипс l_2 и полуокружность l_4, определяемые по формулам

$$l_2 := \left\{ z : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2A}\right)^2 = 1, \quad \mathrm{Im} z \geq 0 \right\}, \qquad l_4 := \{ z : |z| = 1,\, \mathrm{Im} z \geq 0 \}\,. \tag{3.1}$$

При этом гомеоморфизм между границами $B : \partial\mathcal{S} \xrightarrow{Hom} \partial\mathcal{Q}$, переводивший дуги l_n границы $\partial\mathcal{S}$ в стороны L_n квадрата $\mathcal{Q}$ по правилу $L_n = B(l_n)$, соответствовал формуле (2.4). Конечной целью этих расчетов было построение сетки $\mathfrak{S}_h$ в области $\mathcal{S}$ по формуле

$$\mathfrak{S}_h = F^{-1}(\mathfrak{Q}_h), \tag{3.2}$$

иначе говоря, построение сетки $\mathfrak{S}_h$ осуществлялось путем перевода декартовой в квадрате $\mathcal{Q}$ сетки $\mathfrak{Q}_h$ на область $\mathcal{S}$ с помощью найденного отображения $F^{-1} : \mathcal{Q} \xrightarrow{harm^{-1}} \mathcal{S}$.

Проведенные авторами работы [36] численные эксперименты показали, что при сравнительно небольшом отношении A полуосей эллиптической дуги l_2 получаемая сетка $\mathfrak{S}_h$ была вполне удовлетворительной. Пример такой сетки, рассчитанной при $A = 2$, изображен на рис. 3. Шаг сетки–прообраза $\mathfrak{Q}_h$ составил $h = 1/32$; таким образом, сетка $\mathfrak{S}_h$ в области $\mathcal{S}$ состояла из пересечений 33–х координатных линий в одном и 33–х координатных линий в другом направлении.

Однако, при значениях A, больших 3.8, терялось не только качество сетки, но и возникал эффект ее самоналегания, т.е. терялся гомеоморфизм численно получаемого дискретизированного обратного гармонического отображения F_h^{-1}. Этот эффект продемонстрирован на примере сетки, рассчитанной при $A = 5$ и изображенной на рис. 4. Более детальные изображения структуры этой сетки в местах ее самоналегания, полученные путем постепенного увеличения масштаба, приведены последовательно на рис. 5, 6, 7. Эти численные результаты получены Б.Н.Азаренком при помощи разностной схемы [11] второго порядка на квадратной сетке $\mathfrak{Q}_h$ при $h = 1/20$; таким образом, сетка $\mathfrak{S}_h$ соответствовала разбиению 21×21.

В работе [19] было показано, что для той же задачи (т.е. при $A = 5$) при измельчении шага сетки $\mathfrak{Q}_h$ в 5 раз самоналегание сетки $\mathfrak{S}_h$ сохраняется. При увеличении же разбиения до 501×501 удается устранить самоналегание сетки, т.е. при таком разбиении отображение F_h^{-1} осуществляет гомеоморфизм $\mathcal{Q} \xrightarrow{Hom} \mathcal{S}$, однако получаемая сетка $\mathfrak{S}_h$ имеет неудовлетворительное качество; при этом расчетное время на PC 2.4 ГГц составило 2 ч. В [19] было показано, что ни дальнейшее измельчение сетки $\mathfrak{Q}_h$, ни повышение порядка точности разностной схемы (до четвертого порядка с использованием 25–точечного шаблона), ни замена метода Уинслоу на вариационный метод [15] (при этом время счета на том же компьютере составило 16 часов) не приводили к сколь–нибудь заметному улучшению качества сетки, и она оставалась непригодной для проведения на ней расчетов. В связи

с этими результатами численных экпериментов возникла настоятельная необходимость надежного получения отображения $F^{-1}:\ \mathcal{Q} \overset{harm^{-1}}{\longrightarrow} \mathcal{S}$ с высокой точностью.

В следующем разделе высокоточное построение этого отображения осуществлено путем обращения гармонического отображения $F\ :\ \mathcal{S} \overset{harm}{\longrightarrow} \mathcal{Q}$, полученного с помощью метода мультиполей [37]-[39] — аналитико–численного метода, обеспечивающего решение краевых задач для уравнения Лапласа с высокой точностью, обладающего экспоненциальной скоростью сходимости и не требующего никакой сетки при своей реализации.

4 Построение $\mathcal{S} \overset{harm}{\longrightarrow} \mathcal{Q}$ с помощью метода мультиполей

4.1. Можно убедиться, что вещественная и мнимая части гомеоморфизма $u(x,y)+iv(x,y) = B : \partial\mathcal{S} \overset{Hom}{\longrightarrow} \partial\mathcal{Q}$, подчиненного условию (2.4), даются выражениями

$$\begin{aligned} &u(x,y) = x-1, \quad z \in l_1; && u(x,y) = 1, \quad z \in l_2, \\ &u(x,y) = -x-1, \quad z \in l_3; && u(x,y) = 0, \quad z \in l_4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &v(x,\,y) = 0, \quad z \in l_1; && v(x,\,y) = \mathcal{V}(z), \quad z \in l_2; \\ &v(x,\,y) = 1, \quad z \in l_3; && v(x,\,y) = \pi^{-1}\arccos x, \quad z \in l_4. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\mathcal{V}(z)$ определяется по формуле

$$\mathcal{V}(z) \;=\; \begin{cases} \mathcal{E}\big(2^{-1}y/A,k\big), & z \in \;\; l_2 \cap \{\operatorname{Re} z \geq 0\,\}, \\ 1-\mathcal{E}\big(2^{-1}y/A,k\big), & z \in \;\; l_2 \cap \{\operatorname{Re} z \leq 0\,\}, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\mathcal{E}(\xi,k)$ дается равенством

$$\mathcal{E}(\xi,k) := 2^{-1}E(\xi,k)/E(k), \tag{4.4}$$

в котором $E(\xi,k)$ и $E(k)$ — неполный и полный эллиптические интегралы второго рода [40]

$$E\big(\xi,k\big) := \int_0^{\xi} \sqrt{(1-k^2t^2)/(1-t^2)}\;dt, \qquad E(k) := E(1,k), \tag{4.5}$$

с модулем $k = \sqrt{1-A^{-2}}$.

Задача о построении требуемого гармонического отображения

$$u(x,y)+iv(x,y) = F\,:\ \mathcal{S} \overset{harm}{\longrightarrow} \mathcal{Q} \tag{4.6}$$

заключается в решении двух задач Дирихле отдельно для вещественной $u(x,y)$ и мнимой $v(x,y)$ частей этого отображения с граничными условиями, задаваемыми соответственно формулами (4.1) и (4.2).

4.2. Для решения сформулированных задач относительно u и v определим предварительно расширение $\mathcal{G}$ подковообразной области $\mathcal{S}$, а в нем сформулируем краевые задачи для вспомогательных функций u_0 и v_0. Эти функции используются для того, чтобы на части границы $\partial\mathcal{S}$ получить однородное условие Дирихле, что является необходимым для применения метода мультиполей.

Положим

$$\mathcal{G} := \big\{z:\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\big\}, \tag{4.7}$$

$\mathcal{G} \supset \mathcal{S}$, и заметим, что граница $\partial\mathcal{G}$ состоит из трех звеньев: $\partial\mathcal{G} = l_1^+ \cup l_3^+ \cup l_4$, где l_4 определяется по формуле (3.1), а $l_1^+ \supset l_1$ и $l_3^+ \supset l_3$ — по формулам

$$l_1^+ := \big\{z:\ x \in [1, +\infty),\ \ y = 0\big\}, \qquad l_3^+ := \big\{z:\ x \in (-\infty, -1],\ \ y = 0\big\}. \tag{4.8}$$

Отметим, что дуга l_2 границы $\partial\mathcal{S}$ (за исключением концевых точек) лежит в области $\mathcal{G}$, а дуга

$$\gamma := l_3 \cup l_4 \cup l_1, \tag{4.9}$$

является частью границы $\partial\mathcal{S}$, так что $\partial\mathcal{S} = \gamma \cup l_2$.

Определим функцию $u_0(x, y)$ как решение краевой задачи в области $\mathcal{G}$

$$\Delta\, u_0 = 0, \quad z \in \mathcal{G}; \tag{4.10}$$

$$u_0 = -x - 1, \quad z \in l_3; \qquad u_0 = 0, \quad z \in l_4; \qquad u_0 = x - 1, \quad z \in l_1; \tag{4.11}$$

с условием роста на бесконечности

$$u_0(x, y) = \mathcal{O}\left(z \ln z\right), \qquad \mathcal{G} \supset z \to \infty, \tag{4.12}$$

а функцию $v_0(x, y)$ — как решение следующей краевой задачи в области $\mathcal{G}$

$$\Delta\, v_0 = 0, \quad z \in \mathcal{G}; \tag{4.13}$$

$$v_0 = 1, \quad z \in l_3; \qquad v_0 = \pi^{-1} \arccos x, \quad z \in l_4; \qquad v_0 = 0, \quad z \in l_1; \tag{4.14}$$

$$v_0(x, y) = \mathcal{O}(1), \qquad \mathcal{G} \supset z \to \infty. \tag{4.15}$$

Решения этих задач имеют вид

$$u_0(x, y) = 1 + \operatorname{Re}\left(\frac{2}{\pi i}\, \ln\frac{z-1}{z+1} + \frac{z^2-1}{2z} - \frac{z^2+1}{\pi i z} \ln\frac{z^2-1}{2z}\right), \tag{4.16}$$

$$v_0(x, y) = \pi^{-1} \arg z. \tag{4.17}$$

4.3. Представляя функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) \,+\, U(x, y), \qquad v(x, y) = v_0(x, y) \,+\, V(x, y), \tag{4.18}$$

получаем с учетом (4.1), (4.2), (4.10)–(4.13) следующие постановки задач для функций U и V:

$$\Delta\, U = 0, \quad z \in \mathcal{S}; \qquad U = 0, \quad z \in \gamma; \qquad U = 1 - u_0, \quad z \in l_2; \tag{4.19}$$

$$\Delta\, V = 0, \quad z \in \mathcal{S}; \qquad V = 0, \quad z \in \gamma; \qquad V = \mathcal{V} - v_0, \quad z \in l_2, \tag{4.20}$$

где дуга γ определяется соотношением (4.9), функция $\mathcal{V}$ дается равенством (4.3), а функции u_0 и v_0 — формулами (4.16) и (4.17)

Решения задач (4.19) и (4.20) будем строить с помощью метода мультиполей [37]-[39], который, применительно к указанным задачам, использует систему аппроксимативных функций $\Omega_k(x, y)$, родственных мультиполям из теории потенциала [41] и определяемых по формуле

$$\Omega_k(x, y) := \operatorname{Im}\left(z^{\,k} + z^{\,-k}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.21}$$

Эти функции тождественно удовлетволетворяют уравнению Лапласа в области $\mathcal{S}$ и однородному условию Дирихле на γ, а на дуге l_2 соствляют полную и минимальную систему в пространстве $L_2(l_2)$. Решения U и V краевых задач (4.19) и (4.20) представляются в виде пределов линейных комбинаций Ω_k:

$$U(x,y) = \lim_{N\to\infty} U^N(x,y), \qquad U^N(x,y) := \sum\nolimits_{k=1}^{N} a_k^N\, \Omega_k(x,y), \tag{4.22}$$

$$V(x,y) = \lim_{N\to\infty} V^N(x,y), \qquad V^N(x,y) := \sum\nolimits_{k=1}^{N} b_k^N\, \Omega_k(x,y), \tag{4.23}$$

коэффициенты a_k^N и b_k^N которых находятся из проекционного принципа, что приводит к следующим системам линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{k=1}^{N} (\Omega_k,\, \Omega_n)\, a_k^N = (1-u_0, \Omega_n), \qquad \sum\nolimits_{k=1}^{N} (\Omega_k,\, \Omega_n)\, b_k^N = (\mathcal{V}-v_0, \Omega_n), \tag{4.24}$$

где $n = \overline{1,N}$, а через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(l_2)$.

Последовательности $\{U^N\}$ и $\{V^N\}$ допускают дифференцирование любое число раз на множестве $\mathcal{S}\cup\widetilde{\gamma}$, где $\widetilde{\gamma}$ — дуга γ без точек $z=-2$, $z=-1$, $z=1$, $z=2$. Тогда, полагая

$$u^N := u_0 + U^N, \qquad v^N := v_0 + V^N, \tag{4.25}$$

получаем, что для любого компакта $\sigma \subset \mathcal{S}\cup\widetilde{\gamma}$ справедливы соотношения

$$\max_{\sigma}\big|\, D_{l,\,t}\,(u^N - u)\,\big| \to 0, \qquad \max_{\sigma}\big|\, D_{l,\,t}\,(v^N - v)\,\big| \to 0, \qquad N\to\infty;$$

здесь обозначено $D_{l,\,t} := \partial^{l+t}/\partial x^l \partial y^t$, где l, t — неотрицательные целые числа.

Отметим, что описанный метод допускает апостериорную оценку погрешности в норме $C(\overline{\mathcal{S}})$. Действительно, так как $u-u^N$ и $v-v^N$ — гармонические функции, то, используя для них принцип максимума, получаем, что

$$\max_{\overline{\mathcal{S}}} |u-u^N| \le \max_{l_2} |1-u^N|, \qquad \max_{\overline{\mathcal{S}}} |v-v^N| \le \max_{l_2} |\mathcal{V}-v^N|, \tag{4.26}$$

где правые части неравенств легко находятся после численного решения задачи и, тем самым, находим требуемую апостериорную оценку погрешности.

4.4. Изложенный метод построения гармонического отображения

$$F:\ \mathcal{S} \xrightarrow{harm} \mathcal{Q} = u + iv = u_0 + U + i(v_0 + V) \tag{4.27}$$

подковообразной области $\mathcal{S}$ на квадрат $\mathcal{Q}$, включающий формулы (4.16) и (4.17) для u_0 и v_0 и описанный в п. 3.3 алгоритм получения функций U и V, был численно реализован для значений отношения A полуосей эллиптической дуги l_2, лежащих в диапазоне [1, 10].

При этом погрешность вычисляемого отображения F, контролируемая с помощью апостериорных оценок (4.26), не превышала 10^{-9}, а расчетное время на PC 2.4 ГГц не превышало 1 сек. Указанная точность обеспечивалась использованием не более, чем 50 мультиполей Ω_k в представлениях (4.22), (4.23).

На рис. 8 изображена сетка $\mathfrak{S}_h$, являющаяся прообразом относительно вычисленного отображения F декартовой сетки $\mathfrak{Q}_h$, соответствующей разбиению 21×21. Эта сетка была охарактеризована в [19] как обладающая высоким качеством с точки зрения реализации на ней численных схем и получения адекватных вычислительных результатов.

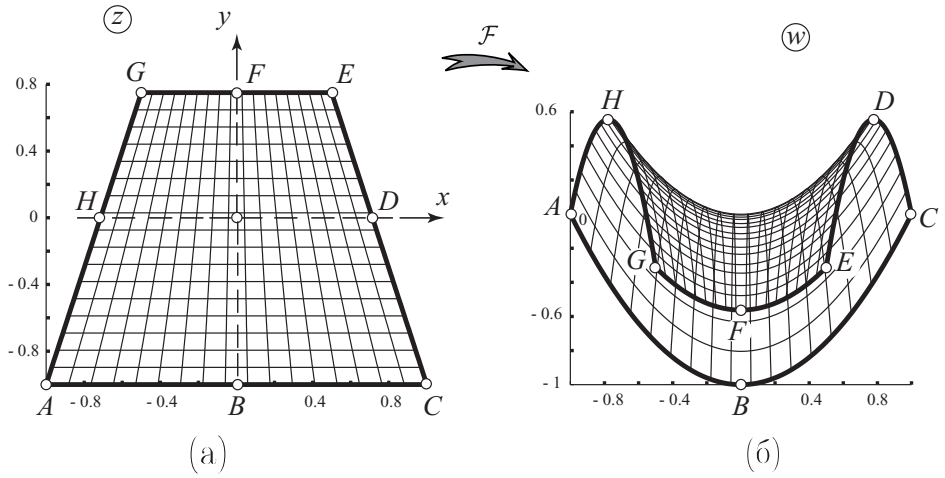

z
y
x
G
F
E
H
D
A
B
C
0.8
0.4
0
- 0.4
- 0.8
- 0.8
- 0.4
0.4
0.8
(а)
$\mathcal{F}$
w
H
D
A
C
G
E
F
B
0.6
- 0.6
- 1
- 0.8
- 0.4
0.4
0.8
(б)

Рис. 1.

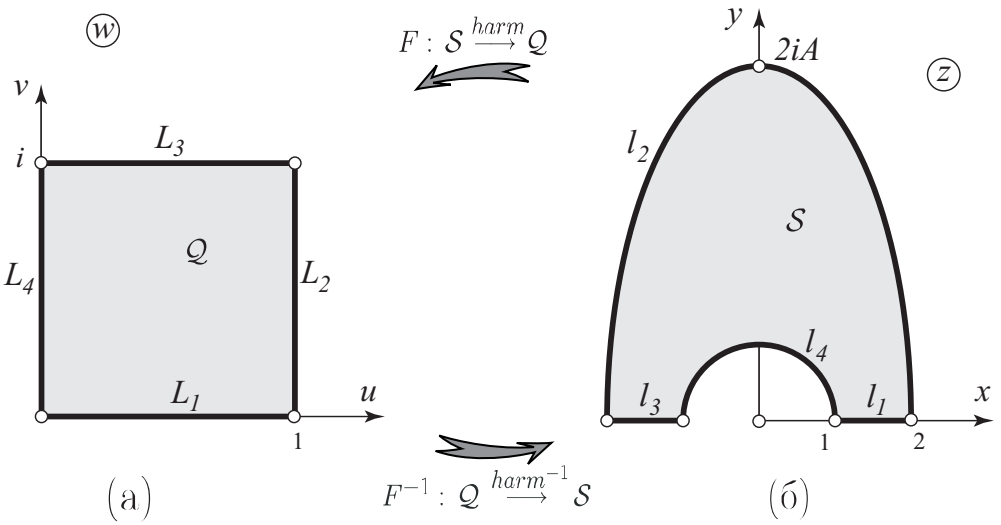

w
v
i
L_3
L_4
$\mathcal{Q}$
L_2
L_1
u
1
(а)
$F : \mathcal{S} \xrightarrow{harm} \mathcal{Q}$
$F^{-1} : \mathcal{Q} \xrightarrow{harm^{-1}} \mathcal{S}$
y
2iA
z
l_2
$\mathcal{S}$
l_4
l_3
l_1
x
1
2
(б)

Рис. 2.

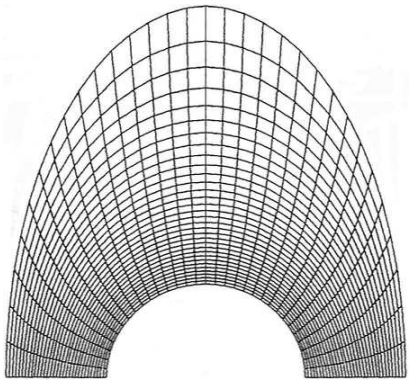


Рис. 3.

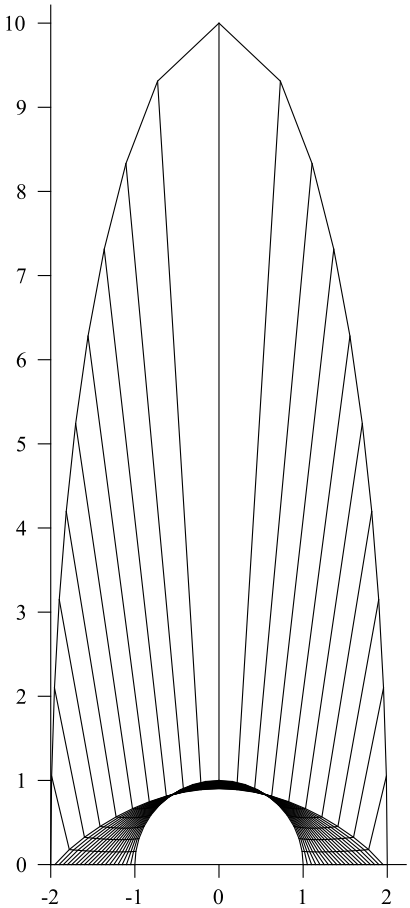


Рис. 4.

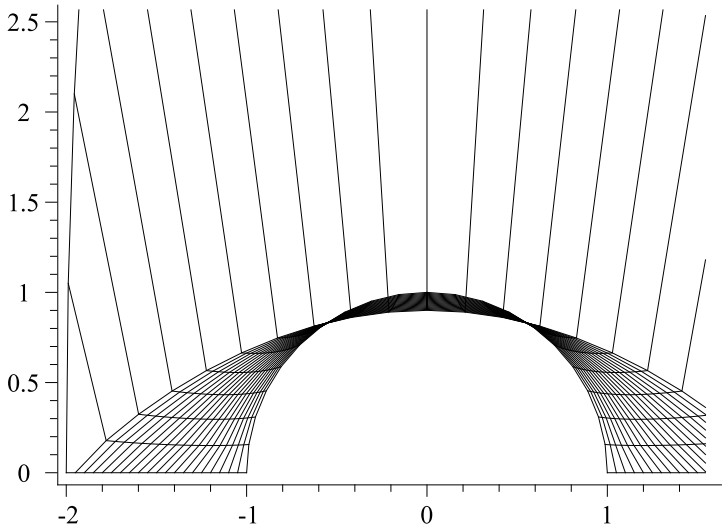


Рис. 5.

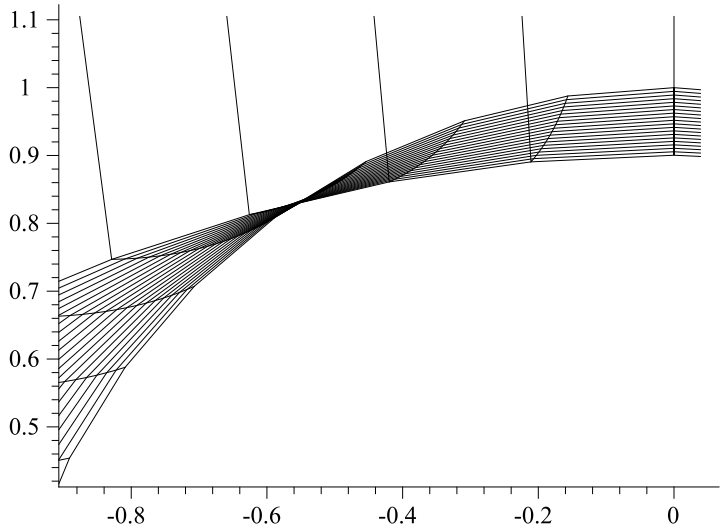


Рис. 6.

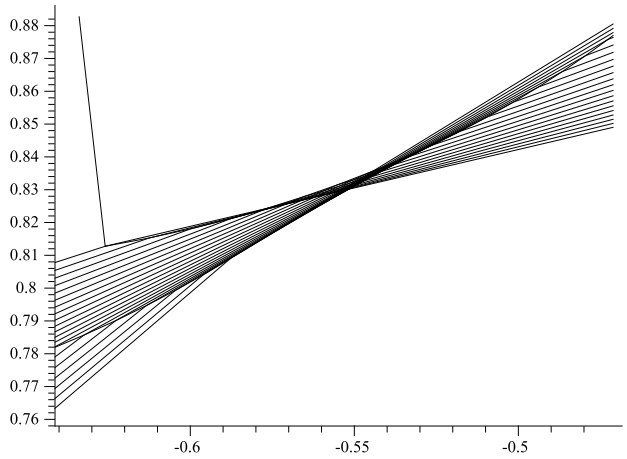

0.88
0.87
0.86
0.85
0.84
0.83
0.82
0.81
0.8
0.79
0.78
0.77
0.76
-0.6
-0.55
-0.5

Рис. 7.

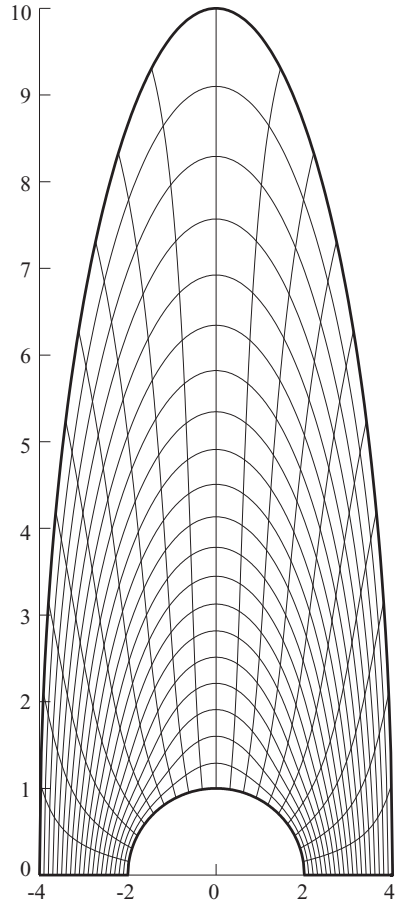

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-4
-2
0
2
4

Рис. 8.

Литература

1. P. Duren. Harmonic mappings in the plane, "Cambrige Tracts in Mathematics". Vol. 156, Cambrige: Cambrige University Press, 2004.

2. J. Jost. Lectures on harmonic maps, "Lecture Notes in Mathematics". Vol. 1161, Berlin, New York: Springer–Verlag, 1985.

3. T. Radó. Aufgabe 41 // Jber. Deutsch. Math.-Verein. V.35. 1926. P. 49.

4. H. Kneser. Lösung der Aufgabe 41 // Jber. Deutsch. Math.-Verein. V.35. 1926. P. 123-124.

5. G. Choquet. Sur un type de transformation analitiques généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques // Bull. Sci. Math. V.69, №2. 1945. P. 156-165.

6. F.B. Fuller. Harmonic mappings // Proc. Nat. Acad. Sci. V.40. 1954. P. 987-991.

7. Л.Д. Кудрявцев. О свойствах гармонических отображений плоских областей// Матем. сб. Т. 36 (78), №2. 1955. С. 201-208.

8. D. Bshouty, W. Hengartner. Univalent harmonic mappings in the plane // In: "Handbook of complex analysis: geometric function theory". Vol. 2. Amsterdam: Elsevier, 2005. P. 479-506.

9. A. Winslow. Numerical solution of the quazi–linear Poisson equations in a nonuniform triangle mesh // J. Comp. Phys. V.2. 1967. P. 149-172.

10. W.H. Chu. Development of a general finite difference approximation for a general domain. I. Mashine transformation // J. Computational Phys. V.8. 1971. P. 392-408.

11. С.К. Годунов, Г.П. Прокопов. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т.12, №2. P. 429-440.

12. J.F. Thompson (Ed.). Numerical Grid Generation. N.-Y.: North–Holland, 1982.

13. J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin. Numerical grid generation, N.–Y.: North–Holland, 1985.

14. G. Liao. On harmonic maps // In: "Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation" (Ed.: J.E.Castillo). Philadelphia. SIAM, 1991. P. 123–130.

15. С.А. Иваненко. Адаптивно–гармонические сетки, М.: Изд-во ВЦ РАН, 1997.

16. P.W. Smith, S.S. Sritharan. Theory of harmonic grid generation // Complex variables. V.10. 1998. P. 359-369.

17. V.D. Liseikin. Grid generation methods, N.–Y.: Springer–Verlag, 1999.

18. Г.П. Прокопов. Конструирование тестовых задач для построения двумерных регулярных сеток // В кн.: Вопросы атомной науки и техники. Сер.: "Матем. моделир. физ. процессов". Вып.1. 1993. С. 7-12.

19. Б.Н. Азаренок. О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т.49, №5. 2009. С. 826-839.

20. G. Alessandrini, V. Nesi. Invertible harmonic mappings, beyong Kneser // Ann. Scuola Norm, Sup. Pisa, Cl. Sci. 2009.

21. H. Lewy. On the non–vanishing of the Jacobian in certain one–to–one mappings // Bull. Am. Math. Soc. V.42. 1936. P. 689-692.

22. W. Hengartner, J. Szynal. Univalent harmonic ring mappings vanishing on the interior boundary // Canad. J. Math. V. 44, №1. 1992. P. 308-323.

23. J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (Eds). Handbook of Grid Generation CRC Press. Boca Raton. Florida, 1999.

24. // P. Knupp, S. Steinberg. Fundamentals of Grid Generation. CRC Press. Boca Raton. Florida, 1993.

25. А.А.Самарский. Теория разностных схем, М.: Наука, 1977.

26. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы, М.: Наука, 1987.

27. J.U. Brackbill, J.S. Saltzman. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comput. Phys. V. 46, №3. 1982. P. 342-368.

28. P.R. Eiseman. Adaptive grid genaration // Comput. Mrthods in Appl. Mech. and Engineering. V. 64. 1987. P. 321-376.

29. P.J. Roache, S. Steingerg. A new approach to grid genaration using a variational formulation // Proc. AIAA 7–th CFD conference, Cincinnati. 1985. P. 360-370.

30. Z.U. Warsi, J.F. Thompson. Application of variational methods in the fixed and adaptive grid generation // Computers Math. Applic. V. 19, №8/9. 1990. P. 31-41.

31. T. Takagi, K. Miki, B.C.J. Chen, U.T.Sha Numerical generation of boundary–fitted curvilinear coordinate systems for arbitrary curved surfaces // J. Comput. Phys. V. 58. 1985. P. 67-79.

32. Z.U. Warsi. Numerical grid generation in arbitrary surfaces through a second–order differential–geometric model // J. Comput. Phys. V. 64. 1986. P. 82-96.

33. Z.U. Warsi, W.N. Tuarn. Surface mesh generation using elliptic equations // Numerical grid generation in computational fluid dynamics, UK: Pineridge Press, 1986. P. 95-100.

34. S. Steingerg, P. Roache. Variational curve and surface grid genaration // J. Comput. Phys. V. 100, №1. 1992. P. 163-178.

35. J.U. Brackbill. An adaptive grid with directional control // J. Comput. Phys. V. 108, №1. 1993. P. 38-50.

36. P. Knapp, R. Luczak. Truncation error in grid generation: a case study // Numerical Methods for Partial Differential Equations. V. 11. 1995. P. 561-571.

37. В.И. Власов. Об одном методе решения некоторых смешанных задач для уравнения Лапласа // Доклады АН СССР. Т. 237, №5. 1977. С. 1012-1015.

38. В.И. Власов. Краевые задачи в областях с криволинейной границей, М.: ВЦ АН СССР. 1987.

39. V.I. Vlasov. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Zeitschr. Angew. Math. Mech. V. 76, Suppl. 1. 1996. P. 279-282.

40. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. III, М.: Наука, 1967.

41. Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. Уравнения в частных производных математической физики, М.: Высшая школа, 1970.

ON A COMPUTATIONAL PROBLEM OF 2D HARMONIC MAPPINGS

S.I.Bezrodnykh , V.I. Vlasov

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov str., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: sergeyib@pochta.ru,vlasov@ccas.ru

Abstract. Practial use of harmonic mappings $\mathcal{F}$ for computational mesh generation in complex shaped domains $\mathcal{Z}$ reduces this problem to construction of the inverse mapping $\mathcal{F}^{-1}$, which transorms a canonical domain (square $\mathcal{Q}$, as a rule) onto $\mathcal{Z}$ because natural Cartesian mapp in $\mathcal{Q}$ is sutable for realization of numerical methods employing for the $\mathcal{F}^{-1}$ computation. Nevertheless, computational practice showed that, inspite of the Rado — Kneser theorem, which insures homeomorphism of the mapping $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Q} \to \mathcal{Z}$, in real computations such approximate mapping quite often occures to be nonschlicht or having high and unremovable error. In the work we show that the Multipole method ensures effective construction of the mapping $\mathcal{F}$ with high accuracy.

Keywords: harmonic mapping, computatinal meshes, computatinoal methods, the Multipole method.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Г.О. Бузыкин, В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: gbuzykin@newmail.ru,vlasov@ccas.ru

Аннотация. Изложено теоретическое обоснование двух вариационных методов решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоских областях $\mathcal{B}$: метода наименьших квадратов и метода Треффца. Предварительно установлен ряд утверждений для соответствующих этим методам функциональных пространств: пространства Харди $e_2(\mathcal{B})$ и пространства Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$ функций, гармонических в $\mathcal{B}$. Проведенное численное исследование показало экспоненциальный характер сходимости этих методов.

Ключевые слова: уравнение лапласа, вариационные методы, метод наименьших квадратов, метод Треффца, пространства Харди, пространства Вейля.

1 Введение

1.1. Рассматриваемые методы. Настоящая работа посвящена двум вариационным методам решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta\, u(z) = 0,\ z \in \mathcal{B}, \qquad u(z') = h(z'),\ z' \in \Gamma, \tag{1.1}$$

в расположенных на комплексной плоскости $z = x+iy$ односвяхных областях $\mathcal{B}$ с кусочно–гладкой границей Γ: методу наименьших квадратов [1]-[4] и методу Треффца [2], [4], [5]. В этих методах в качестве аппроксимативной используется система функций $\xi_k(z)$ — гармонических многочленов, — определяемых по формулам

$$\xi_0(z) := 1, \quad \xi_{2k-1}(z) := \operatorname{Re}(z-z_0)^k, \quad \xi_{2k}(z) := \operatorname{Im}(z-z_0)^k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а z_0 — некоторая точка комплексой плоскости $\mathbb{C}$. Метод наименьших квадратов является вариационным в пространстве Харди $e_2(\mathcal{B})$, а метод Треффца — в пространстве Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$; эти пространства определены соответственно в [6]-[8] и [9].

Рассматриваемые методы дают решение задачи (1.1) в виде предела последовательности приближенных решений u^N (N — верхний индекс), определяемых как линейная комбинация первых N функций ξ_k,

$$u = \lim_{N\to\infty} u^N, \qquad u^N = \sum_{k=0}^{N} a_k^N\, \xi_k, \tag{1.3}$$

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00500, 07-01-00503), программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3 "Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач" и программой РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики"

где коэффициенты a_k^N выбираются из условия минимума отклонения приближенного решения $u^N(z)$ от точного $u\,(z)$ в норме соответствующего пространства.

1.2. Содержание работы. В разд. 2 даны основные положения теории пространств Харди $e_2(\mathcal{B})$, а также приведены утверждения, относящиеся к обоснованию метода наименьших квадратов, включая предложения о сходимости последовательности $\{u^N\}_N$ приближенных решений (1.3) и аппроксимативных свойствах системы (1.2). Отмечено, что при уловии отсутствия внешних и внутренних заострений контура Γ эта система полна в $e_2(\mathcal{B})$, а условие $z_0 \in \mathcal{B}$ является необходимым и достаточным для ее минимальности; при этом условии последовательности $\{a_k^N\}_N$ коэффициентов из (1.3) имеют пределы a_k.

В разд. 3 дана теорема об изоморфизме пространства Вейля $I_2^1(\mathcal{B})$ функций $u(z)$ в области $\mathcal{B}$ и простванства $I_2^{1/2}(\Gamma)$ их следов $u(z')$ на границе Γ, доказанная на основе установленного неравенства Пуанкаре для простанства Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Эта теорема, в частности, включает однозначную разрешимость задачи (1.1) в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$ с граничной функцией из $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Проведено также обоснование метода Треффца, включая сходимость $\{u^N\}_N$ к решению $u(z)$ задачи (1.1).

Кроме того, установлено, что сходимость $u^N\,(z)$ к $u\,(z)$ внутри области $\mathcal{B}$ имеет экспоненциальный характер, и такой же характер имеет сходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ к своим предельным значениям a_k при условии минимальности системы (1.2). Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$ и, значит, система (1.2) не минимальна, то последовательность $\{a_k^N\}_N$ расходится с экспоненциальной скоростью. Тем не менее, сходимость внутри $\mathcal{B}$ последовательности приближенных решений $\{u^N\}_N$ к точному $u(z)$ и в этом случае имеет экспоненциальный характер.

1.3. Функциональные пространства. Если $\mathcal{A}$ — пространство элементов α с заданной на нем мерой μ, то через $L_p\,(\mathcal{A})$, $p \geq 1$, как обычно [10], обозначаем банахово пространство измеримых на $\mathcal{A}$ функций f, имеющих конечную норму $\|f;\, L_p\,(\mathcal{A})\| = \left(\int_{\mathcal{A}} |f(\alpha)|^p\, d\mu\right)^{1/p}$. При $p = 2$ соответствующее пространство $L_2\,(\mathcal{A})$ является гильбертовым со скалярным произведением элементов f и g, определяемым по формуле $\big(f,\, g;\; L_2\,(\mathcal{A})\big) = \int_{\mathcal{A}} f(\alpha)\, g(\alpha)\, d\mu$.

Если $\mathcal{B}$ — плоская область, то пространство Соболева $W_2^1\,(\mathcal{B})$ представляет собой гильбертово пространство функций из $L_2\,(\mathcal{B})$, имеющих квадратично суммируемые по $\mathcal{B}$ обобщенные производные первого порядка; определения обобщенных производных и общих пространств Соболева приведены, например, в [11]-[13].

Через $\overset{\bullet}{C}{}^{\infty}\,(\mathcal{B})$, как обычно [12], обозначаем совокупность бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathcal{B}$.

2 Метод наименьших квадратов

2.1. Пространство Харди $e_2(\mathcal{B})$. Пусть жорданова область $\mathcal{B}$ ограничена кусочно гладким контуром Γ, гладкие звенья которого соединяются под углами $\pi\alpha_q$ $(q = 1, \ldots, Q)$. Если для всех q выполняются условия $\alpha_q \in (0,\, 2)$, то будем говорить, что $\mathcal{B} \in (PS)$.

Обозначим через $z = \omega\,(\zeta)$ конформное отображение круга $\mathbb{U} := \{|\zeta| < 1\}$ на $\mathcal{B}$, а через $\zeta = \chi\,(z)$ — обратное отображение; границу круга $\mathbb{U}$ обозначим через $\mathbb{T}$.

Пространство Харди $e_2\,(\mathcal{B})$ состоит из гармонических в $\mathcal{B}$ функций с равномерно по $r \in (0,\, 1)$ ограниченными L_2–нормами по контурам Γ_r, параллельным границе Γ и опре-

деляемым[‡] по формуле $\Gamma_r := \omega\left(\{|\zeta| = r\}\right)$.

Если $\mathcal{B} \in (PS)$, то, как показано в [6]-[8], функция $u(z) \in e_2(\mathcal{B})$ имеет след $u(z')$ из $L_2(\Gamma)$, понимаемый как некасательные предельные значения, и справедлив аналог теоремы Ф.Рисса[§]:

$$\lim_{r\to 1}\int_{\Gamma_r}\left|\,u(z)\,\right|^2|dz| = \int_{\Gamma}\left|\,u(z')\,\right|^2|dz'|, \qquad \lim_{r\to 1}\int_{\Gamma_r}\left|\,u(z_r)\,-\,u(z')\,\right|^2|dz'| \,=\, 0, \tag{2.1}$$

где $z_r \,=\, \omega\left(r\,\chi(z')\right)$. Отсюда, в частности, следует, что $e_2(\mathcal{B})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\left(u(z),\, v(z);\; e_2(\mathcal{B})\right) \,=\, (u,\, v) := \left(u(z'),\, v(z');\; L_2(\Gamma)\right)$$

и нормой $\|u(z);\; e_2(\mathcal{B})\| \,=\, \|u\| := \|u(z');\; L_2(\Gamma)\|$.

Установлено также, что для произвольной функции $h(z') \,\in\, L_2(\Gamma)$ существует единственное в классе $e_2(\mathcal{B})$ решение $u(z)$ задачи Дирихле (1.1), для которого (почти всюду на Γ) выполняется равенство $u(z') \,=\, h(z')$.

Таким образом, оператор $\mathbb{S}$, ставящий в соответствие каждой функции $u(z) \,\in\, e_2(\mathcal{B})$ ее след $u(z') \,\in\, L_2(\Gamma)$, устанавливает изометрический изоморфизм пространств $e_2(\mathcal{B})$ и $L_2(\Gamma)$.

Если $\mathcal{B} \,\in\, (PS)$, $\mathcal{E}$ — компакт в $\mathcal{B}$, δ — расстояние от $\chi(\mathcal{E})$ до окружности $\mathbb{T}$, а l, t — неотрицательные целые числа, то для решения $u(z)$ задачи (1.1) с граничной функцией $h(z') \,\in\, L_2(\Gamma)$ и его производных $D^{(l,\,t)}\,u(z)$ имеет место оценка

$$\max_{z\,\in\,\mathcal{E}}\left|\,D^{(l,\,t)}\,u(z)\right| \,\le\, \frac{A_{l+t}}{\delta^{\,l+t+1}}\,\left\|\,h;\; L_2(\Gamma)\right\|, \tag{2.2}$$

где множитель A_{l+t} не зависит от функции $u(z)$; в частности

$$A_0 \,=\, \frac{1}{\pi}\left\|\frac{1}{\omega'};\; L_1(\mathbb{T})\right\|^{1/2}, \qquad A_1(\delta) \,=\, A_0\,\max_{z\,\in\,\mathcal{E}}\left|\,\chi'(z)\,\right|. \tag{2.3}$$

2.2. Аппроксимативные свойства системы $\{\xi_k\}$ и метод наименьших квадратов. Согласно [7], если $\mathcal{B} \in (PS)$, то система $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяемая по формуле (1.2), полна в пространстве $e_2(\mathcal{B})$ при любом $z_0 \in \mathbb{C}$, а для ее минимальности в $e_2(\mathcal{B})$ необходимо и достаточно, чтобы $z_0 \in \mathcal{B}$.

Метод наименьших квадратов (см. [1]-[8]) применительно к задаче (1.1) с граничной функцией $h \in L_2(\Gamma)$ заключается в построении ее решения в виде (1.3), где коэффициенты a_k^N находятся из условия $\left\|h \,-\, u^N;\; L_2(\Gamma)\right\| \,=\, \min$, что приводит к следующей системе линейных уравнений относительно коэффициентов $\left\{a_0^N,\, a_1^N,\, \ldots,\, a_N^N\right\}$:

$$\sum_{k\,=\,0}^{N} c_{nk}\,a_k^N \,=\, h_n\,, \qquad n \,=\, 0,\, 1,\, \ldots,\, N\,; \tag{2.4}$$

здесь $c_{nk} := (\xi_n,\, \xi_k)$, $h_n := (\xi_n,\, h)$.

[‡]) Контуры Γ_r можно определить и независимо от отображения $\omega(\zeta)$ аналогично данному для них в [14] определению применительно к пространствам Харди — Смирнова $E_p(\mathcal{B})$.

[§]) О теореме Ф.Рисса для классических пространств Харди H_p см., например, [15].

Если $\mathcal{B} \in (PS)$, то $u^N(z)$ сходится к $u(z)$ равномерно на любом компакте $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ вместе со всеми производными, т.е. справедливо соотношение [6]-[8]

$$D^{l,m}\, u^N(z) \overset{\mathcal{E}}{\Longrightarrow} D^{l,m}\, u(z) \tag{2.5}$$

для любых целых неотрицательных l и m, где $D^{l,m} := \partial^{l+m}/\partial x^l\, \partial y^m$.

Кроме того, если $z_0 \in \mathcal{B}$, т.е. система (1.2) является минимальной, то коэффициенты a_k^N из (1.3) имеют пределы

$$\lim_{N\to\infty} a_k^N = a_k, \tag{2.6}$$

и ряд с предельными коэффициентами

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \xi_k \tag{2.7}$$

сходится к $u(z)$ в наибольшем вписанном в $\mathcal{B}$ круге с центром в z_0. Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$, то система (1.2) теряет минимальность, а значит, последовательность $\{a_k^N\}_N$, вообще говоря, расходится.

2.3. Результаты численных экспериментов. Было проведено исследование характера сходимости метода наименьших квадратов с помощью численных экспериментов. При этом в качестве тестовых использовались полученные в [16] аналитические решения ряда задач вида (1.1) в прямоугольной и крестообразной областях с различными граничными функциями h, существенно отличающимися по гладкости.

Проведенное исследование показало, что внутри области $\mathcal{B}$ сходимость $u^N(z)$ к $u(z)$ имеет экспоненциальный характер, т.е. для любого компакта $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ выполняется оценка

$$\max_{z\in\mathcal{E}} \left| u(z) - u^N(z) \right| = \mathrm{O}\left(e^{-\lambda_1 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{E}) > 0, \tag{2.8}$$

независимо от того, принадлежит или нет точка z_0 области $\mathcal{B}$, т.е. является ли система (1.2) минимальной или нет (при выполнении условий ее полноты).

Исследован также характер сходимости (или расходимости) приближенных коэффициентов a_k^N при увеличении длины N приближения. Установлено, что если $z_0 \in \mathcal{B}$ и, значит, система (1.2) минимальна, то сходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ к предельным a_k имеет экспоненциальный характер,

$$\left| a_k - a_k^N \right| = \mathrm{O}\left(e^{-\lambda_2 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_2 > 0. \tag{2.9}$$

Если же $z_0 \notin \mathcal{B}$ и, значит, система (1.2) не минимальна, то расходимость последовательности коэффициентов $\{a_k^N\}_N$ также имеет экспоненциальную скорость,

$$\left| a_k^N \right| = \mathrm{O}\left(e^{\lambda_3 N}\right), \qquad N \to \infty, \qquad \lambda_3 > 0; \tag{2.10}$$

несмотря на это, последовательность приближенных решений сходится к точному с экспоненциальной скоростью, согласно оценке (2.8).

3 Вариационный метод Треффца

3.1. Пространства Соболева и Соболева — Слободецкого. Пусть область $\mathcal{B}$ с границей Γ принадлежит классу (PS), а $W_2^1(\mathcal{B})$ — пространство Соболева, норма в котором определяется по формуле

$$\left\|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 := \left\|u;\ L_2(\mathcal{B})\right\|^2 + \left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2, \tag{3.1}$$

где $\left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|$ — энергетическая норма,

$$\left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2 := \int_{\mathcal{B}} |\operatorname{grad} u(z)|^2\, dx\, dy\,. \tag{3.2}$$

Пространство[¶] Соболева — Слободецкого $W_2^{1/2}(\Gamma)$ на границе Γ состоит из функций $u(z) \in L_2(\Gamma)$, для которых конечен следущий интеграл:

$$\left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 := \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|u(z_1) - u(z_2)|^2}{|z_1 - z_2|^2}\, |dz_1|\, |dz_2|\,. \tag{3.3}$$

Норма в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$ определяется по формуле

$$\left\|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 := \left\|u;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + \left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2. \tag{3.4}$$

Известно [17]-[21], что любая функция $u(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ имеет на Γ след[‖] $u(z')$, принадлежащий пространству $W_2^{1/2}(\Gamma)$, и справедлива оценка

$$\left\|u(z');\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\| < C_1 \left\|u(z);\ W_2^1(\mathcal{B})\right\| \tag{3.5}$$

с константой C_1, не зависящей от $u(z)$.

Наоборот, существует линейный оператор $\mathcal{L}$, который всякой функции $u(z') \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ ставит в соответствие функцию $u(z) = \mathcal{L}\, u(z') \in W_2^1(\mathcal{B})$ со следом $u(z')$, причем, имеет место оценка

$$\left\|u(z);\ W_2^1(\mathcal{B})\right\| < C_2 \left\|u(z');\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\| \tag{3.6}$$

с константой C_2, не зависящей от $u(z')$. Таким образом, пространства $W_2^1(\mathcal{B})$ и $W_2^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны друг другу. Заметим, что в качестве линейного оператора $\mathcal{L}$ продолжения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $W_2^1(\mathcal{B})$ можно использовать оператор задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1.1) в области $\mathcal{B}$.

Приведем важное *неравенство Пуанкаре* (см. [11]) для функций $u(z)$ из $W_2^1(\mathcal{B})$:

$$\left\|u;\ L_2(\mathcal{B})\right\|^2 \le M_1 \left[\left(\int_\Gamma u(z)\, |dz|\right)^2 + \left|u;\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2\right], \tag{3.7}$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от функции $u(z)$.

Аналог неравенства Пуанкаре для функций из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ устанавливает следующая

¶) Об общих пространствах Соболева — Слободецкого см. [17]-[21].

‖) След элемента $u(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ понимается (см., например, [17]-[21]) как предел в $W_2^{1/2}(\Gamma)$ сужений $u_n(z')$, $z' \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, последовательности липшицевых в $\overline{\mathcal{B}}$, т.е. принадлежащих $C^{0,1}(\overline{\mathcal{B}})$, функций $u_n(z)$, приближающих в норме $W_2^1(\mathcal{B})$ элемент $u(z)$.

Теорема 3.1 *Для функций $u(z)$ из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ имеет место неравенство*

$$\left\|u;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 \le M_2\left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz|\right)^2 + \left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2\right], \tag{3.8}$$

где $M_2 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $u(z)$.

Доказательство. Покажем вначале, основываясь на установленной в [17] компактности вложения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, что для любой функции $u \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma) := \left\{u \in W_2^{1/2} : \int_\Gamma u(z)\,|dz| = 0\right\}$ имеет место оценка

$$\left\|u;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 \le M\ \left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 \tag{3.9}$$

с постоянной $M > 0$, не зависящей от функции $u(z)$.

Действительно, предположим, что (3.9) неверно. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется функция $u_k \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ такая, что

$$\left\|u_k;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 > k\ \left|u_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2. \tag{3.10}$$

Заметим, что в силу (3.10) нормы $\left\|u_k;\ L_2(\Gamma)\right\|$ для всех $k \in \mathbb{N}$ отличны от нуля. Рассмотрим последовательность функций $v_k := u_k\left\|u_k; L_2(\Gamma)\right\|^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Учитывая (3.10), легко убедиться, что последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ обладает следующими тремя свойствами:

$$\text{а) } v_k \in \widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma); \quad \text{б) } \left\|v_k;\ L_2(\Gamma)\right\| = 1; \quad \text{в) } \left|v_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 < 1/k, \tag{3.11}$$

откуда, в частности, имеем

$$\left\|v_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 = \left\|v_k;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + \left|v_k;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 < 1 + 1/k < 2.$$

Таким образом, последовательность $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ ограничена в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Следовательно (см. [10]), из нее можно выделить подпоследовательность $\{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty$, слабо сходящуюся в пространстве $W_2^{1/2}(\Gamma)$ к некоторой функции v,

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad W_2^{1/2}(\Gamma), \qquad j \to \infty. \tag{3.12}$$

Докажем, что v равна нулю на границе Γ.

Рассмотрим над пространством $W_2^{1/2}(\Gamma)$ семейство линейных функционалов

$$\Lambda_\varphi(u) := \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{u(z_1) - u(z_2)}{|z_1 - z_2|}\,\varphi(z_1, z_2)\,|dz_1|\,|dz_2|,$$

где φ — произвольная функция, принадлежащая классу $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$. Поскольку по неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\left|\Lambda_\varphi(u)\right| \le \left\|\varphi;\ L_2(\Gamma\times\Gamma)\right\|\ \left|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|, \tag{3.13}$$

то выполняется оценка $\left|\Lambda_\varphi(u)\right| \le \left\|\varphi;\ L_2(\Gamma\times\Gamma)\right\|\left\|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|$, т.е. функционалы $\Lambda_\varphi(u)$ являются ограниченными и принадлежат пространству, сопряженному к $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Слабая сходимость (3.12) означает, что

$$\forall\varphi \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Gamma\times\Gamma): \qquad \Lambda_\varphi(v_{k_j}) \to \Lambda_\varphi(v), \quad j \to \infty. \tag{3.14}$$

С другой стороны, соотношение в) из формулы (3.11) с учетом неравенства (3.13) дает, что $\Lambda_\varphi(v_{k_j})$ стремится к нулю при $j \to \infty$ для всех $\varphi \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$. Отсюда и из соотношения (3.14) вытекает, что для любой функции φ из $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Gamma\times\Gamma)$ справедливо равенство $\Lambda_\varphi(v) = 0$. Следовательно (см. [22]), разность $v(z_1)-v(z_2)$ равна нулю на множестве $\Gamma\times\Gamma$, т.е. функция $v(z)$, определенная на границе Γ, является константой.

Рассмотрим теперь на элементах пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ линейный ограниченный функционал $F(u) := \int_\Gamma u(z)\,|dz|$. Из указанного в (3.11) свойства а) следует, что $F(v_{k_j}) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Отсюда заключаем, что в силу (3.12) значение $F(v)$ тоже равно нулю, т.е. функция v, являющаяся константой, есть просто ноль.

Из компактности вложения пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в пространство $L_2(\Gamma)$ следует (см. [10]), что последовательность $\{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty$, слабо сходящаяся к нулю в $W_2^{1/2}(\Gamma)$, в $L_2(\Gamma)$ сходится к нулю сильно, т.е. предел $\|v_{k_j};\ L_2(\Gamma)\|$ равен нулю при $j \to \infty$, что противоречит свойству б), указанному в (3.11).

Таким образом, оценка (3.9) для функций из $\widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ установлена. Рассмотрим теперь произвольную функцию $u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$. Имеем

$$\|u;\ L_2(\Gamma)\|^2 = \left\|\int_\Gamma u(z)\,|dz| + u - \int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 \le$$

$$\le 2\left\|\int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + 2\left\|u - \int_\Gamma u(z)\,|dz|;\ L_2(\Gamma)\right\|^2. \tag{3.15}$$

Заметим, что функция $u - \int_\Gamma u(z)\,|dz|$ принадлежит $\widehat{W}_2^{1/2}(\Gamma)$, поэтому первое слагаемое в правой части неравенства (3.15) можно оценить с помощью (3.9). Учитывая, что интеграл в формуле (3.9) не изменяется при вычитании из функции u константы, окончательно получаем

$$\|u;\ L_2(\Gamma)\|^2 \le \max\Big\{2M,\ 2|\Gamma|\Big\}\left[\left(\int_\Gamma u(z)\,|dz|\right)^2 + \big|u;\ W_2^{1/2}(\Gamma)\big|^2\right],$$

где через $|\Gamma|$ обозначена длина границы Γ. Теорема доказана.

3.2. Пространства Вейля. *Пространство Вейля* $I_2^1(\mathcal{B})$ представляет собой фактор–пространство $\widetilde{W}_2^1(\mathcal{B})/\,\mathbb{R}$, в котором отождествляются функции, отличающиеся на константу; здесь $\widetilde{W}_2^1(\mathcal{B})$ — пространство Соболева $W_2^1(\mathcal{B})$ гармонических в области $\mathcal{B}$ функций, а $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Его элементы будем обозначать буквами с тильдой, а функции, составляющие данный элемент — той же буквой без тильды (например, $\widetilde{u}$ и u). Скалярное произведение в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$ определяется по формуле [9]

$$\big[u,\, v\big] = \big(u,\, v;\ I_2^1(\mathcal{B})\big) := \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u,\, \operatorname{grad} v\rangle\, dx\, dy\,, \tag{3.16}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение плоских векторов. Значение интеграла в формуле (3.16), очевидно, не зависит от выбора функций $u \in \widetilde{u}$ и $v \in \widetilde{v}$, а величина $\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\| := \big[\widetilde{u},\, \widetilde{u}\big]^{1/2}$ является нормой в $I_2^1(\mathcal{B})$.

Функцию $\widehat{u}$ назовем естественным представителем элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, если она принадлежит этому элементу и удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma \widehat{u}(z)\,|dz| \;=\; 0. \tag{3.17}$$

Аналогично, на подпространстве функций u из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ введем фактор–пространство элементов $\{u + \mathrm{const}\}$, которое назовем *пространством Вейля на границе* Γ и обозначим $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Его элементы также будем обозначать буквами с тильдой, а функции, составляющие данный элемент — той же буквой без тильды. Скалярное произведение в $I_2^{1/2}(\Gamma)$ введем по формуле

$$\big(\widetilde{u},\, \widetilde{v};\; I_2^{1/2}(\Gamma)\big) := \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\big[u(z_1) \,-\, u(z_2)\big]\big[v(z_1) \,-\, v(z_2)\big]}{|z_1 \,-\, z_2|^2}\,|dz_1|\,|dz_2|. \tag{3.18}$$

Как и выше, значение интеграла в (3.18) не зависит от выбора функций $u \in \widetilde{u}$ и $v \in \widetilde{v}$, а величина $\big\|\widetilde{u};\; I_2^{1/2}(\Gamma)\big\| := \big(\widetilde{u},\, \widetilde{u};\; I_2^{1/2}(\Gamma)\big)^{1/2}$ представляет собой норму в $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Функцию $\widehat{u} \in \widetilde{u}$ назовем естественным представителем элемента $\widetilde{u} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$, если она удовлетворяет условию (3.17).

Теорема 3.2 *Пространства $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны друг другу.*

Доказательство. 1) Пусть $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, и пусть $\widehat{u}$ — естественный представитель этого элемента. Для функции $\widehat{u}(z) \in W_2^1(\mathcal{B})$ однозначно определен след $\widehat{u}(z')$ на границе Γ, принадлежащий пространству $W_2^{1/2}(\Gamma)$, и имеет место неравенство

$$\big\|\widehat{u}(z');\; W_2^{1/2}(\Gamma)\big\| \;\le\; C_1\,\big\|\widehat{u}(z);\; W_2^1(\mathcal{B})\big\|, \tag{3.19}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\widehat{u}$. Этот след в силу условия (3.17) является естественным представителем некоторого элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$. Оценим норму элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$ через норму элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$. С учетом (3.19) имеем

$$\big\|\widetilde{h};\; I_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 \;=\; \big|\widehat{h};\; W_2^{1/2}(\Gamma)\big| \;\le\; \big\|\widehat{h};\; W_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 \;\le$$

$$\le\; C_1^2\,\big\|\widehat{u};\; W_2^1(\mathcal{B})\big\|^2 \;=\; C_1^2\,\big\|\widehat{u};\; L_2(\mathcal{B})\big\|^2 \;+\; C_1^2\,\big|\widehat{u};\; W_2^1(\mathcal{B})\big|^2.$$

Оценивая первое слагаемое в правой части последнего равенства с помощью неравенства Пуанкаре (3.7) и с учетом (3.17), получаем

$$\big\|\widetilde{h};\; I_2^{1/2}(\Gamma)\big\|^2 \;\le\; C_1^2 M_1\Big(\int_\Gamma \widehat{u}(z)\,|dz|\Big)^2 \;+\; C_1^2(M_1+1)\,\big|\widehat{u};\; W_2^1(\mathcal{B})\big|^2 \;=$$

$$=\; C_1^2(M_1+1)\big\|\widetilde{u};\; I_2^1(\mathcal{B})\big\|^2,$$

где $M_1 > 0$ также не зависит от $\widehat{u}$.

Таким образом установлено, что любому элементу $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$ можно поставить в соответствие элемент $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$, причем справедлива оценка

$$\big\|\widetilde{h};\; I_2^{1/2}(\Gamma)\big\| \;\le\; c_1(\mathcal{B})\,\big\|\widetilde{u};\; I_2^1(\mathcal{B})\big\|, \tag{3.20}$$

где постоянная $c_1(\mathcal{B}) = C_1\sqrt{M_1+1} > 0$ зависит только от области $\mathcal{B}$.

2) Обратно, пусть $\widetilde{h}$ — произвольный элемент пространства $I_2^{1/2}(\Gamma)$, а функция $\widehat{h} \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — его естественный представитель. Существует линейный оператор $\mathcal{L}$, ставящий в соответствие функции $\widehat{h}(z')$ единственную гармоническую функцию $\mathcal{L}\widehat{h}(z) \in \in W_2^1(\mathcal{B})$ такую, что $[\mathcal{L}\widehat{h}](z') = \widehat{h}(z')$, и справедлива оценка

$$\left\|\mathcal{L}\widehat{h};\ W_2^1(\mathcal{B})\right\| \le C_2 \left\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|, \tag{3.21}$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от функции $\widehat{h}$. Функция $\mathcal{L}\widehat{h}$, удовлетворяющая условию (3.17), является естественным представителем некоторого элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$. Оценим норму элемента $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$ через норму элемента $\widetilde{h} \in I_2^{1/2}(\Gamma)$. Учитывая (3.21), имеем

$$\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 = \left|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right|^2 \le \left\|\widehat{u};\ W_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 \le$$
$$\le C_2^2 \left\|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right\|^2 = C_2^2 \left\|\widehat{h};\ L_2(\Gamma)\right\|^2 + C_2^2 \left|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2.$$

Оценивая первое слагаемое в последнем равенстве с помощью неравенства Пуанкаре (3.8) и с учетом (3.17), получаем

$$\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\|^2 \le C_2^2 M_2 \left(\int_\Gamma \widehat{h}(z)\,|dz|\right)^2 + C_2^2(M_2+1)\left|\widehat{h};\ W_2^{1/2}(\Gamma)\right|^2 =$$
$$= C_2^2(M_2+1)\left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|,$$

т.е. справедливо неравенство

$$\left\|\widetilde{u};\ I_2^1(\mathcal{B})\right\| \le c_2(\mathcal{B}) \left\|\widetilde{h};\ I_2^{1/2}(\Gamma)\right\|, \tag{3.22}$$

где постоянная $c_2(\mathcal{B}) = C_2\sqrt{M_2+1} > 0$ зависит только от области $\mathcal{B}$.

Объединяя результаты (3.20) и (3.22) пунктов 1) и 2) доказательства, находим, что линейный оператор $\mathcal{L}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$. Теорема доказана.

Отметим еще, что полнота пространства $I_2^{1/2}(\Gamma)$, очевидно, следует из полноты пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ и неравенства (3.8), а полнота пространства $I_2^1(\mathcal{B})$ следует из изоморфизма пространств $I_2^1(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}(\Gamma)$.

3.3. Вариационный метод Треффца. Рассмотрим задачу (1.1) с граничной функцией $h \in W_2^{1/2}(\Gamma)$. Ее решение $u(z)$, как было отмечено в п. 3.1, существует и единственно в пространстве $W_2^1(\mathcal{B})$.

Перейдем к пространствам Вейля. Пусть $\widetilde{h}$ — элемент пространста $I_2^{1/2}(\Gamma)$, содержащий h. Решение u задачи принадлежит некоторому элементу $\widetilde{u}$ пространства $I_2^1(\mathcal{B})$.

Метод Треффца [5] заключается в следующем. Допустим, что $\left\{\widetilde{u}_k\right\}_{k=1}^\infty$ — линейно независимая и полная система в пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$, причем функции $u_k \in \widetilde{u}_k$ принадлежат $C^\infty(\mathcal{B}')$, т.е. бесконечно дифференцируемы в некоторой области $\mathcal{B}' \ni \mathcal{B}$, охватывающей исходную. Элемент $\widetilde{u} \in I_2^1(\mathcal{B})$, содержащий решение рассматриваемой задачи, будем строить в виде предела последовательности $\left\{\widetilde{u}^N\right\}_{N=1}^\infty$ приближенных элементов

$$\widetilde{u}^N := \sum\nolimits_{k=1}^N a_k^N\, \widetilde{u}_k\,, \tag{3.23}$$

где коэффициенты a_k^N находятся из условия наименьшего отклонения приближенного элемента $\widetilde{u}^N$ от точного $\widetilde{u}$ в $I_2^1(\mathcal{B})$, т.е. из условия

$$\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1(\mathcal{B})\right\| = \min.$$

Это приводит к следующей системе линейных уравнений относительно коэффициентов $\{a_1^N, \ldots, a_N^N\}$:

$$\sum\nolimits_{j=1}^N \left[\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_j\right] a_j^N = \left[\widetilde{u}, \widetilde{u}_k\right], \qquad k = \overline{1, N}. \tag{3.24}$$

Подставляя в систему (3.24) выражение (3.16) для скалярного произведения $\left[\cdot\,,\,\cdot\right]$, переписываем ее в виде

$$\sum\nolimits_{j=1}^N a_j^N \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u_k, \operatorname{grad} u_j\rangle\, dx\, dy = \int_{\mathcal{B}} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u_k\rangle\, dx\, dy, \quad k = \overline{1, N}.$$

Поскольку все функции u_k принадлежат классу $C^\infty(\mathcal{B}')$, а u — пространству $W_2^1(\mathcal{B})$, то, применяя к интегралам, входящим в последнее равенство, тождество Грина [17]-[20], получаем

$$\sum\nolimits_{j=1}^N a_j^N \left\{ -\int_{\mathcal{B}} u_j\, \Delta u_k\, dx\, dy + \int_\Gamma u_j\, \partial_\nu u_k\, |dz| \right\} =$$

$$= -\int_{\mathcal{B}} u\, \Delta u_k\, dx\, dy + \int_\Gamma u\, \partial_\nu u_k\, |dz|, \qquad k = \overline{1, N}, \tag{3.25}$$

где ∂_ν — производная по внешней нормали к границе Γ. Учитывая теперь, что $u(z') = h(z')$ на Γ, а u_k — гармонические функции, преобразуем систему линейных уравнений (3.25) к окончательному виду

$$\sum\nolimits_{j=1}^N a_j^N \int_\Gamma u_j\, \partial_\nu u_k\, |dz| = \int_\Gamma h\, \partial_\nu u_k\, |dz|, \qquad k = \overline{1, N}, \tag{3.26}$$

откуда коэффициенты $\{a_1^N, \ldots, a_N^N\}$ находятся однозначно, поскольку матрица системы (3.26) есть матрица Грама системы линейно независимых элементов [2]-[4]; отметим также, что она симметрична.

Подчеркнем, что приближенный элемент $\widetilde{u}^N$, определяемый по формуле (3.23), с коэффициентами $\{a_1^N, \ldots, a_N^N\}$, вычисляемыми из системы (3.26), дает приближенное решение задачи (1.1) лишь с точностью до произвольной вещественной постоянной.

Определим приближенное решение u^N этой задачи по формуле

$$u^N(z) := a_0^N + \sum\nolimits_{k=1}^N a_k^N\, u_k(z)\,,$$

где u_k — некоторые фиксированные функции, принадлежащие соответствующим элементам $\widetilde{u}_k$, а коэффициент a_0^N определяется по формуле

$$a_0^N := \int_\Gamma \Big(h(z) - \sum\nolimits_{k=0}^N a_k^N\, u_k(z) \Big)\, |dz|\,.$$

Докажем, что *последовательность определенных таким способом приближенных решений $u^N(z)$ и последовательности всех производных $D^{l,m}\, u^N(z)$ равномерно сходятся*

внутри области $\mathcal{B}$ соответственно к функции $u(z)$ — решению задачи (1.1) — и ее производным $D^{l,m}\,u(z)$.

Учитывая очевидные соотношения

$$\widehat{u}(z) = u(z) - \int_\Gamma h(z)\,|dz|, \qquad \widehat{u}^N(z) = u^N(z) - \sum\nolimits_{k=0}^{N} a_k^N \int_\Gamma u_k(z)\,|dz|,$$

можно увидеть, что для доказательства такой сходимости достаточно установить равномерную сходимость внутри области $\mathcal{B}$ функций $\widehat{u}^N(z) := \sum_{k=1}^N a_k^N\,\widehat{u}_k(z)$ и всех соответствующих производных к функции $\widehat{u}(z)$ и ее производным.

Используя неравенство Пуанкаре (3.8) и оценку (3.20), связанную с изоморфизмом пространств $I_2^1\,(\mathcal{B})$ и $I_2^{1/2}\,(\Gamma)$, получаем цепочку неравенств

$$\left\|\widehat{u};\ L_2\,(\Gamma)\right\|^2 \le M_2\,\left\|\widetilde{u};\ I_2^{1/2}\,(\Gamma)\right\|^2 \le C\,\left\|\widetilde{u};\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\|^2 \qquad \forall\,\widetilde{u} \in I_2^1\,(\mathcal{B}), \tag{3.27}$$

где $M_2 > 0$ и $C = M_2\,c_1^2(\mathcal{B}) > 0$ — константы, не зависящие от $\widetilde{u}$, $c_1(\mathcal{B})$ — константа из формулы (3.20).

Согласно предположению о полноте системы $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти число $N_0 \in \mathbb{N}$ и постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$ такие, что имеет место неравенство

$$\left\|\widetilde{u} - \sum\nolimits_{k=1}^{N_0} \alpha_k\,\widetilde{u}_k;\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\| < \varepsilon.$$

Так как элемент $\widetilde{u}^{N_0} = \sum_{k=1}^{N_0} a_k^{N_0}\,\widetilde{u}_k$, построенный по методу Треффца, дает наилучшее среди сумм такого вида приближение в норме $I_2^1\,(\mathcal{B})$, то отсюда получаем оценку

$$\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^{N_0};\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\| < \varepsilon.$$

Но поскольку $\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\|$ не превосходит $\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^{N_0};\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\|$ для любого $N \ge N_0$, то верна также и оценка

$$\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\| < \varepsilon$$

для любого $N \ge N_0$. Воспользовавшись теперь (3.27), получаем, что

$$\left\|\widehat{u} - \widehat{u}^N;\ L_2\,(\Gamma)\right\|^2 \le C\,\left\|\widetilde{u} - \widetilde{u}^N;\ I_2^1\,(\mathcal{B})\right\|^2 < C\varepsilon^2,$$

где $C > 0$ — константа, зависящая только от области $\mathcal{B}$, а $N \ge N_0$.

Для функций $\widehat{u} - \widehat{u}^N \in W_2^1\,(\mathcal{B})$ и любого компакта $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ справедливо доказанное в [8] для более широкого класса функций неравенство

$$\sup_{z\in\mathcal{E}} \left|D^{l,m}\left(\widehat{u}(z) - \widehat{u}^N(z)\right)\right| < M(\mathcal{E})\left\|\widehat{u} - \widehat{u}^N;\ L_2\,(\Gamma)\right\| < M(\mathcal{E})\sqrt{C}\varepsilon, \quad \forall\,N \ge N_0,$$

где $M(\mathcal{E})$ — некоторая положительная константа, не зависящая от N. Таким образом, последовательность $\left\{D^{l,m}\,\widehat{u}^N(z)\right\}_N$ сходится равномерно к $D^{l,m}\,\widehat{u}(z)$ на любом компакте $\mathcal{E}$ в области $\mathcal{B}$.

Сформулируем без доказательства предложение, позволяющую использовать в методе Треффца в качестве системы $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^\infty$ систему

$$\xi_{2k-1}(z) := \operatorname{Re}\,(z - z_0)^k, \quad \xi_{2k}(z) := \operatorname{Im}\,(z - z_0)^k, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{3.28}$$

Предложение 3.3 *Система (3.28) полна, а если $z_0 \in \mathcal{B}$, то и минимальна в гильбертовом пространстве $I_2^1(\mathcal{B})$.*

3.4. Результаты численных экспериментов. С помощью численных экспериментов было проведено исследование характера сходимости метода Треффца на тех же примерах краевых задач и с использованием тех же тестовых решений, что и для метода наименьших квадратов.

Исследование показало, что внутри области $\mathcal{B}$ сходимость $u^N(z)$ к $u(z)$ имеет экспоненциальный характер, т.е. выполняется оценка (2.8) независимо от того, принадлежит или нет точка z_0 области $\mathcal{B}$.

Литература

1. M. Picone. Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del probleme di Dirichlet // Atti della Real Accad. naz. dei Lincei. Rend. Serie 5, Classe di sci. fis, mat. e natur. V. 31, № 8. 1922. P. 357–359.

2. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, М.: Наука. 1970.

3. К. Ректорис. Вариационные методы математической физики и техники, М.: Мир. 1985.

4. В.И. Лебедев. Функциональный анализ и вычислительная математика, М.: Физматлит. 2000.

5. E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren // Verhanl. d. 2 internat. Kongress für techniche Mechanik. Zürich, 1926.

6. В.И. Власов. О решении задачи дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. Т. 249, № 1. 1979. С. 19–22.

7. В.И. Власов. Краевые задачи в областях с криволинейной границей, Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР. 1990.

8. В.И. Власов, А.В. Рачков. О весовых пространствах типа Харди // Докл. РАН. Т. 328, № 3. 1993. С. 281–284.

9. H. Weil. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Mathematical Journal. V. 7. 1940. P. 411–444.

10. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука. 1976.

11. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л.: Изд. ЛГУ, 1950.

12. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики, М.: Наука. 1973.

13. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, М.: Наука. 1989.

14. M.V. Keldysh, M.A. Lavrentieff. Sur la representation conform des domaines limitès par les courbes rectifiables // Ann. Ecole Norm. sup. (3). V. 54. 1937. P. 1–38.

15. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.: Наука, 1966.

16. Г.О. Бузыкин, В.И. Власов. Исследование некоторых вариационных методов решения краевых задач, основанных на глобальных аппроксимативных системах. Технический отчет ВЦ РАН, 2005.

17. Л.Н. Слободецкий. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. Т. 197. 1958. С 54–112.

18. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир. 1973.

19. R. Adams. Sobolev spaces, New York — San Francisco — London: Academic Press. 1975.

20. P. Grisvard. Eliptic problems in nonsmooth domains, London: Pittman. 1985.

21. Б.В. Пальцев. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях // Матем. сб. Т. 187, № 4. 1996. С. 59–116.

22. В.С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике, М.: Наука. 1976.

ON CERTAIN VARIATIONAL METHODS FOR SOLVING THE DIRICHLET PROBLEM

G.O. Buzykin , V.I. Vlasov

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov str., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: gbuzykin@newmail.ru,vlasov@ccas.ru

Abstract. A theoretical substantiation is presented for two variational methods for solving the Dirichlet problem for the Laplace equation in plane simply connected domains $\mathcal{B}$: the least square method and the Trefftz's method. As a preliminary, several assertions have been estab-lished for functional spaces related to the methods, the Hardy space $e_2(\mathcal{B})$ and the Weil space $I_2^1(\mathcal{B})$ of functions, harmonic in $\mathcal{B}$. A performed numerical research have shown exponential rate of convergence of these methods.

Keywords: the Laplace equation, variational methods, the least square method, the Trefftz's method, Hardy space, Weil space.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ ТАЙФУНА

В.И. Власов[1], С.Л. Скороходов[1], Х. Фужита Яшима[2]

[1]Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: skor@ccas.ru,vlasov@ccas.ru
[2]Туринский университет,
виа Карло Альберто, 10, Турин, 10123, Италия e-mail: hisao.fujitayashima@unito.it

Аннотация. Представленная модель стационарного осесимметричного движения воздуха в нижнем слое тайфуна, учитывающая вязкость и сжимаемость воздуха, силу Кориолиса и трение о поверхность Земли, сводится к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений для осредненных по вертикали в этом слое компонент горизонтальной скорости и плотности воздуха. С помощью задания функции β, описывающей вертикальный поток на верхней границе слоя, исходная задача расщепляется на две: краевую задачу для тангенциальной компоненты скорости и задачу Коши для плотности воздуха, после решения которых оставшиеся неизвестные находятся явно. Результаты проведенной эффективной численной реализации модели, хорошо согласующиеся с наблюдаемыми данными, позволили выявить некоторые закономерности в распределении скорости воздуха в нижнем слое тайфуна.

Ключевые слова: тайфуны, математическое моделирование, системы нелинейных дифференциальных уравнений, разностные методы.

1 Введение

Одним из наиболее разрушительных атмосферных явлений является тайфун — крупномасштабный интенсивный атмосферный вихрь. Тайфуны возникают над перегретыми районами океана; их время жизни достигает 2-х недель, горизонтальный размер — сотен километров, высота составляет 12–15 км, а скорость ветра может доходить до 300 км/час (см. [1]–[5]). Исследование тайфунов привлекает большое внимание ученых [2]–[7].

Современные модели тайфунов включают, как правило, детальное описание трехмерного нестационарного течения воздушных масс и происходящих в них процессов теплообмена и фазовых превращений с учетом взаимодействия с океаном [6]-[9]. Для реализации таких моделей необходимы сложные численные методы и алгоритмы, а также мощные вычислительные средства. Вместе с тем, достигаемая при этом точность расчетов часто оказывается недостаточной, а результаты не вполне адекватными [2], [4], [7].

Помимо “больших” моделей тайфунов развиваются и более простые, учитывающие основные факторы этого явления [1]–[7]. Излагаемая ниже модель относится к этому типу, а ее отличительной чертой является описание лишь нижнего слоя тайфуна.

Рассматриваемая в работе модель, сформулированная в [10] и описывающая стационарное осесимметричное движение воздуха в нижнем слое тайфуна, учитывает вязкость

Работа поддержана РФФИ (гранты 07-01-00295, 07-01-00503), программой фундаментальных исследований ОМН РАН №3 ”Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач“

и сжимаемость воздуха, его трение о поверхность океана, а также силу Кориолиса. Эта модель основана на осреднении характеристик потока по вертикали внутри рассматриваемого слоя и задании вертикального потока воздуха на верхнем уровне этого слоя.

Модель включает систему трех дифференциальных уравнений для трех осредненных по вертикали величин: двух компонент горизонтальной скорости и плотности воздуха. Возникающую краевую задачу для этой системы удается свести к последовательному рассмотрению двух задач: краевой задачи для тангенциальной компоненты скорости и задачи Коши для плотности воздуха. Оставшиеся неизвестные (радиальная скорость и давление) находятся затем по явным формулам.

Численная реализация модели, результаты которой хорошо согласуются с данными наблюдений, позволила адекватно описать характер пространственного распределения ветра в тайфуне.

2 Модель тайфуна и постановка задачи

2.1. Двумерная модель. Используемая модель [10] описывает стационарное движение воздуха в нижнем слое тайфуна толщиной H, характеризующимся достаточно однородным по высоте потоком. В этом слое используется процедура осреднения по высоте всех характеристик течения; метод такого осреднения изложен, в частности, в [11], [12], [13]. В реальной атмосфере толщина H этого слоя может составлять несколько километров [2], [4], [7].

Помимо этого, в модели считается заданной вертикальная составляющая потока воздуха на верхней границе $\{x_3 = H\}$ рассматриваемого слоя тайфуна. Это позволяет получить на плоскости (x_1, x_2) замкнутую систему уравнений относительно следующих осредненных по x_3 в слое $\{x_3 \in (0, H)\}$ величин: вектора горизонтальной скорости воздуха $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, плотности ϱ и давления p. Эта модель учитывает силу Кориолиса в виде $\varrho L \mathbf{v}$, где

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -l_0 \\ l_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad l_0 = 2\omega \sin\varphi_0, \tag{2.1}$$

ω — угловая скорость вращения Земли, φ_0 — географическая широта центра тайфуна. Кроме этого, модель включает объемную и динамическую вязкости воздуха с коэффициентами вязкости соответственно λ и μ и трение воздуха о поверхность океана (коэффициент трения α). Полученная система уравнений имеет вид:

$$\varrho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mu\Delta\mathbf{v} - \lambda\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) = -\nabla p - \varrho L\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v}, \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot(\varrho\mathbf{v}) = -\beta, \tag{2.3}$$

где через ∇ и Δ обозначены соответственно двумерные на плоскости (x_1, x_2) операторы "набла" и Лапласа. Функция $\beta(x_1, x_2)$ в правой части уравнения (2.3), представляющая собой деленную на H вертикальную составляющую потока воздуха на верхней границе рассматриваемого слоя, как уже было сказано выше, считается заданной.

Предполагая течение воздуха адиабатическим, замыкаем систему уравнений (2.2), (2.3) соответствующим уравнением состояния, связывающим плотность воздуха и давление:

$$p(\varrho) = P_\infty\left(\varrho/\varrho_\infty\right)^\gamma; \tag{2.4}$$

здесь P_∞ и ϱ_∞ — соответственно давление и плотность воздуха вдали от центра тайфуна (т.е. в невозмущенной атмосфере), γ — показатель адиабаты воздуха, $\gamma \approx 1.4$.

2.2. Осесимметричная модель. В дальнейшем будем полагать течение в тайфуне осесимметричным, что в достаточной степени согласуется с данными наблюдений. Вводя полярные координаты (r, ϑ), центр которых совпадает с центром тайфуна, получаем, что все рассматриваемые функции зависят лишь от радиальной координаты r. Обозначим через $U(r)$ и $\Phi(r)$ радиальную и тангенциальную составляющие скорости. При этом функции $p(x_1, x_2)$, $\varrho(x_1, x_2)$ и $\beta(x_1, x_2)$ преобразуются соответственно в функции $p(r)$, $\varrho(r)$ и $\beta(r)$.

Система (2.2), (2.3) переписывается, с учетом (2.4), в следующем виде на полуоси $r \in [0, \infty)$ относительно Φ, U и ϱ:

$$\mu \left[(r\Phi)'/r \right]' - \varrho U \Phi' - \varrho U \Phi/r - \alpha \Phi - l_0 \varrho U = 0, \tag{2.5}$$

$$(\mu + \lambda) \left[(r U)'/r \right]' - \varrho U U' - \alpha U + \varrho \Phi^2/r + l_0 \varrho \Phi = P_\infty \left(\varrho^\gamma / \varrho_\infty^\gamma \right)', \tag{2.6}$$

$$(r \varrho U)'/r = -\beta. \tag{2.7}$$

Для компонент скоростей U, Φ в центре тайфуна и на бесконечности принимаются однородные условия:

$$U(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} U(r) = 0, \tag{2.8}$$

$$\Phi(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0, \tag{2.9}$$

а для плотности — условие стремления на бесконечности к заданной величине ϱ_∞:

$$\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = \varrho_\infty, \tag{2.10}$$

при этом предполагается, что $\{U(r), \Phi(r), \varrho(r)\} \in C[0,\infty] \cap C^2(0,\infty)$. Принимаем еще условие положительности плотности $\varrho(r)$, $r \in [0,\infty]$ и соответствующее данным наблюдений условие центростремительности течения в рассматриваемом нижнем слое тайфуна, т.е. $U(r) < 0$, $r \in (0,\infty)$, а также условие закрученности потока в Северном полушарии против, а в Южном — по часовой стрелке:

$$l_0 \Phi(r) > 0, \qquad r \in (0, \infty).$$

2.3. Функция $\beta(r)$. Данные наблюдений указывают на следующий характер вертикального потока воздуха на верхней поверхности рассматриваемого слоя: вблизи центра тайфуна воздух поднимается вверх, при удалении от центра скорость подъема уменьшается, в некоторой точке $r = R$ поток обращается в ноль, а при дальнейшем удалении от центра тайфуна воздух опускается вниз. При стремлении к бесконечно удаленной точке вертикальное движение воздуха полностью прекращается.

Кроме того, для потока воздуха через верхнюю границу рассматриваемого слоя всегда выполняется интегральное уравнение баланса массы:

$$2\pi \int_0^\infty r\, \beta(r)\, dr = 0. \tag{2.11}$$

Такое поведение вертикального потока воздуха на верхней границе слоя предлагается описать функцией $\beta(r)$ следующего вида:

$$\beta(r) = \beta_0 (1 + qr)(r^2 - R^2)(Dr^2 - R^{-2})\, e^{-qr}, \tag{2.12}$$

где положительные величины β_0, q и R являются свободными параметрами модели, причем β_0 представляет собой значение функции $\beta(r)$ в точке $r = 0$, параметр q определяет показатель экспоненциального затухания этой функции при $r \to \infty$, а величина R дает точку обращения $\beta(r)$ в ноль. Коэффициент D в (2.12) определяется из условия баланса (2.11):

$$D \,=\, q^2\,(q^2R^2 - 10)/\big[10\,R^2\,(q^2R^2 - 28)\big]\,.$$

Условие обращения функции $\beta(r)$ в ноль при $r \in [0, \infty)$ лишь в конечной точке $r = R$ приводит к ограничению на параметры q и R:

$$10 \,<\, q^2R^2 \,<\, 28\,.$$

Задание функции $\beta(r)$ завершает постановку задачи (2.5)–(2.10).

2.4. Поведение решения вблизи особых точек Опираясь на теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и систем [14], [15], убеждаемся, что система (2.5)–(2.7) имеет две особые точки $r = 0$ и $r = \infty$; таким образом, рассматриваемая краевая задача (2.5)–(2.9) является сингулярной. Ниже используется символ $f(r) \sim g(r)$, $r \to r_0$, означающий $f(r)/g(r) \to 1$, $r \to r_0$.

Можно показать, что для компонент скорости вблизи начала координат выполняется

$$\Phi(r) \,\sim\, \Phi_{(1)}\,r\,, \qquad U(r) \sim U_{(1)}r\,, \qquad r \to 0\,,$$

где для постоянных $\Phi_{(1)}$, $U_{(1)}$ верно $l_0\,\Phi_{(1)} > 0$ и $U_{(1)} < 0$. Аналогично выводится следующая асимптотика для компонент скорости при $r \to r_\infty$:

$$U(r) \sim \beta_0 D\,r^5\,e^{-qr}/\varrho_\infty\,, \qquad \Phi(r) \sim \Phi_\infty\,\exp\big(-\sqrt{\alpha/\mu}\;r\big)/\sqrt{r}\,; \tag{2.13}$$

при выводе второго соотношения в (2.13) мы ограничились предположением $\alpha/\mu < q^2$.

С помощью полученной зависимости (2.13) устанавливаем асимптотическое поведение плотности при $r \to \infty$:

$$\varrho(r) \,-\, \varrho_\infty \,\sim\, -\sqrt{\mu/\alpha}\,\varrho_\infty^2\,l_0\,\Phi_\infty\,\exp\big(-\sqrt{\alpha/\mu}\,r\big)/(\gamma P_\infty\sqrt{r})\,. \tag{2.14}$$

3 Сведéние к системе двух дифференциальных уравнений

Домножая уравнение (2.7) на r и интегрируя от нуля до r, получаем связь между радиальной скоростью $U(r)$ и плотностью $\varrho(r)$:

$$\varrho(r)\,U(r) = -\,b(r)\,, \tag{3.1}$$

где

$$b(r) = r^{-1}\int_0^r s\,\beta(s)\,ds\,.$$

Подставляя (3.1) в систему (2.5)–(2.7), исключаем из нее $U(r)$ и приходим к системе двух уравнений относительно тангенциальной скорости $\Phi(r)$ и плотности $\varrho(r)$:

$$\Phi'' + \big(r^{-1} + b\,\mu^{-1}\big)\;\Phi' - \big(r^{-2} - r^{-1}b\,\mu^{-1} + \alpha\mu^{-1}\big)\,\Phi \,=\, -\,l_0\,b\,\mu^{-1}\,, \tag{3.2}$$

$$
\begin{gathered}
(\mu+\lambda)\, b\, \varrho'' \;-\; 2\,(\mu+\lambda) b\, \varrho\, \varrho'^2 + \\
+\Big[\, 2\,(\mu \;+\; \lambda)\, b' + (\mu+\lambda) r^{-1} b + b^2 - \gamma P_\infty \varrho_\infty^{-\gamma} \varrho^{\gamma+1} \Big]\, \varrho' + \\
+\big(l_0 \Phi + r^{-1}\Phi^2\big)\varrho^3 \;+\; \Big[r^{-2}\, b \;-\; r^{-1} b' - (\mu+\lambda) b'' - b b' + \alpha b\Big]\varrho = 0\,.
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Краевые условия следуют из соотношений (2.8), (2.9), (2.10) и вытекающих из (2.6), (2.7) соотношений $\lim\limits_{r\to\infty} U'(r) = 0\,,\ \lim\limits_{r\to\infty} U''(r) = 0$:

$$
\Phi(0) = 0\,, \qquad\qquad \lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0\,, \tag{3.4}
$$

$$
\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = \varrho_\infty\,, \qquad\qquad \lim_{r\to\infty} \varrho\,'(r) = 0\,. \tag{3.5}
$$

Система уравнений (3.2), (3.3) вместе с краевыми условиями (3.4), (3.5) представляет собой итоговую краевую задачу относительно двух неизвестных — $\Phi(r)$ и $\varrho(r)$.

Первое уравнение (3.2) этой задачи и краевые условия (3.4) составляют линейную краевую задачу только для функции $\Phi(r)$, которую решаем отдельно. Второе, нелинейное уравнение (3.3) вместе с условиями (3.5) дают задачу Коши для искомой плотности $\varrho(r)$. После решения этих задач оставшиеся неизвестные — радиальная скорость U и давление p — могут быть вычислены по формулам (3.1) и (2.4).

4 Вычисление тангенциальной скорости $\Phi(r)$

4.1. Перенос краевых условий из особых точек. При решении сингулярных краевых задач методом конечных разностей в общем случае необходимо переносить краевые условия из особых точек в некоторые близкие к ним неособые точки [16], [17], [18].

В рассматриваемой задаче (3.2), (3.4) точка $r = 0$ является особой для уравнения (3.2) и, тем не менее, регулярной для функции $\Phi(r)$. Поэтому переноса первого краевого условия (3.4) не требуется.

Перенос краевого условия (3.4) из точки $r = \infty$ в достаточно удаленную (неособую) точку $r = r_N \gg 1$, осуществляемый на основе асимптотики (2.13), дает в этой точке условие

$$
\Phi'(r_N) \;=\; -\sqrt{\alpha/\mu}\,\Phi(r_N)\,. \tag{4.1}
$$

4.2. Разностный алгоритм для $\Phi(r)$. Для численного решения задачи (3.2), (3.4) введем равномерную сетку с шагом h: $r_j = j\,h\,,\ j = 0, 1, \ldots, N$, где N – такое число, что величина r_N значительно больше характерного радиуса тайфуна.

Обозначая через $\Phi_j = \Phi(r_j)\,, b_j = b(r_j)$ значения функций $\Phi(r)$ и $b(r)$ в узлах сетки и используя в них центральные разностные аппроксимации [16], [17] порядка $O(h^2)$ для приближения производных $\Phi'(r)$ и $\Phi''(r)$, получаем необходимую разностную схему, аппроксимирующую уравнение (3.2) в точке r_j:

$$
\begin{gathered}
\mu(\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1})/h^2 + \mu(\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1})/(2hr_j) - \\
- \mu\Phi_j/r_j^2 + b_j(\Phi_{j+1} - \Phi_{j-1})/(2h) + b_j\Phi_j/r_j - \alpha\Phi_j + l_0 b_j = 0.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Граничное условие (3.4) в точке $r = 0$ принимает вид $\Phi_0 = 0$, а условие (4.1) в точке r_{N-1} — следующий вид:

$$(\Phi_N - \Phi_{N-2})/(2\,h) = -\sqrt{\alpha/\mu}\,\Phi_{N-1}\,. \tag{4.3}$$

Таким образом, для нахождении сеточных значений Φ_j сформулирована задача (4.2), (4.3), включающая $(N-1)$ линейных алгебраических уравнений (4.2), условие $\Phi_0 = 0$ и соотношение (4.3).

Для решения системы (4.2), (4.3), представимой в векторном виде равенством $A\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}$ с трехдиагональной матрицей A, был использован метод прогонки [17], [19], [20].

5 Вычисление плотности $\varrho(r)$

5.1. Перенос условий Коши из бесконечности. Перенос первого из условий (3.5), осуществляемый на основе асимптотик (2.14) и (2.13), дает в точке r_N соотношение:

$$\varrho\,(r_N) = \varrho_\infty - \sqrt{\mu/\alpha}\,\varrho_\infty^2\,l_0\,\Phi(r_N)/(\gamma\,P_\infty)\,. \tag{5.1}$$

Перенос условия (3.5) для $\varrho\,'(r)$ из бесконечности в r_N осуществляется путем задания значений $\varrho\,(r_N)$ и $\varrho\,(r_{N-1})$ с помощью формулы (5.1).

5.2. Разностный алгоритм для $\varrho(r)$. Обозначая $\varrho_j := \varrho(r_j)$ и аппроксимируя $\varrho\,'(r)$ и $\varrho\,''(r)$ центральными разностными производными, получаем требуемую разностную схему для плотности:

$$\begin{gathered}(\mu+\lambda)\Big\{-b_j''\varrho_j + 2b_j'\varrho_j' + 2b_j\left[(\varrho_{j+1} - \varrho_j)/h - \varrho_j'\right]/h - \\ -2b_j(\varrho_j')^2/\varrho_j + b_j\varrho_j'/r_j - b_j'\varrho_j/r_j + b_j\varrho_j/r_j^2\Big\} + b_j(b_j\varrho_j' - b_j'\varrho_j) + \\ +\alpha b_j\varrho_j = \gamma P_\infty\varrho_j^{\gamma+1}\varrho_j'/(\varrho_\infty^\gamma) - \varrho_j^3\big(l_0\Phi_j + \Phi_j^2/r_j\big)\,.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Это соотношение представляет собой квадратное уравнение относительно разностной производной ϱ_j' вида $a_2\,(\varrho_j')^2 + a_1\,\varrho_j' + a_0 = 0$; его коэффициенты, определяемые из (5.2), зависят от значений плотности в двух точках r_j и r_{j+1}. Решая это уравнение, находим связь между производной ϱ_j' и значениями ϱ_j и ϱ_{j+1}

$$\varrho_j'(\varrho_j,\,\varrho_{j+1}) = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\,\right)(2a_2)^{-1},$$

где берется та ветвь квадратного корня, которая дает значение ϱ_j', ближайшее к $(\varrho_{j+1}-\varrho_j)/h$. Выражая с помощью формулы центральной разностной производной величину ϱ_{j-1} через значение ϱ_{j+1} и производную ϱ_j', получаем в итоге рекуррентное соотношение

$$\varrho_{j-1} = \varrho_{j+1} - 2h\varrho_j'(\varrho_j,\,\varrho_{j+1})\,. \tag{5.3}$$

Используя заданные с помощью (5.1) значения ϱ_N и ϱ_{N-1}, последовательно находим по формуле (5.3) искомые ϱ_j, начиная с номера $j = N-2$ и до $j = 0$, что и дает разностное решение задачи Коши для $\varrho(r)$.

6 Вычисление траекторий частиц воздуха в тайфуне

Уравнение $\vartheta = \vartheta(r)$ траекторий частиц воздуха в тайфуне, записанное в полярных координатах, имеет вид $\vartheta'(r) = \Phi(r)/\big(r\,U(r)\big)$. Зная найденные значения Φ_j и U_j в узлах сетки r_j и используя разностную аппроксимацию для производной $\vartheta'(r)$, получаем разностную схему для расчета траектории $\vartheta(r)$ частиц воздуха:

$$\vartheta_j \;=\; \vartheta_{j+1} \;-\; 2(r_{j+1} - r_j)(\Phi_{j+1} + \Phi_j)/\big[(r_{j+1} + r_j)(U_{j+1} + U_j)\big]\,. \tag{6.1}$$

Выбирая в качестве начальной некоторую точку $(r_N,\, \vartheta_N)$ расчетной траектории и последовательно вычисляя ϑ_j по формуле (6.1) при $j = N-1,\, N-2, \ldots, 1$, строим разностную аппроксимацию траектории $\big\{(r_j,\, \vartheta_j)\big\}_{j=1}^{N}$.

7 Численная реализация модели и результаты расчетов

7.1. Точность алгоритма и выбор параметров модели. Представленная модель движения воздуха в нижнем слое тайфуна была численно реализована для широкого диапазона параметров модели. Численная реализация включала нахождение пространственного распределения тангенциальной $\Phi(r)$, радиальной $U(r)$ компонент скорости и ее модуля $|v(r)| = \sqrt{\Phi^2 + U^2}$, плотности воздуха $\varrho(r)$ и давления $p(r)$, а также расчет траекторий частиц воздуха.

Проведенное исследование точности алгоритма показало, что принятая вычислительная схема имела аппроксимацию порядка $O(h^2)$, где h — шаг сетки, что позволило добиться относительной точности расчетов не хуже 10^{-3}.

Параметры модели выбирались на основе эмпирических данных из [4], [7]. Значения давления P_∞, плотности ϱ_∞ и показателя адиабаты воздуха γ в уравнении (2.4) принимались для всех вариантов расчетов соответствующими невозмущенной атмосфере на уровне океана:

$$P_\infty = 10^5\,\text{кг}/(\text{мс}^2), \quad \varrho_\infty = 1.29\,\text{кг}/\text{м}^3, \quad \gamma \;=\; 1.4\,.$$

Коэффициенты μ и λ соответственно динамической и объемной вязкости и коэффициент трения α в уравнениях (3.2), (3.3) брались в следующих интервалах:

$$\mu \in [0.5,\, 2]\cdot 10^5\,\text{кг}/(\text{мс}), \quad \lambda \in [\mu/3,\, \mu], \quad \alpha \in [4,\, 10]\cdot 10^{-6}\,\text{кг}/(\text{м}^3\text{с})\,. \tag{7.1}$$

Географическая широта φ_0 центра тайфуна, определяющая по формуле (2.1) параметр Кориолиса l_0, выбиралась в диапазоне $\varphi_0 \in [8,\, 20]^{\,o}$ СШ. Для модельной функции $\beta(r)$ из (2.12) – плотности вертикального потока воздуха на верхней границе рассматриваемого слоя – параметры выбирались в интервалах:

$$\beta_0 \in [2,\, 6]\cdot 10^{-3}\,\text{кг}/(\text{м}^3\text{с}), \quad R \in [50,\, 100]\cdot 10^3\,\text{м}, \quad q \in [4.8/R\,,\, 5/R]\,. \tag{7.2}$$

7.2. Расчет характеристик типичного тайфуна. Численная реализация модели с различными сочетаниями значений параметров в диапазонах (7.1), (7.2) приводила к качественно сходным картинам распределения характеристик тайфуна.

Приведем типичные распределения скорости и плотности воздуха в основной части тайфуна, полученные при следующих значениях параметров функции $\beta(r)$:

$$\beta_0 = 2.5\cdot 10^{-3}\,\text{кг}/(\text{м}^3\text{с})\,, \quad R = 90\cdot 10^3\,\text{м}\,, \quad q = 4.93/R\,.$$

Значения остальных параметров полагались равными

$$\mu = 1.3 \cdot 10^5\,\text{кг/(мс)}\,, \quad \lambda = \mu/2\,, \quad \alpha = 6 \cdot 10^{-6}\,\text{кг/(м}^3\text{с)}\,, \quad \varphi_0 = 10^o\,\text{СШ}\,.$$

На рисунке 1 штрихпунктирной и сплошной светлой линиями показаны графики зависимости тангенциальной $\Phi(r)$ и радиальной $|U(r)|$ компонент скорости воздуха от расстояния r до центра тайфуна.

Изображенное жирной линией распределение модуля скорости $|v(r)|$ является типичным и наблюдавшимся (с несущественными изменениями) при любых значениях параметров модели из диапазонов (7.1), (7.2). Оно характеризуются тем, что за близко расположенным к центру тайфуна ($r \approx 15$ км) довольно резким максимумом следует значительно дальше расположенный слабо выраженный второй максимум ($r \approx 55$ км), либо пологий участок, который заканчивается медленным спаданием $|v(r)|$.

Описанное явление “двух максимумов” в распределении скорости ветра в тайфуне подтверждается данными наблюдений, приведенными на рисунке 2 и полученными путем измерений скорости ветра с самолета в одном из тайфунов экваториальной Атлантики [21]. Указанный характер распределения скорости ветра в приземной части тайфуна, по-видимому, может быть использован для объяснения значительного размера зоны вызываемых тайфунами сильных разрушений.

На рисунке 3 показаны рассчитанные спиралевидные траектории частиц воздуха в нижнем слое тайфуна, а на рисунке 4 дана полученная зависимость от r плотности воздуха $\varrho(r)$, измеряемая в кг/м^3.

Продемонстрированная хорошая согласованность экспериментальной и расчетной картин распределения модуля скорости является показателем адекватности построенной модели.

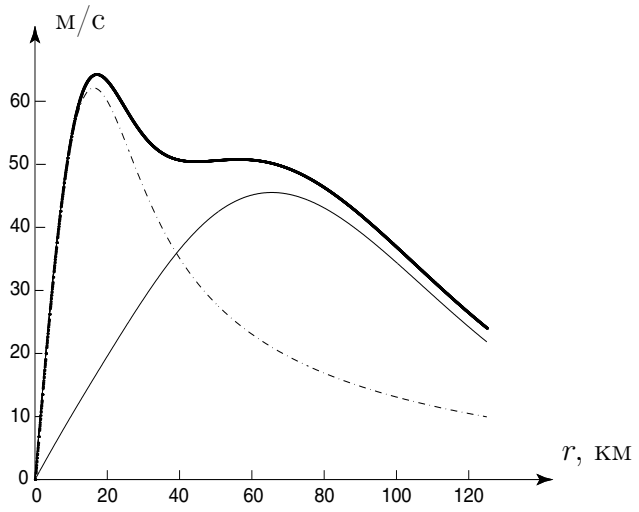


Рис. 1. Распределение тангенциальной компоненты $\Phi(r)$ — штрихпунктирная линия, радиальной компоненты $|U(r)|$ — сплошная светлая линия, модуля скорости $|v(r)|$ — жирная линия.

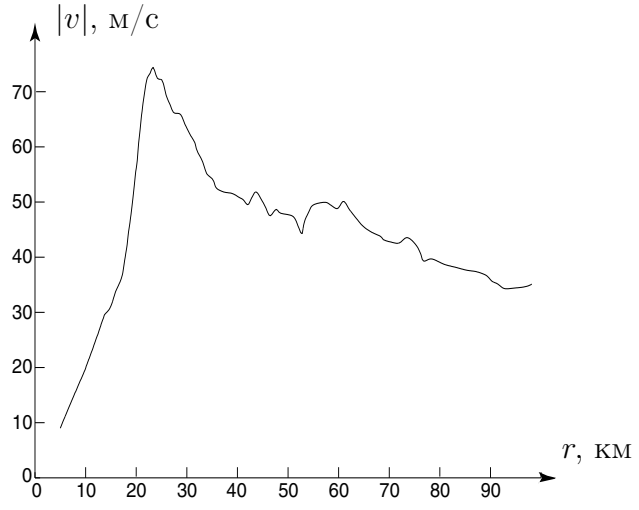


Рис. 2. Данные [21] измерений модуля скорости $|v(r)|$ в нижнем слое тайфуна.

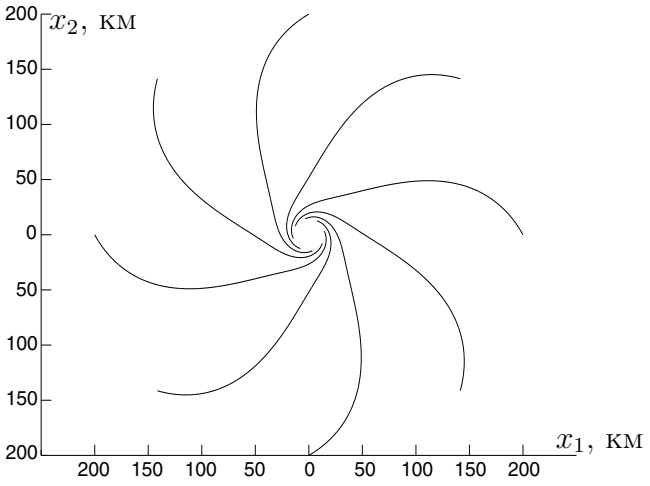


Рис. 3. Расчетные траектории движения воздуха в нижнем слое тайфуна.

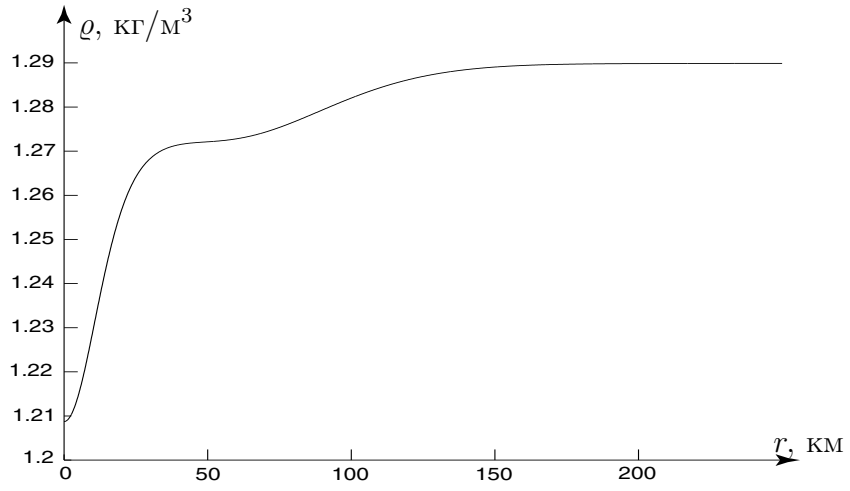


Рис. 4. Распределение плотности воздуха $\varrho(r)$ в тайфуне.

Литература

1. E. Palmen, C.W. Newton. Atmospheric Circulation Systems. N.-Y., London, 1969.
2. Э.С. Мамедов, Н.И. Павлов. Тайфуны. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
3. H. Riehl. Climate and Weather in the Tropics. London, 1979.
4. А.П. Хаин, Г.Г. Сутырин. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоиздат. 1983.
5. Л.С. Минина, Н.А. Безрукова. Циклоны тропиков. М.: Знание, 1984. Вып. 9.
6. R.A. Anthes. Tropical Cyclones — Their Evolution, Structure, and Effects. Boston, 1982.
7. А.П. Хаин. Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
8. The Science and Forecasting of Tropical Cyclones. TPC-47. Rep. WMO/TD-No. 1129, Geneva, 2002.
9. M. Takeda, N. Matsuo, E. Matsuda. Evaluation of Typhoon Model Parameters and Storm Surge Analysis by Data for Past Ten Years // Journ. of Research Inst. for Scien. and Techn. 2001. V. 13. P. 123–132.
10. О.С. Розанова, Х.Я. Фужита. Стационарное решение уравнений движения воздуха в нижней части тайфуна // Сиб. ж. индустр. матем. 2005. Т. 8, No 4. С. 100–123.
11. А.М. Обухов. К вопросу о геострофическом ветре // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. XIII, No 4. С. 281–306.
12. А.М. Обухов. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
13. Д.М. Алишаев. О динамике двумерной бароклинной атмосферы // Изв. Акад. Наук СССР. Сер. физ. атм. и океана 1980. Т. 16, No 2. С. 99–107.
14. В.В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
15. E.A. Coddington, N. Levinson Theory of Ordinary Differential Equations. London, 1955.
16. А.А. Самарский. Теория разностных схем. М.: Наука, 1985.
17. Н.С. Бахвалов. Численные методы. М.: Наука, 1975.
18. А.А. Абрамов, Н.Б. Конюхова. Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Computational Mathematics. Banach Center Publications. 1981. Vol. 13. P. 319–351.
19. С.К. Годунов, В.С. Рябенький. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.

20. Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

21. R.C. Sheets. On the structure of hurricanes as revealed by research Aircraft data, In: Intense atmospheric vortices. Proceedings of the Joint Simposium (IUTAM/IUGC) held at Reading (United Kingdom) July 14-17, 1981. Edited by L.Begtsson and J.Lighthill. P. 33–49.

NUMERICAL MODILLING OF AIR MOTION IN THE LOWER LAYER OF TYPHOON

V.I. Vlasov[1], S.L. Skorokhodov[1], H.Fujita Yashima[2]

[1] Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov str., 40, Moscow, 119991, Russia, e-mail: skor@ccas.ru,vlasov@ccas.ru
[2] Dipartimento di Matematica, Università di Torino,
via Carlo Alberto, 10,Torino, 10123, Italia, e-mail: hisao.fujitayashima@unito.it

Abstract. A model of stationary axisymmetric air motion in a lower layer of typhoon is presented, which takes into account air viscosity and compressibility, as well as Coriolis force and friction against the Earth surface. The model is reduced to a system of three nonlinear differential equations for averaged in vertical direction horizontal velocity and density of air. By taking into consideration a function β, which describes the vertical air flux at the top of the layer, the problem is decomposed into two ones: a boundary value problem for tangential component of velocity and a Cauchy problem for air density. The rest quantities are found explicitly by means of the first ones. The performed effective numerical realization of the model, which results match well with observation data, have given an explanation of some regularities for velocity distribution in the lower layer of a typhoon.

Keywords: typhoons, mathematical modelling, systems of nonlinear differential equations, finite difference methods.

УДК 517.956

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ С ЗАДАННЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ

А.В. Глушак, Ф.С. Дедиков

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: aleglu@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются задача определения начального состояния по заданному среднему значению температуры и задача определения порядка среднего по заданному начальному состоянию и заданному среднему значению температуры в финальный момент времени.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, среднее значение температуры, численная минимизация функции одной переменной.

При изучении распространения тепла в стержне бесконечной длины возникает уравнение теплопроводности

$$u'_t = u''_{xx}, \quad t \in (0, \infty), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Для выделения единственного решения этого уравнения следует задать распределение температуры в начальный момент времени

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{2}$$

Нас будут интересовать решения, представимые интегралом Пуассона

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) u_0(\xi)\ d\xi. \tag{3}$$

Поэтому мы будем считать, что функция $u_0(x)$ такова, что интеграл (3) определяет единственное классическое решение начальной задачи (1), (2) и этот факт мы будем записывать как $u_0(x) \in U$.

1 Задача определения начального состояния (обратная эволюционная задача).

Рассмотрим следующую задачу. Среди решений, определенных интегралом Пуассона (3), найти такую, которая в точке наблюдения $x = 0$ имеет заданную β-среднюю (см. [1], с. 519]) температуру за время t

$$\beta\ t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s, 0)\, ds = u_1(t), \quad \beta > 0. \tag{4}$$

Отметим, что случай наблюдения в точке $x = x_0$ сводится к рассматриваемому случаю заменой переменной в интеграле Пуассона.

Работа первого автора поддержана РФФИ (грант 10–01–00062)

Выражение в левой части (4) называется β-средним функции $u(t,0)$ и представляет собой отношение дробного интеграла Римана-Лиувилля $I^\beta u(t,0)$ к $I^\beta 1$, где

$$I^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} v(s)\, ds, \quad \beta > 0,$$

$\Gamma(\beta)$ — гамма-функция. Естественно считать, что β-среднее функции $u(t,0)$, т.е. $\Gamma(\beta+1)\, t^{-\beta} I^\beta(t,0)$, при $\beta = 0$ равно $u(t,0)$.

Таким образом, задача состоит в нахождении начального состояния $u_0(x) \in U$, обеспечивающего выполнение равенства (4) при заданных $\beta \geq 0$ и $u_1(t)$. Более того, нам достаточно определить только четную составляющую $u_e(x)$ функции $u_0(x)$, т.е. $u_e(x) = \frac{1}{2}(u_0(x) + u_0(-x))$, поскольку

$$u(t,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) u_0(\xi)\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) u_e(\xi)\ d\xi. \tag{5}$$

Такого рода задачи называются обратными эволюционными задачами (см. [2], [3]).

Пусть $\beta > 0$, подставляя заданную равенством (5) функцию $u(t,0)$ в левую часть соотношения (4), получим

$$\Gamma(\beta+1)\, t^{-\beta} I^\beta u(t,0) = \beta t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4s}\right) u_e(\xi)\ d\xi ds =$$

$$= \beta t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta}{s}\right) \eta^{-1/2}\ u_e(2\sqrt{\eta})\ d\eta ds = u_1(t). \tag{6}$$

Интеграл в (6) может быть записан с помощью оператора Кобера ([4], с. 246, [5], с. 105)

$$K^-_{\alpha,\beta}[g](t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_t^\infty (\tau - t)^{\beta-1} \tau^{-\alpha-\beta} g(\tau)\, d\tau, \quad \beta > 0.$$

Пусть также $\phi(\eta) = \dfrac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}$ и $[L\phi](\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda\eta} \phi(\eta)\ d\eta, \quad \lambda > 0.$

Стало быть, из (6) для нахождения функции $\phi(\eta)$ получаем уравнение

$$\Gamma(\beta+1)\, K^-_{1/2,\beta}[L\phi]\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\ u_1(t). \tag{7}$$

Оператор $D^-_{\alpha,\beta}$, такой что

$$D^-_{\alpha,\beta}[g](t) = t^{\alpha+\beta} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n t^{n-\alpha-\beta} K^-_{\alpha+\beta-n,n-\beta}[g](t), \quad n = [\beta] + 1,$$

является обратным по отношению к $K^-_{\alpha,\beta}$, для достаточно «хороших» (см. [5], с. 100) функций g. Следовательно, из (7) вытекает равенство

$$[L\phi](t) = D^-_{1/2,\beta}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+1)\sqrt{\tau}} u_1\left(\frac{1}{\tau}\right)\right](t) := \tilde{u}_{1,\beta}(t). \tag{8}$$

Наконец, если предположить определенную гладкость функции $\tilde{u}_{1,\beta}(t)$, то обращая преобразование Лапласа по формуле Поста-Уиддера (см. [1], с. 241) при $\beta > 0$ в (4), из (8), окончательно получим

$$\frac{u_e(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = \left[L^{-1}\tilde{u}_{1,\beta}\right](x) = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1} \tilde{u}_{1,\beta}^{(k)}\left(\frac{k}{x}\right),$$

следовательно, чётная составляющая $u_0(x)$ может быть определена из условия (4) при определенной гладкости функции $u_1(t)$.

В случае $\beta = 0$ ситуация намного проще. Функция $u_e(x)$ определяется обращением преобразования Лапласа из равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) u_e(\xi)\ d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\eta/t}\eta^{-1/2}u_e(2\sqrt{\eta})\ d\eta = u_1(t).$$

Она имеет вид

$$\frac{u_e(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1} \tilde{u}_{1,0}^{(k)}\left(\frac{k}{x}\right), \quad \tilde{u}_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ u_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отметим, что для нахождения четной составляющей $u_e(x)$ функции $u_0(x)$ можно применить другой способ, который мы приведем ниже. Но для решения обратной параметрической задачи в п. 2 нам нужна формула (7), полученная изложенным способом.

Другой способ состоит в следующем. Считая функцию $u_1(t)$ достаточно гладкой, применим к равенству (4) оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля (см. [4], [5]) $D^\beta = \dfrac{d^n}{dt^n} I^{1-\{\beta\}}$, $n = [\beta] + 1$. Получим

$$u(t,0) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right). \tag{9}$$

Из равенств (9) и (5) для нахождения $u_e(x)$ выводим уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\eta/t}\eta^{-1/2}u_e(2\sqrt{\eta})\, d\eta = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right),$$

из которого с помощью обратного преобразования Лапласа будем иметь

$$\frac{u_e(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1} \hat{u}_{1,\beta}^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $\hat{u}_{1,\beta}(x) = \sqrt{t} D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right)$ при $t = 1/x$.

Пример 1. Пусть $u_1(t) = t^{\gamma-1/2}$, где $\gamma > \max\{\beta - n - 1/2; 0\}$, $n = [\beta] + 1$. Вычислим функцию $\tilde{u}_1(t)$, определенную равенством (8). Имеем

$$\tilde{u}_1(t) = D^-_{1/2,\beta}\left[\frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)}\right](t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta+1/2}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n \left(t^{n-\beta-\frac{1}{2}} K^-_{\beta-n+1/2,n-\beta}\left[\tau^{-\gamma}\right](t)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta+1/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_t^\infty (\tau - t)^{n-\beta-1} \tau^{-\gamma-1/2} \, d\tau \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\beta)} t^{\beta+1/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^{n-\beta-\gamma-1/2} \int_0^1 (1-s)^{n-\beta-1} s^{\beta+\gamma-n-1/2} \, ds \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1/2)} t^{\beta+1/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^{n-\beta-\gamma-1/2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)\Gamma(n-\beta-\gamma+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)} t^\gamma.$$

В частности, при $\gamma = 1/2$, учитывая известное свойство гамма-функции $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$, будем иметь

$$\tilde{u}_1(t) = \frac{(-1)^n \Gamma(1+\beta-n)\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\beta)} t^{-1/2} = \frac{\frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi(n-\beta)}}{\frac{\pi}{\sin(-\pi\beta)}} t^{-1/2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi\beta}{\sin \pi(n-\beta)} t^{-1/2} = t^{-1/2}.$$

Из равенства $[L\phi](t) = \tilde{u}_1(t)$ найдем оригинал. Получим

$$\phi(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)\Gamma(n-\beta-\gamma+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)} x^{\gamma-1}.$$

В частности, если $\gamma = 1/2$, то $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$.

Определим далее $u_e(x)$ из равенства $\phi(\eta) = \dfrac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}$. Будем иметь

$$u_e(x) = \frac{\sqrt{\pi} x}{2} \phi\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(\beta+\gamma-n+1/2)\Gamma(n-\beta-\gamma+1/2)\, 2^{1+2\gamma}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)} x^{2\gamma-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n \pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)\sin \pi(\beta+\gamma-n+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)\Gamma(-\beta-\gamma+1/2)\cos \pi(\beta+\gamma)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta+\gamma+1/2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1}.$$

В частности если $\gamma = 1/2$, то $u_e(x) = 1$, что естественно, т.к., если мы хотим чтобы средняя температура $u_1(t)$ за время t была постоянной, то и начальная функция также должна быть постоянной.

Второй способ, естественно, приводит к тому же результату. Действительно,

$$u_1(t) = t^{\gamma-1/2}, \quad D^\beta\left(t^\beta u_1(t)\right) = \frac{\Gamma(\beta+\gamma+1/2)}{\Gamma(\gamma+1/2)} t^{\gamma-1/2},$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta/t}\frac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}\,d\eta=\frac{\Gamma\left(\beta+\gamma+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\,t^{\gamma},$$

$$\frac{u_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}=\frac{\Gamma\left(\beta+\gamma+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\eta^{\gamma-1},$$

$$u_e\left(x\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\beta+\gamma+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\gamma-1}.$$

2 Задача определения порядка среднего (обратная параметрическая задача).

Для функций, определяемых интегралом Пуассона (3) при $t\in[0,1]$ найдем порядок средней температуры β так, чтобы при заданных $u_0\left(x\right)$ и $u_1\left(1\right)$ выполнялось равенство

$$\lim_{t\to1}\Gamma\left(\beta+1\right)t^{-\beta}I^{\beta}u\left(t,0\right)=u_1\left(1\right). \tag{10}$$

Отметим, что задавать дополнительное условие в виде (4), вообще говоря, нельзя. Например, при $u_0(x)\equiv1$ мы получим уравнение $\dfrac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}=u_1(t)$, неразрешимое при произвольном выборе $u_1(t)$. Следовательно, необходимо фиксировать финальный момент наблюдения. Промежуток $t\in[0,1]$ выбран для компактности записей. Такого рода задача рассматривается, по-видимому, впервые и мы ее называем обратной параметрической задачей.

При $\beta>0$, $\phi\in L_p\left(0,\infty\right)$, $1\le p<\infty$, учитывая равенство (6), из условия (10) получим уравнение

$$\beta\int_1^\infty\left(\tau-1\right)^{\beta-1}\tau^{-\beta-1/2}\,\left[L\phi\right]\left(\tau\right)\,d\tau=\beta\int_0^1\left(1-s\right)^{\beta-1}s^{-1/2}\,\left[L\phi\right]\left(\frac{1}{s}\right)\,ds=u_1(1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$f\left(\beta\right)=\begin{cases}\beta\displaystyle\int_0^1\left(1-s\right)^{\beta-1}s^{-1/2}\,\left[L\phi\right]\left(\frac{1}{s}\right)\,ds, & \beta>0,\\ \left[L\phi\right](1), & \beta=0,\end{cases} \tag{11}$$

где, по-прежнему, $\phi\left(x\right)=\dfrac{u_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}}$ — заданная функция.

Для «достаточно хороших» $\phi\left(\tau\right)$, функция $f\left(\beta\right)$ непрерывна при $\beta\ge0$ (см. теоремы 2.6, 2.7 [4]). Таким образом, исходная задача сводится к задаче нахождения числа $\beta\ge0$ из условия

$$f\left(\beta\right)=u_1\left(1\right). \tag{12}$$

Если число $u_1\left(1\right)$ принадлежит множеству значений функции f, т.е. если $u_1\left(1\right)\in f\left(\left[0,\infty\right)\right)$, то поставленная задача разрешима. В противном случае, ее естественно видоизменить следующим образом: найти число $\beta_0\ge0$ минимизирующее разность $\left|f\left(\beta\right)-u_1(1)\right|$. К сожалению, точное решение указанных задач не всегда возможно.

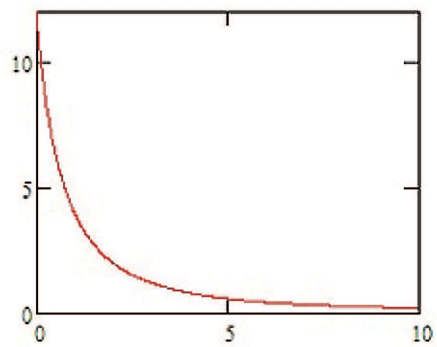


Рис. 1: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = x^4$.

Пример 2. Пусть $u_0(x) = x^\delta$, $\delta > -1$. Тогда

$$\phi(x) = \frac{(2\sqrt{x})^\delta}{\sqrt{\pi x}}, \quad [L\phi](p) = \frac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}\ p^{\delta/2+1/2}}, \quad [L\phi]\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}\ s^{\delta/2+1/2},$$

$$f(\beta) = \begin{cases} \dfrac{2^\delta \beta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\, s^{\delta/2}\, ds, & \beta > 0, \\ \dfrac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}, \quad \beta = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^\delta \Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta/2+1/2)\Gamma(\delta/2+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta/2+\beta+1)}, & \beta > 0, \\ \dfrac{2^\delta\ \Gamma(\delta/2+1/2)}{\sqrt{\pi}}, \quad \beta = 0. \end{cases} =$$

$$= \frac{2^\delta \Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta/2+1/2)\Gamma(\delta/2+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\delta/2+\beta+1)}, \ \beta \geq 0.$$

В частности, если $u_0(x) = x^4$ или $u_0(x) = |x|$, то, соответственно получим (см. рис. 1 и рис. 2)

$$f(\beta) = \frac{24}{(\beta+1)(\beta+2)}, \ \beta \geq 0, \qquad f(\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}, \ \beta \geq 0.$$

В первом случае задача нахождения неизвестного параметра β элементарна. Во втором же случае, как и во многих других, следует применять численные методы решения, в частности, методы численного решения алгебраических уравнений или методы численной минимизации функций одной переменной. Отметим, что решение осложняется наличием операции интегрирования в формуле (11), задающей функцию $f(\beta)$ и тем, что преобразование Лапласа нужно найти до процедуры численного решения.

Приведем еще несколько примеров нахождения функции $f(\beta)$.

Пример 3. Пусть $u_0(x) = \exp(-x^2)$. Тогда (см. рис. 3)

$$\phi(x) = \frac{\exp(-4x)}{\sqrt{\pi x}}, \quad [L\phi](p) = \frac{1}{\sqrt{p+4}}, \quad [L\phi]\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4s+1}},$$

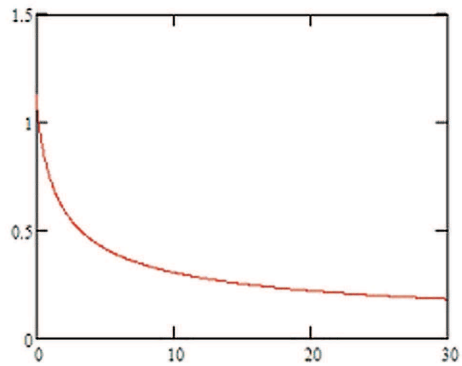


Рис. 2: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = |x|$.

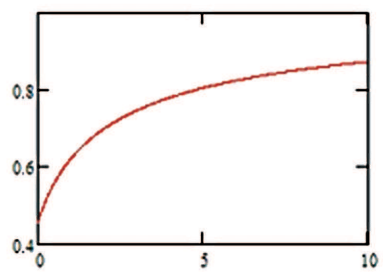


Рис. 3: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = \exp(-x^2)$.

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} (1+4s)^{-1/2}\, ds, & \beta > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}, & \beta = 0. \end{cases}$$

Пример 4. Пусть $u_0(x) = \sin^2 x$. Тогда (см. рис. 4)

$$\phi(x) = \frac{\sin^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}, \quad [L\phi](p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 - \exp(-4/p)\right), \quad [L\phi]\left(\frac{1}{s}\right) = \sqrt{s}\left(1 - \exp(-4s)\right),$$

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} (1 - \exp(-4s))\, ds, & \beta > 0, \\ 1 - \exp(-4), & \beta = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \beta \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \exp(-4s)\, ds, & \beta > 0, \\ 1 - \exp(-4), & \beta = 0. \end{cases}$$

3 Численное решение задачи п. 2

. Для численного решения задачи п. 2 для уравнения теплопроводности на языке программирования Borland Delphi 7 была написана программа поиска минимума, на основе использования метода квадратичной интерполяции. Метод, был выбран путем сравнения

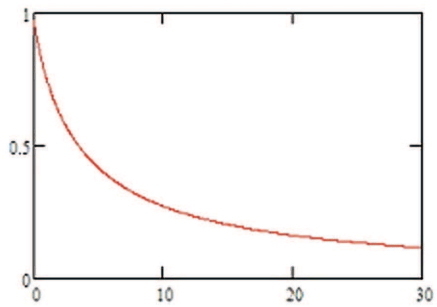


Рис. 4: График функции $f(\beta)$ для $u_0(x) = \sin^2 x$.

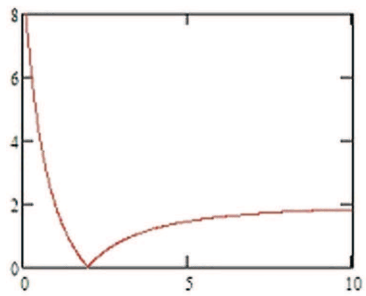


Рис. 5: График функции $\left|\dfrac{24}{(\beta+1)(\beta+2)} - 2\right|$, $\beta \geq 0$.

(учитывалась скорость сходимости, точность), как наилучший среди методов нулевого порядка (см. [6], [7]). Алгоритм поиска экстремума основывается на аппроксимации по трем точкам. Точки должны быть взяты вблизи минимума, в противном случае алгоритм будет расходящимся и искомое решение не будет найдено. Начальная точка поиска выбирается исходя из построенного графика функции $f(\beta)$. В отдельном блоке программы задается функция $f(\beta)$, содержащая интеграл, также отдельно введен алгоритм вычисления интеграла методом Симпсона.

Пример 5. Пусть в задаче (1), (2), (10) $u_0 = x^4$, $u_1(1) = 2$. Тогда уравнение (12), с учетом примера 2, примет вид

$$\frac{24}{(\beta+1)(\beta+2)} = 2, \quad \beta \geq 0,$$

и, следовательно, $\beta = 2$ — точное решение (см. рис. 5).

Пример 6. Пусть в задаче (1), (2), (10) $u_0 = |x|$, $u_1(1) = 1$. Тогда уравнение (12), с учетом примера 2, примет вид

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)} = 1, \quad \beta \geq 0.$$

В этом случае $u_1(1) = 1 \in f([0,\infty))$ (см. рис. 6) и метод квадратичной интерполяции (см. [6], с. 127), при точности 0,001, дает $\beta = 0,221$.

Если же $u_1(1) = 2 \notin f([0,\infty))$, то в качестве решения следует взять (см. рис. 7) значение

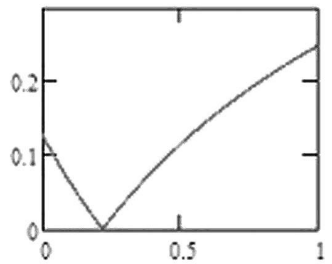


Рис. 6: График функции $\left|\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}-1\right|,\ \beta\geq 0.$

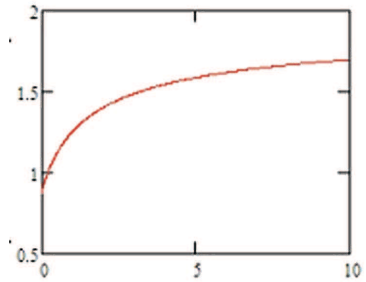


Рис. 7: График функции $\left|\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}-2\right|,\ \beta\geq 0.$

$\beta=0$, минимизирующее разность

$$\left|\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+3/2)}-2\right|.$$

4 Другие функционалы наблюдения в обратной параметрической задаче.

Возможна и иная постановка дополнительного условия нахождения порядка среднего. Вместо условия (10) можно задать, например условие вида

$$\lim_{t\to 1}\Gamma\left(\beta+1\right)t^{-\beta}I^{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda x\ u\left(t,x\right)dx=v_1. \tag{13}$$

Подставляя задаваемую равенством (3) функцию $u\left(t,x\right)$ в (13) и считая выполненным условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda\xi\ u_0\left(\xi\right)\ d\xi<\infty,$$

после элементарных вычислений, получим

$$\Gamma\left(\beta+1\right)E_{1,\beta+1}\left(-\lambda^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda\xi\ u_0\left(\xi\right)\ d\xi=v_1,$$

или, используя равенство 5.2.7.20 [6], приходим к уравнению

$$e^{-\lambda^2}\int_0^1 \exp\left(\lambda^2 s^{1/\beta}\right) ds \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda\xi \; u_0\left(\xi\right) \; d\xi = v_1,$$

из которого при $\lambda \neq 0$ число β ищется методом, изложенным в п. 3.

5 Задача определения источника тепла (обратная коэффициентная задача).

Если внутри рассматриваемого тела имеется независящий от времени источник тепла, то вместо уравнения (1) следует рассмотреть неоднородное уравнение

$$u'_t = u''_{xx} + h(x), \quad t \in (0, T], \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{14}$$

Как известно, решение уравнения (14), удовлетворяющее нулевому начальному условию

$$u\left(0, x\right) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{15}$$

имеет вид

$$u\left(t, x\right) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) h\left(\xi\right) \; d\xi d\tau. \tag{16}$$

Обратная коэффициентная задача состоит в нахождении функции $h(x)$ так, чтобы определяемая равенством (16) функция $u(t,x)$ удовлетворяла условию (4). Нулевое начальное условие (15) взято для упрощения записей. Ненулевое начальное условие приведет лишь к изменению задаваемой функции $u_1(t)$.

Пусть $\beta > 0$, подставляя заданную равенством (16) функцию $u\left(t, 0\right)$ в левую часть соотношения (4), получим

$$\Gamma\left(\beta+1\right) t^{-\beta} I^{\beta} u\left(t, 0\right) =$$

$$= \beta t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \; ds \int_0^s \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(s-\tau)}\right) h_e\left(\xi\right) \; d\xi d\tau =$$

$$= \frac{\beta}{t^{\beta}} \int_0^{\infty} h_e\left(\xi\right) \; d\xi \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(s-\tau)}\right) \; d\tau ds =$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}\; t^{\beta}} \int_0^{\infty} h_e\left(\xi\right) \; d\xi \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \int_0^s \tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \; d\tau ds =$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}\; t^{\beta}} \int_0^{\infty} h_e\left(\xi\right) \; d\xi \int_0^t \tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \int_{\tau}^t (t-s)^{\beta-1} \; ds d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\; t^{\beta}} \int_0^{\infty} h_e\left(\xi\right) \; d\xi \int_0^t (t-\tau)^{\beta} \tau^{-1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \; d\tau =$$

$$= t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta} \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta}{s}\right) \eta^{-1/2} \; h_e\left(2\sqrt{\eta}\right) \; d\eta ds = u_1(t), \tag{17}$$

где $h_e\left(x\right) = \dfrac{1}{2}\left(h_0\left(x\right) + h_0\left(-x\right)\right)$.

Равенства (17) аналогичны равенствам (6) и отличаются лишь тем, что отсутствует множитель β перед интегралами, а под знаком интеграла записано $(t-\tau)^{\beta}$ вместо $(t-\tau)^{\beta-1}$. Поэтому аналогично п. 1 получим соотношения

$$\Gamma(\beta+1)\, K^{-}_{1/2,\beta+1}\left[L\psi\right]\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\; u_1(t)\,, \quad \psi(\eta) = \frac{h_e\left(2\sqrt{\eta}\right)}{\sqrt{\pi\eta}}, \tag{18}$$

$$\left[L\psi\right](t) = D^{-}_{1/2,\beta+1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)\sqrt{\tau}}\; u_1\left(\frac{1}{\tau}\right)\right](t) := \tilde{w}_{1,\beta}(t)\,,$$

$$\frac{h_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \left[L^{-1}\tilde{w}_{1,\beta}\right](x)\,.$$

Заметим, что последние три равенства справедливы и при $\beta = 0$.

Также как и в п. 1 можно применить и другой способ нахождения $h_e(x)$. Из равенств (4) и (16), как и в п. 1 (второй способ), выводим уравнение

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right)\; h_e(\xi)\; d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\beta+1)} D^{\beta+1/2}\left(t^{\beta} u_1(t)\right),$$

из которого с помощью обратного преобразования Лапласа будем иметь

$$\frac{h_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{x}\right)^{k+1} \hat{w}^{(k)}_{1,\beta}\left(\frac{1}{x}\right),$$

где $\hat{w}_{1,\beta}(x) = \dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\beta+1)}\; D^{\beta+1/2}\left(t^{\beta} u_1(t)\right)$ при $t = 1/x$.

6 Задача определения порядка среднего по заданному источнику тепла (обратная параметрическая задача).

Для функций, определяемых равенством (16) при $t \in [0,1]$ найдем порядок средней температуры β так, чтобы при заданных $h(x)$ и $u_1(1)$ выполнялось равенство (10).

Учитывая (17), (18), из условия (10) получим уравнение

$$\int_1^{\infty} (\tau-1)^{\beta}\, \tau^{-\beta-3/2}\; \left[L\psi\right](\tau)\; d\tau = \int_0^1 (1-s)^{\beta}\, s^{-1/2}\; \left[L\psi\right]\left(\frac{1}{s}\right)\; ds = u_1(1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(\beta) = \int_0^1 (1-s)^{\beta}\, s^{-1/2}\; \left[L\psi\right]\left(\frac{1}{s}\right)\; ds,$$

где, по-прежнему, $\phi(x) = \dfrac{u_e\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}}$ — заданная функция. Тогда задача сводится к задаче нахождения числа $\beta \geq 0$ из условия $g(\beta) = u_1(1)$ и решается аналогично п. 3.

Литература

1. Э. Хилле , Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностранная литература. 1962.
2. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York. Basel: Marcel Dekker. 2000.
3. А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС. 2007.
4. С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.
5. A.A. Kilbas,H.M. Srivastava,J.J. Trujillo. Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V. 204. Elsevier. 2006.
6. А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. Методы оптимизации в примерах и задачах. Москва. Высшая школа. 2005.
7. А. Жилинскас, В. Шалтянис. Поиск оптимума. М.: Наука. 1989.
8. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981.

ABOUT THE INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION ON THE INFINITE LINE WITH A GIVEN AVERAGE

A.V. Glushak, F.S. Dedikov

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: aleglu@bsu.edu.ru

Abstract. Consider the problem of determining the initial state for a given average temperature and determining the order of the average for a given initial state and given the average temperature in the final time point.

Keywords: heat equation, the average temperature, numerical minimization of functions of one variable.

УДК 517.95, 517.97

УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ И КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСЕЙ В АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Св.А.Гриценко, А.М.Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: SGritsenko@bsu.edu.ru,Meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о моделировании диффузии и медленной конвекции примесей в абсолютно твердой среде, перфорированной системой пор, заполненных вязкой слабосжимаемой жидкостью. Наличие в точной физической модели малых быстро осциллирующих негладких коэффициентов делает практически невозможной ее численную реализацию. Предлагается вывод усредненной модели, не содержащей быстро осциллирующих коэффициентов.

Ключевые слова: уравнения Стокса, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

Математическая модель рассматриваемой задачи содержит малый параметр ε, равный отношению среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области: $\varepsilon = l/L$. Поэтому естественным упрощением, сохраняющим основные свойства задачи, является нахождение предельных режимов в точной модели при $\varepsilon \to 0$. Вторым упрощением является предположение о периодичности порового пространства. Пусть ограниченная связная область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей есть периодическое повторение элементарной ячейки $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$, Y_s — твердая часть Y, Y_f — жидкая часть, $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$. Тогда поровое пространство Ω^ε есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_f, твердый скелет Ω^ε_s есть периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon \backslash \partial\Omega$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

В безразмерных переменных изучаемая система уравнений для скорости жидкости $\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon(x,t)$, давления $\tilde{p}^\varepsilon(x,t)$ и концентрации примеси $\tilde{c}^\varepsilon(x,t)$ в области $\Omega^\varepsilon \times (0,T)$ состоит из уравнений Стокса, описывающих движение слабосжимаемой вязкой жидкости, в которых кинематическая вязкость жидкости зависит от концентрации примеси:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\tilde{c}^\varepsilon)\nabla \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon + (\alpha_\nu \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon - \tilde{p}^\varepsilon)\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^\varepsilon}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon = 0, \tag{2}$$

и конвективного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{c}^\varepsilon}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon \nabla \tilde{c}^\varepsilon = \alpha_D \, \Delta \tilde{c}^\varepsilon. \tag{3}$$

На границе Γ^ε выполнено однородное условие Дирихле для скорости жидкости

$$\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{4}$$

и однородное условие Неймана для концентрации примеси

$$\frac{\partial \tilde{c^\varepsilon}(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in \Gamma^\varepsilon. \tag{5}$$

Задача замыкается начальными условиями:

$$\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon(x,0) = 0, \quad \tilde{p^\varepsilon}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{6}$$

$$\tilde{c^\varepsilon}(x,0) = c_0(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon. \tag{7}$$

Чтобы говорить о предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, необходимо рассматривать все функции и последовательности в фиксированной области (Ω^ε зависит от ε). Поэтому мы продолжаем все функции из области $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$ в Ω. Скорость $\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon$ и давление $\tilde{p^\varepsilon}$ продолжаются в Ω тривиально – нулем (на границе Γ^ε $\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon = 0$, $\tilde{p^\varepsilon} = 0$). Концентрацию $\tilde{c^\varepsilon}$ можно продолжить, используя известные методы продолжения, но при этом для продолженной функции теряется важное для нас свойство — ограниченность производной $\partial c^\varepsilon/\partial t$ в некотором сопряженном пространстве, необходимое для предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. Поэтому мы поступаем по-другому.

Положим $\mathbf{v}^\varepsilon = \begin{cases} 0, & y \in \Omega^\varepsilon_s, \\ \tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon, & y \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$ Аналогично, $p^\varepsilon = \begin{cases} 0, & y \in \Omega^\varepsilon_s, \\ \tilde{p^\varepsilon}, & y \in \Omega^\varepsilon. \end{cases}$

Пусть $\chi^\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$ — характеристическая функция Ω^ε в Ω, $\chi(\mathbf{y})$ — характеристическая функция Y_f в Y:

$\chi(y) = \begin{cases} 0, & y \in Y_s, \\ 1, & y \in Y_f. \end{cases}$

Введем малый параметр $\lambda > 0$ и рассмотрим вместо (3) уравнение:

$$\frac{\partial c^\varepsilon_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda \nabla c^\varepsilon_\lambda = \operatorname{div}\left((\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon))\,\nabla c^\varepsilon_\lambda\right), \quad x \in \Omega, \tag{3'}$$

а вместо краевого условия (5) — краевое условие

$$\frac{\partial c^\varepsilon_\lambda(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S. \tag{5'}$$

Тогда для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ справедлива следующая

Теорема 1 *Задача (1),(2),(3'),(4),(5'),(6),(7) имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2 + \frac{1}{\alpha_p} p^{\varepsilon\,2}_\lambda)\,dx + \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\nu (div\,\mathbf{v}^\varepsilon_\lambda)^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{v}^\varepsilon_\lambda|^2\right) dx\,dt \leqslant MF^2, \tag{8}$$

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega |c^\varepsilon_\lambda|^2\,dx + \int_{\Omega_T} (\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon))|\nabla c^\varepsilon_\lambda|^2\,dx\,dt \leqslant MF^2, \tag{9}$$

где M – постоянная, не зависящая от ε, λ и $F^2 = \int_{\Omega_T} |\mathbf{F}(x,t)|^2\,dx\,dt$.

Для доказательства мы определяем множество $\mathfrak{M}$ как

$$\mathfrak{M} = \{\bar{c} \in \mathbb{C}(\Omega_T) \quad | \quad 0 \leqslant \bar{c} \leqslant 1\}.$$

Для $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ функция $\mathbf{u}(x,t)$ находится как обобщенное решение задачи:

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha_\mu \mu(\bar{c}) \nabla \mathbf{u} + (\alpha_\nu \operatorname{div} \mathbf{u} - q)\mathbb{I}\right) + \mathbf{F}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad \mathbf{u}(x,0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{12}$$

Решение задачи (10) – (12) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega (\alpha_\tau |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\alpha_p} q^2)\, dx + \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2\right) dx\, dt \leqslant MF^2. \tag{13}$$

Далее вводится нормированное пространство $\mathfrak{N}$ с нормой

$$(\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{N}})^2 = \max_{0<t<T} \int_\Omega \alpha_\tau |\mathbf{u}|^2\, dx + \int_{\Omega_T} \left(\alpha_\nu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \alpha_\mu |\nabla \mathbf{u}|^2\right) dx\, dt.$$

Решение задачи (10) – (12) определяет непрерывный оператор $\mathbb{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ такой, что $\mathbf{u} = \mathbb{A}(\bar{c})$.

Полученное решение сглаживается при помощи следующего оператора:

$$\mathbf{w}_h(x,t) = \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}(x,t)) = \frac{1}{h^4} \int_t^{t+h} d\tau \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) \mathbf{u}(y,\tau)\, dy, \quad \mathbf{w}_h(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_T),$$

где усредняющее ядро $\eta(s) \in \mathbb{C}(R^3)$ – четная неотрицательная функция, $\eta(s) = 0$, если $|s| \geqslant 1$, $\int_{|s|\leqslant 1} \eta(|s|)\, ds = 1$,

и определяется функция $c_h(x,t)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} + \mathbf{w_h} \nabla c_h = \operatorname{div}\left((\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon))\, \nabla c_h\right) \tag{14}$$

$$\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S, \quad c_h(x,0) = \mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)), \quad \text{при } x \in \Omega, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{M_1}^{(h)}(c_0(x)) = \frac{1}{h^3} \int_{R^3} \eta\left(\frac{|x-y|}{h}\right) c_0(y)\, dy.$$

Задача (14) – (15) как задача с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение $c_h(x,t)$, для которого справедлив принцип максимума:

$$0 \leqslant c_h(x,t) \leqslant \max c_0(x) \leqslant 1. \tag{16}$$

Таким образом, для каждой фиксированной функции $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$ существует единственная функция $\bar{c}_h \in \mathfrak{M}$, то есть определен оператор $\mathbb{B} : \quad \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, такой что $c_h = \mathbb{B}(\mathbf{u})$, и этот оператор непрерывен.

Наконец, определяется оператор

$$\mathbf{\Phi}: \quad \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},$$

$$c_h = \mathbf{\Phi}(\bar{c}) = \mathbb{B}\left(\mathbb{A}(\bar{c})\right),$$

который непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов, и более того, по теореме Арцела он вполне непрерывен и отображает выпуклое множество $\mathfrak{M}$ в себя, то есть по теореме Шаудера о неподвижной точке существует хотя бы одна неподвижная точка этого оператора.

Пусть $c_h^* = \mathbf{\Phi}(c_h^*)$ – неподвижная точка оператора $\mathbf{\Phi}$, и пусть $\mathbf{u}_h^* = \mathbb{A}(c_h^*)$. Тогда

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{u}_h^*}{\partial t} = \mathrm{div}\ (\alpha_\mu \mu(c_h^*)\nabla \mathbf{u}_h^* + (\alpha_\nu \mathrm{div}\, \mathbf{u}_h^* - q_h^*)\mathbb{I}) + \mathbf{F}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial q_h^*}{\partial t} + \alpha_p \mathrm{div}\, \mathbf{u}_h^* = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial c_h^*}{\partial t} + \mathbf{M}^{(h)}(\mathbf{u}_h^*) \cdot \nabla c_h^* = \mathrm{div}\left((\chi^\varepsilon \alpha_D + \lambda(1-\chi^\varepsilon))\, \nabla c_h^*\right), \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_h^*(x,t) = 0 \quad \text{при } x \in S, \quad \mathbf{u}_h^*(x,0) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial c_h^*(x,t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ при } x \in S, \quad c_h^*(x,0) = \mathbf{M}^{(h)}(c_0(x)) \quad \text{при } x \in \Omega. \tag{21}$$

Далее выполняется предельный переход при $h \to 0$ и доказывается, что решение $(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon,\, p_\lambda^\varepsilon,\, c_\lambda^\varepsilon)$ исходной задачи (1),(2),(3'),(4),(5') – (7) есть предел при $h \to 0$ решений $(\mathbf{u}_h^*,\, q_h^*,\, c_h^*)$ задачи (17) – (21), которые зависят еще от ε и λ.

Следующий этап — выполнение предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ для фиксированного λ.

Пусть выполнено следующее предположение: при $\varepsilon \to 0$

$$\alpha_\mu \to 0, \quad \alpha_\tau \to 0,$$

$$\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \to \mu_1, \quad 0 < \mu_1 < \infty,$$

$$\alpha_\nu \to \nu_0, \quad 0 < \nu_0 < \infty,$$

$$\alpha_p \to \eta_0, \quad 0 < \eta_0 < \infty,$$

$$\alpha_D \to D_*, \quad 0 < D_* < \infty.$$

Определение 1 *Двухмасштабная сходимость.*

Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$ называется двухмасштабно сходящейся к пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, если для любой гладкой 1-периодической по y функции $\sigma(\mathbf{x}, t, y)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_T} \varphi^\varepsilon(\mathbf{x}, t)\sigma(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon) d\mathbf{x}dt = \int_{\Omega_T} \int_Y \varphi(\mathbf{x}, t, y)\sigma(\mathbf{x}, t, y) dy d\mathbf{x}dt. \tag{1}$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой:

Теорема 2 *(теорема Нгуетсенга)*

1. Из любой ограниченной последовательности в $L_2(\Omega_T)$ можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$.

2. Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по y функция $\varphi(\mathbf{x}, t, y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что $\varphi, \nabla_y\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, а $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_y\varphi$ соответственно.

3. Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$. Тогда существуют функции $\varphi \in L_2(\Omega_T), \psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что ψ 1-периодична по y, $\nabla_y\psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, а $\{\varphi_\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\varphi_\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_x\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla_y\psi(\mathbf{x}, t, y)$ соответственно.

Следствие 1 *Пусть $\sigma \in L_2(Y)$ и $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$ означает $\sigma(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Пусть последовательность $\{\varphi_\varepsilon\} \subset L_3(\Omega_T)$ двухмасштабно сходится к некоторому пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\{\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к $\sigma\varphi$.*

Имеем оценку

$$\int_{\Omega_T} |\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon|^2 \, dx \, dt \leqslant MF^2 \tag{22}$$

Таким образом, из последовательностей $\{\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon\}$, $\{\operatorname{div}(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon)\}$, $\{p_\lambda^\varepsilon\}$ можно извлечь подпоследовательности, слабо сходящиеся в $L_2(\Omega_T)$ и двухмасштабно в $L_2(\Omega_T \times Y)$:

$$\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{v}_\lambda, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon) \to \operatorname{div}\mathbf{v}_\lambda, \quad p_\lambda^\varepsilon \rightharpoonup p_\lambda \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$

$$\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon \to \mathbf{V}_\lambda(x, t, y), \quad p_\lambda^\varepsilon \to P_\lambda \quad \text{двухмасштабно в} \quad L_2(\Omega_T \times Y),$$

$$\mathbf{v}_\lambda = \langle \mathbf{V} \rangle_Y = \int_Y \mathbf{V}(x, t, y) \, dy, \quad p_\lambda = \langle P \rangle_Y.$$

Кроме того, если положить

$$q^\varepsilon = p^\varepsilon + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_p}\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t},$$

то уравнение (1) примет вид

$$\alpha_\tau \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}(\alpha_\mu \mu(c^\varepsilon)\nabla\mathbf{v}^\varepsilon) - \nabla q^\varepsilon + \mathbf{F}, \tag{1'}$$

тогда

$$q^\varepsilon \rightharpoonup q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega_T),$$

$$q^\varepsilon \to Q(x, t, y) = P + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{двухмасштабно в} \quad L_2(\Omega_T \times Y), \quad q_\lambda = \langle Q \rangle_Y.$$

Оценка (9) позволяет из последовательности $\{c_\lambda^\varepsilon\}$ извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся в $\mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Имеем компактное вложение $\mathbb{W}_2^1(\Omega) \subset \mathbb{L}_2(\Omega) \subset (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*$. Обозначим $W = \{v | v \in \mathbb{W}_2^{1,0}(\Omega_T); \partial v/\partial t \in (\mathbb{W}_2^1(\Omega))^*\}$. Очевидно, что $c^\varepsilon \in W$. По теореме о компактности (Лионс) вложение $W \subset \mathbb{L}_2(\Omega_T)$ компактно. Это означает, что

$$c^\varepsilon \to c \ \text{ сильно в } \ \mathbb{L}_2(\Omega_T).$$

Кроме того,

$$\nabla c_\lambda^\varepsilon \to \nabla c_\lambda + \nabla_y C_\lambda(x,y,t) \quad \text{двухмасштабно в} \quad \mathbb{L}_2(\Omega_T \times Y).$$

Теперь выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Уравнения Стокса после усреднения переходят в уравнения фильтрации Дарси:

$$\mathbf{v}_\lambda = \mathbb{B}_\lambda^{(f)}\left(\frac{1}{\mu(c_\lambda)}\left(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F}\right)\right),$$

где

$$\mathbb{B}_\lambda^{(f)} = \langle \sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}^{(\mathbf{i})} \otimes \mathbf{e_i} \rangle_{Y_f}, \tag{23}$$

а $\mathbf{V}^{(\mathbf{i})}$ есть решения краевых задач для уравнений Стокса:

$$\mu_1 \Delta_y \mathbf{V}^{(\mathbf{i})} - \nabla_y R^{(i)} + \mathbf{e_i} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}^{(\mathbf{i})} = 0 \quad in\, Y_f, \quad \mathbf{V}^{(\mathbf{i})}|_\gamma = 0,$$

$$m = \int_Y \chi(y)\, dy.$$

Уравнение диффузии после усреднения принимает вид:

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla c_\lambda = \operatorname{div}(\mathbb{B}_\lambda^{(c)} \nabla c_\lambda),$$

$$\mathbb{B}_\lambda^{(c)} = \langle D_\lambda(y) \rangle_Y \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3} \langle D_\lambda(y) \nabla C^{(i)} \otimes \mathbf{e_i} \rangle_Y, \tag{24}$$

функции $C^{(i)}$ есть решения периодических краевых задач

$$\operatorname{div}_y (D_\lambda(y)(\nabla C^{(i)} + \mathbf{e_i})) = 0, \quad y \in Y,$$

$$D_\lambda(y) = D_* \chi + \lambda(1 - \chi).$$

Матрицы $\mathbb{B}_\lambda^{(f)}$ и $\mathbb{B}_\lambda^{(c)}$ являются симметричными и положительно определенными.

Теорема 3 *Решение* $(\mathbf{v}_\lambda^\varepsilon, p_\lambda^\varepsilon, c_\lambda^\varepsilon)$ *задачи (1) – (7) сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению* $(\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda)$ *усредненной системы:*

$$\mathbf{v}_\lambda = \mathbb{B}_\lambda^{(f)}\left(\frac{1}{\mu(c_\lambda)}\left(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F}\right)\right),$$

$$q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \eta_0 div\, \mathbf{v}_\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}_\lambda \cdot \nabla c_\lambda = div(\mathbb{B}_\lambda^{(c)} \nabla c_\lambda). \tag{25}$$

И, наконец, завершает задачу предельный переход при $\lambda \to 0$.

Теорема 4 *Пусть* $(\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda)$ *есть решение системы (25) для фиксированного* $\lambda > 0$. *Тогда при* $\lambda \to 0$ *функции* $\mathbf{v}_\lambda, p_\lambda, c_\lambda$ *сходятся к решению* $(\mathbf{v}, p, c)$ *усредненной системы:*

$$\mathbf{v} = \mathbb{B}^{(f)}(\frac{1}{\mu(c)}(-\frac{\nabla q}{m} + \mathbf{F})),$$

$$q = p + \frac{\nu_0}{\eta_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \eta_0 div\,\mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = div(\mathbb{B}^{(c)}\nabla c). \tag{26}$$

Литература

1. G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20, 608–623.

2. А.М. Мейрманов. Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах. Сибирский математический журнал, май-июнь 2007, том 48, Но. 3,645 - 667.

3. A. Meirmanov. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media, Euro. Jnl. of Applied Mathematics, Vol. 19 (2008), 259 - 284.

4. С.А. Гриценко. О диффузии и медленной конвекции примеси в слабосжимаемой вязкой жидкости. Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 19-24.

HOMOGENIZED MODELS FOR DIFFUSION AND CONVECTION OF THE ADMIXTURES IN THE ABSOLUTELY RIGID POROUS MEDIUM

Sv.A. Gritsenko, A.M. Meirmanov

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: SGritsenko@bsu.edu.ru,Meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. We consider the problem of the modeling of diffusion and slow convection of the admixtures in the absolutely rigid medium, perforated by a system of pores, filled with slightly compressible viscous liquid. Due to the availability of rapidly oscillating non-smooth coefficients, numerical simulations on a such model are unrealistic. Using the method of homogenization, we obtain the model without of the rapidly oscillating coefficients.

Keywords: Stokes equations, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.

УДК 517.583

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СДВИГОВ ГАУССОВЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. Журавлев[1], Л.А. Минин[1], С.М. Ситник[2]

[1]Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1,394000, г. Воронеж, Россия.
[2]Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, 394065, г. Воронеж, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. Изучается процедура построения функции Лагранжа для интерполяции на равномерной сетке с гауссовыми функциями. Показано, что с ростом дисперсии происходит резкий рост порядка величин и дано объяснение этого на основе свойств тета-функции. Проведено сравнение аналитического и приближённого способов вычисления коэффициентов функции Лагранжа. Получены несколько неравенств для минимумов тета–функции Якоби, которые используются при оценках скорости интерполяции.

Ключевые слова: интерполяция, функции Лагранжа, сдвиги функций Гаусса, тета–функции Якоби.

1 Введение.

В последние годы возрос интерес к интерполяции с помощью гауссовых функций [1]–[5]. Находящаяся на стыке классической теории приближений и современной вычислительной математики, данная тематика постоянно пополняется новыми фактами.

В настоящей статье изучаются вычислительные эффекты интерполяции на равномерной бесконечной одномерной сетке. С помощью компьютерных расчётов установлено, что реализация формул из [1]–[2] приводит к очень большим числам. Ключевым моментом для объяснения этого явилось использование тета-функции Якоби [6]–[7]. Доказаны неравенства для минимумов тета–функций Якоби, кратко проанализирована их точность. Более подробная информация о полученных авторами оценках тета–функций содержится в [10]–[14].

Предложен способ вычисления коэффициентов функции Лагранжа с помощью дискретного преобразования Фурье и приведены таблицы, иллюстрирующую точность проводимых вычислений. Показано, что сдвиг на полшага сетки приводит к дополнительным эффектам, не описанным ранее в литературе.

2 Функция Лагранжа.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена на $\mathbb{R}$. Рассмотрим систему её целочисленных сдвигов $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Требуется по заданной функции $f(x)$ построить интерполирующую функцию $p(x)$,

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot \varphi(x-k),$$

совпадающую с $f(x)$ в целых узлах. Фактически, речь идет о решении линейной системы бесконечного числа уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot \varphi(m-k) = f(m), m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

с бесконечным числом неизвестных p_k .

Опишем общую алгебраическую схему решения данной задачи, следуя [1]–[2], [9]. Так как левая часть (1) представляет собой дискретную свёртку, то удобно перейти к рядам Фурье для следующих функций

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot e^{ikt},$$

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \cdot e^{ikt},$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) \cdot e^{ikt}.$$

Если перемножить последние два ряда, то с учётом (1) получим равенство

$$P(t) \cdot \Phi(t) = F(t).$$

Для строгого обоснования данного преобразования достаточно предположить абсолютную сходимость этих рядов. Таким образом, коэффициенты p_k могут быть найдены с помощью разложения в ряд Фурье функции $F(t)/\Phi(t)$.

Введём также функцию Лагранжа [1],[3]

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi(x-k), \tag{2}$$

$$g(m) = \delta_{0m}, m \in \mathbb{Z}.$$

Здесь δ_{0m} — символ Кронекера. Обозначим отвечающий $g(x)$ ряд Фурье через $G(t)$. Тогда

$$G(t) \cdot \Phi(t) = 1, \tag{3}$$

где

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}.$$

Зная функцию $g(x)$, можно сразу выписать формулы для коэффициентов p_k и интерполирующей функции $p(x)$:

$$p_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m f(k-m), p(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) \cdot g(x-l). \tag{4}$$

Нахождение $G(t)$ из уравнения (3) возможно лишь в том случае, когда $\Phi(t)$ не обращается в ноль. Возможность разложения в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $1/\Phi(t)$ в этом случае гарантируется знаменитой теоремой Винера [8]. Кроме того, требуется указать эффективную вычислительную процедуру разложения в ряд Фурье функции $1/\Phi(t)$ и определить, сколько слагаемых в бесконечных рядах (2), (4) надо брать при вычислениях с требуемой точностью.

3 Случай Гауссовых функций.

Пусть

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

где действительное число $\sigma > 0$ играет роль параметра. Величина σ^2 обычно интерпретируется как дисперсия. Функция $\Phi(t)$ оказывается одной из тета–функций Якоби, а именно

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{ikt} = \vartheta_3\left(\frac{t}{2}, q\right),$$

$$q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Тета–функции Якоби были первоначально определены и изучены им в работе "Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum", опубликованной в 1829 году в Кёнигсберге. Этот город многим связан с историей математики, даже своими мостами (Эйлер!). Здесь Якоби в то время работал вместе с Бесселем, так как жизнь в столичном Берлине была очень дорогой (хотя отец Карла Якоби был обеспеченным человеком, семья потеряла средства во времена европейского финансового кризиса тех лет). Этот трактат содержал новый собственный подход Якоби, при котором теория всех эллиптических функций излагалась на основе введённых им тета–функций. Далее тета–функции были подробнейшим образом изучены им в ряде последующих работ, особенно в 1835–1838 годах. Широкую известность результаты Якоби получили в том числе в результате обработки и дополнений, выполненных его учеником Карлом Борхардом для издания лекций Якоби и собрания его сочинений. Следует отметить, что Якоби практически в одиночку построил основания теории тета–функций, что встречалось в истории математики нечасто; так нами подсчитано, что из более чем сотни формул в соответствующей главе книги Уиттекера и Ватсона [6] только семь принадлежат другим математикам, а все остальные самому Якоби.

Пользуясь произведением Якоби [6]–[7], функцию $\Phi(t)$ можно записать в виде

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right) \cdot \left(1 + 2q^{2k-1}\cos t + q^{4k-2}\right), \tag{5}$$

откуда следует положительность $\Phi(t)$ при всех $-1 < q < 1$.

В работах В. Г. Мазьи, Г. Шмидта [1]–[2] функция Лагранжа построена аналитически. Приведем этот результат ([2], гл. 7, лемма 7.8)

Теорема 1 *Справедлива формула*

$$\frac{1}{\Phi(t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \cdot e^{imt},$$

где

$$g_m = \frac{1}{C(\sigma)} \cdot \exp\left(\frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \sum_{r=|m|}^{\infty} (-1)^r \cdot \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{6}$$

с константой

$$C(\sigma) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2}{2\sigma^2}\right) = \tag{7}$$

$$= \left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \cdot \exp\left(-2\pi^2\sigma^2 \cdot (2r+0.5)^2\right) \tag{8}$$

Заметим, что ряд (7) быстро сходится при малых, а (8) — при больших значениях σ. Равенство этих рядов следует из формулы преобразования Пуассона для тета–функций [6]. При вычислениях по формуле (6) экспоненциальный множитель следует внести под знак суммы, чтобы избежать работы как с очень большими, так и с очень маленькими числами. Коэффициенты g_m образуют знакочередующуюся убывающую по модулю последовательность, причём $g_{-m} = g_m$.

В таблице 1 приведены рассчитанные нами значения этих коэффициентов при разных значениях параметра σ (мы приводим их с тремя верными значащими цифрами).

Таблица 1

Значения некоторых коэффициентов функции Лагранжа.

σ	g_0	g_{25}	g_{200}	g_{625}
1.0	5.29	$-2.90 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10{-}17$	$-1.49 \cdot 10^{-135}$
2.0	$1.53 \cdot 10^{6}$	$-1.26 \cdot 10^{5}$	$3.99 \cdot 10^{-5}$	$-3.38 \cdot 10^{-28}$
3.0	$2.32 \cdot 10^{16}$	$-1.06 \cdot 10^{16}$	$6.73 \cdot 10^{11}$	$-3.75 \cdot 10^{1}$
4.0	$9.76 \cdot 10^{30}$	$-7.34 \cdot 10^{30}$	$3.71 \cdot 10^{28}$	$-6.33 \cdot 10^{22}$
5.0	$9.68 \cdot 10^{49}$	$-8.57 \cdot 10^{49}$	$3.51 \cdot 10^{48}$	$-7.14 \cdot 10^{44}$
6.0	$2.10 \cdot 10^{73}$	$-1.98 \cdot 10^{73}$	$2.58 \cdot 10^{72}$	$-7.09 \cdot 10^{69}$
7.0	$9.60 \cdot 10^{100}$	$-9.29 \cdot 10^{100}$	$2.44 \cdot 10^{100}$	$-3.25 \cdot 10^{98}$

Отсюда сразу видно, что интерполяция с помощью сдвигов гауссовых функций при $\sigma > 2$ с практической точки зрения сомнительна.

Из результатов [3]–[4] следует, что при $\sigma \to +\infty$ функция Лагранжа $g(x)$ стремится к $sinc(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$. А получение значений функции $g(x)$ непосредственно с помощью ряда (2) в случае больших σ (например, $\sigma = 6$ или 7) требует суммирования чрезвычайно большого числа слагаемых, причём промежуточные вычисления надо проводить с высокой точностью. При этом, по–видимому, необходимо задействовать специализированные пакеты вычислений с большим числом десятичных знаков.

4 Оценка минимума тета-функции.

Причина столь резкого роста коэффициентов с увеличением параметра σ проста: положительная функция $\Phi(t)$ начинает принимать очень близкие к нулю значения вблизи своего минимума. Обратимся к представлению Якоби (5). Все множители в произведении положительны, причём выражение $1 + 2q^{2k-1}\cos t + q^{4k-2}$ достигает минимума при $t = \pi$ и максимума при $t = 0$, то есть

$$m(q) = \min_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right) \cdot \left(1 - q^{2k-1}\right)^2,$$

$$M(q) = \max_{t\in[0,2\pi]} \Phi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - q^{2k}\right) \cdot \left(1 + q^{2k-1}\right)^2.$$

В таблице 2 приведены значения этой функции в точках экстремума и двух промежуточных точках. Как видно из таблиц 1 и 2, произведение $g_0 \cdot m(q)$ является величиной порядка 10^{-2} — 10^{-3}.

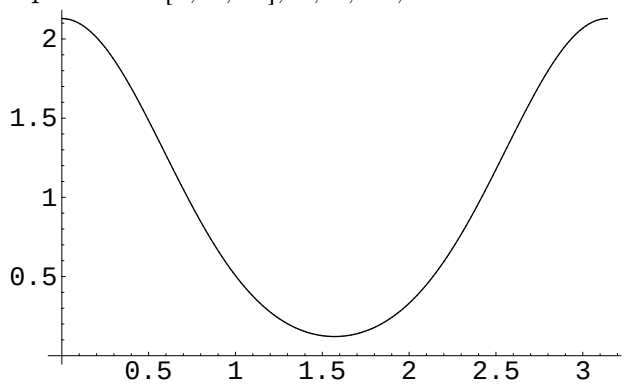
Таблица 2

Значения функции $\Phi(t)$.

σ	$q = \exp(-1/2\sigma^2)$	$M(q) = \Phi(0)$	$\Phi(\pi/6)$	$\Phi(\pi/2)$	$m(q) = \Phi(\pi)$
1.0	0.607	2.51	2.19	$7.30 \cdot 10^{-1}$	$3.61 \cdot 10^{-2}$
2.0	0.883	5.01	2.90	$3.61 \cdot 10^{-2}$	$2.68 \cdot 10^{-8}$
3.0	0.946	7.52	2.19	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$7.74 \cdot 10^{-19}$
4.0	0.969	10.01	1.12	$2.68 \cdot 10^{-8}$	$1.03 \cdot 10^{-33}$
5.0	0.980	12.53	$4.07 \cdot 10^{-1}$	$5.05 \cdot 10^{-13}$	$6.61 \cdot 10^{-53}$
6.0	0.986	15.04	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$7.74 \cdot 10^{-19}$	$2.11 \cdot 10^{-76}$
7.0	0.9899	17.55	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$9.78 \cdot 10^{-26}$	$3.39 \cdot 10^{-104}$

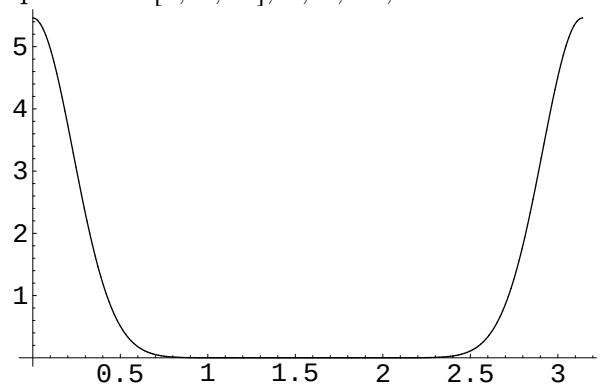
Приведём примерный график тета–функции на периоде. Выбрано значение $q = 0{,}5$. Видно, что тета–функция имеет достаточно пологий участок вблизи своего минимума, при этом величина самого минимума весьма мала. При приближении величины q к единице оба эти свойства графика резко усиливаются. Вот изображение графика при помощи пакета MATHEMATICA, полученное с использованием команды

Plot[EllipticTheta[3, x, .5], x, 0, Pi, PlotPoints -> 10000].



Как было отмечено выше, при приближении величины q к единице график тета–функции становится очень пологим, а величина минимума m принимает весьма малые значения. Вот как изображает график
MATHEMATICA при $q = 0{,}9$ по команде

Plot[EllipticTheta[3, x, .9], x, 0, Pi, PlotPoints -> 10000].



В работах [10]–[14] изучено поведение $m\,(q)$ при $q \to 1-0$. Приведем здесь соответствующие результаты.

Теорема 2 *Для минимального значения тета–функции справедлива оценка*

$$m\,(q) \leqslant (1-q)^{3n}\,\frac{\left((2n)!\right)^2}{2^n n!}, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = t^n$ при значениях $0 \leqslant t \leqslant 1, n \in \mathbb{N}$. Тогда по формуле конечных приращений Лагранжа, применённой к отрезку $[x, 1], 0 \leqslant x \leqslant 1$, получаем неравенство $1 - x^n \leqslant n(1-x)$. Следовательно,

$$m = \min \vartheta_3(z,q) = \vartheta_3(\frac{\pi}{2}, q) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} 2k(1-q)\prod_{k=1}^{n}\left((2k-1)(1-q)\right)^2 =$$
$$= (1-q)^{3n}\,(2n)!![(2n-1)!!]^2 = (1-q)^{3n}\,\frac{\left((2n)!\right)^2}{(2n)!!} = (1-q)^{3n}\,\frac{\left((2n)!\right)^2}{2^n n!}.$$

Теорема доказана.

Посмотрим, насколько точна оценка (9). Если выбрать в (9) значения $q = 0,999, n = 3$, то получаем неравенство

$$m \leqslant 10^{-3\cdot 9}\frac{(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)^2}{8\cdot 6} = 10^{-27}\cdot 10800 \approx 10^{-23},$$

то есть гордиться пока нечем, точность оценки невысокая. Это связано с небольшим числом $n = 3$ рассмотренных сомножителей, более подробный анализ точности полученных

оценок приведён в [10]. На самом деле при $q = 0,999$ правильный выбор — это $n = 500$. В [10] показано, что оптимальным значением n в случае $q = 1 - 10^{-k}$ является $n = \frac{10^k}{2}$.

В качестве второй попытки мы применим неравенство между арифметическим и геометрическим средними. Отметим, что подробное изложение теории средних приведено в [15], а также в работах одного из авторов [16]–[19], в которых разработан метод уточнения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений.

Теорема 3 *Для минимального значения тета-функции справедлива оценка*

$$m\left(q\right) \leqslant \exp\left(-\frac{q^2+2q}{1-q^2}\right) \tag{10}$$

Доказательство. Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим к следующим двум конечным произведениям и просуммируем геометрические прогрессии. Получим:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-q^{2k}}{n}\right)^n = \left(1-\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^n,$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right) \leqslant \left(1-\frac{q(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^n.$$

Отсюда следует, что

$$m(q) = \min\vartheta_3(z,q) = \vartheta_3(\frac{\pi}{2},q) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^n\cdot\left(1-\frac{q(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{2n}.$$

Перейдём в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$. В результате получим нужную оценку

$$m(q) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^n\cdot\left(1-\frac{q(1-q^{2n+2})}{n(1-q^2)}\right)^{2n}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{q^2(1-q^{2n+2})}{1-q^2}+\frac{2q(1-q^{2n+2})}{1-q^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{q^2+2q}{1-q^2}\right).$$

Теорема доказана.

Заметим, что при граничных значениях $q = 0$ и $q = 1$ в применённом неравенстве о средних достигается знак равенства. Следовательно, наши оценки точны вблизи этих значений $q = 0$ и, что особенно важно, при $q = 1$.

Проведём расчёт при том же значении $q = 0,999$, что и для предыдущей оценки. При помощи пакета MAPLE получаем такое значение для оценки (10): $m(0,999) \leqslant 1,2625\cdot 10^{-651}$. Это намного лучше предыдущей оценки (9) при неоптимальном выборе параметров (как показано в [10], при оптимальном выборе эти оценки дают практически одинаковую точность). Мы получили примерно 60% правильной величины порядка, так как вычисления из [10] дают точное значение $m(0,999) \approx 10^{-1069}$.

5 Построение функции Лагранжа с помощью дпф.

Коэффициенты g_m можно посчитать не только аналитически, но и численно, с помощью квадратурных формул. В силу чётности тета–функции речь идёт о применении дискретного преобразования Фурье по косинусам. Выбрав достаточно большое число N (мы проводили расчёты для N =500, 1000, 2000) и соответствующий шаг $h = \frac{\pi}{N}$, вычислим значения $G(t) = \frac{1}{\Phi(t)}$ в узлах сетки $t_k = kh$, $k = 0, 1, ..., N$. Тогда

$$g_m \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{N}\left(\frac{G(t_0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} G(t_k)\cos(mt_k) + \frac{G(t_N)}{2}(-1)^m\right). \tag{11}$$

Если через g_m обозначить коэффициенты функции Лагранжа, рассчитанные по формуле (6), а через $\tilde{g}_m$ — по формуле (11), то относительная погрешность задаётся обычным образом $\delta g_m = \left|\frac{\tilde{g}_m - g_m}{g_m}\right|$. В таблице 3 приведены относительные погрешности для разных значений m и σ . Данные пропущены в тех случаях, когда сами g_m очень малы (см. таблицу 1). Предлагаемый нами способ нахождения коэффициентов функции Лагранжа представляется полезным, поскольку пригоден не только для гауссовых функций, но и других систем целочисленных сдвигов.

Таблица 3

Относительная погрешность определения коэффициентов функции Лагранжа с помощью ДПФ.

σ	$\delta\ g_0$	$\delta\ g_{25}$	$\delta\ g_{200}$	$\delta\ g_{625}$
1.0	$8.19 \cdot 10^{-20}$	$4.56 \cdot 10^{-15}$	$---$	$---$
2.0	$1.26 \cdot 10^{-18}$	$2.08 \cdot 10^{-18}$	$5.91 \cdot 10^{-8}$	$---$
3.0	$5.06 \cdot 10^{-18}$	$5.14 \cdot 10^{-18}$	$8.19 \cdot 10^{-14}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$
4.0	$5.41 \cdot 10^{-18}$	$5.69 \cdot 10^{-18}$	$6.30 \cdot 10^{-16}$	$3.37 \cdot 10^{-9}$
5.0	$5.24 \cdot 10^{-18}$	$5.33 \cdot 10^{-18}$	$4.15 \cdot 10^{-17}$	$2.57 \cdot 10^{-12}$
6.0	$2.12 \cdot 10^{-17}$	$2.15 \cdot 10^{-17}$	$7.04 \cdot 10^{-18}$	$5.85 \cdot 10^{-14}$
7.0	$2.69 \cdot 10^{-17}$	$2.70 \cdot 10^{-17}$	$7.68 \cdot 10^{-17}$	$6.55 \cdot 10^{-13}$

Вычисления проводились на языке Pascal без использования специализированных средств, обеспечивающих повышенную точность. Мы работали с переменными типа extended, дающих 18–19 верных значащих цифр. Причина, по которой нам удалось получить величины из таблицы 1 с точностью, приведённой в таблице 3, состоит в том, что мы использовали преобразование Пуассона тета–функции [6]–[7]

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \cdot e^{ikt} = \sqrt{2\pi}\,\sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t - 2\pi k)^2\right).$$

Первое из равенств применяется при малых σ , второе - при больших. Тот же приём используется и при реализации формулы (7).

6 Интерполяция со сдвигом на полшага.

Вернемся к формуле (2). Рассмотрим случай, когда аргумент функции $\varphi(x)$ сдвинут на полшага. Тогда нахождение коэффициентов g_k сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \varphi\left(x+\frac{1}{2}-k\right)=\delta_{0m}, m\in\mathbb{Z}. \tag{12}$$

Перемножив вспомогательные ряды Фурье

$$G(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}, \Phi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{ikt},$$

придем с помощью (12) к равенству (3). Но теперь функция $\Phi(t)$ уже не будет строго положительной. Дело в том, что

$$\Phi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k+0.5)^2}{2\sigma^2}\right)\cdot e^{ikt}=\vartheta_2\left(\frac{t}{2},q\right)\cdot e^{-i\frac{t}{2}}.$$

Из произведения Якоби [6]

$$\vartheta_2\left(\frac{t}{2},q\right)=2q^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^{2k}\right)\ \left(1+2q^{2k}\cos t+q^{4k}\right)$$

следует, что $\Phi(\pi)=0$. Следовательно, функция $G(t)$, определяемая из равенства $G(t)\cdot\Phi(t)=1$, является неограниченной при $t\to\pi$.

Отметим, что данный эффект имеет место для всех σ . В случае, когда интерполирующая функция $p(x)$ строится для заданной функции $f(x)$, возможно согласованное обращение в 0 левой и правой частей (1), но это усложняет процедуру интерполяции.

Литература

1. V. Maz'ya, G. Schmidt. On approximate approximations using Gaussian kernels. IMA J. Num. Anal. vol.16. 1996. P. 13-29.

2. V. Maz'ya, G. Schmidt. Approximate approximations, AMS Mathematical Surveys and Monographs. vol. 141. 2007. 350 p.

3. S.D. Riemenschneider, N. Sivakumar. Gaussian radial-basis functions: a survey. J. Analysis. vol.8. 2000. P. 157-178.

4. Th. Shclumprecht, N. Sivakumar. On the sapling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian . arXiv:0803.4344v1 [math.CA]. 2008. 29 p.

5. C. Calcaterra, A. Boldt. Approximating with Gaussians . arXiv: 0805.3795v1 [math.CA]. 2008. 17 p.

6. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс Анализа. Часть вторая: трансцендентные функции, М.: ГИФМЛ. 1963. 516 с.

7. Д. Мамфорд. Лекции о тета-функциях, М.: Мир. 1988. 448 с.

8. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа (изд. пятое), М.: Наука. 1981. 544 с.

9. И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. Теория всплесков, М.: Физматлит. 2005. 616 с.

10. Л.А. Минин, С.М. Ситник. О неравенствах для тета–функций Якоби . Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". Спец. выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения И.А. Киприянова. Воронеж. 2009. С. 3-73.

11. Л.А. Минин, С.М. Ситник. Неравенства для третьей тета–функции Якоби . Материалы Всероссийской заочной научно–практической конференции "Современная математика и проблемы математического образования". Орёл: Орловский государственный университет. 2009. С. 61-68.

12. Л.А. Минин, С.М. Ситник. О неравенствах для тета-функций Якоби . Труды участников международной школы–семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо. Ростов-на-Дону: Южный Федеральный университет. 2008. С. 124-126.

13. Е.В. Дикарева, Л.А. Минин, С.М. Ситник. Об оценках минимумов тета–функций Якоби . Материалы Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы Анализа и информатики". Нальчик: КБНЦ РАН. 2009. С. 82-84.

14. Л.А. Минин, С.М. Ситник. Неравенства для третьей тета–функции Якоби. Тезисы докладов международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (АМАДЕ). Минск, Беларусь. 2009. С. 111.

15. К. Джини. Средние величины, М.: Статистика. 1970. 447 с.

16. С.М. Ситник. Уточнения и обобщения классических неравенств, В книге: Исследования по математическому анализу. Серия: Математический Форум. Под ред. Коробейника Ю.Ф., Кусраева А.Г. Владикавказ: ВНЦ РАН. 2009. Т. 3. С. 221–266.

17. С.М. Ситник. Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения. Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". 2005. № 1 (1). С. 3–42.

18. С.М. Ситник. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского. Вестник Самарской государственной экономической академии. 2002. № 1(8). С. 302–313.

19. С.М. Ситник. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского. Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки"2000. № 9. С. 37–45.

ON NUMERICAL ASPECTS OF INTERPOLATING BY SHIFTS OF GAUSSIAN FUNCTIONS.

M.V. Zhuravlev[1], L.A. Minin[1], S.M. Sitnik[2]

[1]Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1, 394000, Voronezh, Russia.
[2] Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
pr. Patriotov, 53, 394065, Voronezh, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. We consider a procedure for finding the Lagrange function for interpolation with uniform nodes by shifts of Gaussian functions. It is proved that a dispersion growth is accompanied by fast coefficients growth. It is explained by use of theta–functions. Analytical and numerical ways of calculating coefficients are compared. We prove some inequalities for minimum of theta–function.

Keywords: interpolation, Lagrange function, shifts of Gaussian functions, Jacobi theta–functions.

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

А.Н. Зарубин, О.В. Лаштабега

Орловский государственный университет,
ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026, Россия, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru,tanda80@yandex.ru

Аннотация. Для уравнения смешанного типа с оператором Лаврен-тьева-Бицадзе, негладкой линией вырождения и запаздыванием в производной рассматривается в несимметричной области аналог задачи Трикоми.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, запаздывание, интегро-дифференциально-разностное уравнение

Уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + sgn(xy)u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \tag{1}$$

$0 < \tau \equiv const$, $H(\xi)$–функция Хевисайда, рассмотрим в несимметричной полубесконечной области $D = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3 \bigcup J_1 \bigcup J_2$, где $D_1 = \{(x,y) : x > 0, -x < y < 0\}$, $D_2 = \{(x,y) : -h/2 < x < 0,\ -x < y < x+h\}$ и $D_3 = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_{3k} = \{(x,y) : x > 0,\ 0 < y < h\}$ – гиперболические и эллиптическая части области D, причем $D_{3k} = \{(x,y) : k\tau < x \le (k+1)\tau,\ 0 < y < h\}$, $0 < h \equiv const$, $J_1 = \{(x,y) : x > 0,\ y = 0\}$, $J_2 = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < h\}$.

Задача Т. *Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \bigcap C^1(D) \bigcap C^2(D \setminus (J_1 \bigcup J_2))$, исчезающее на бесконечности, производные которого $u_x(0,y)$, $u_y(x,0)$ в точке $(0,0)$ ограничены, в точке $(0,h)$ функция $u_x(0,y)$ допускает особенность не выше 1/2 ($u_x(0,y) = o((h-y)^{-1/2})$), а $u_y(x,0)$ исчезает при $x \longrightarrow +\infty$ $\big(u_y(x,0) = o\big(\exp\big(-(1/4+\varepsilon)\big)x\big)\ (0 < \varepsilon \le 1/4)\big)$; удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(x,h) = f(x), \quad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x) = \psi_1(x), \quad x \ge 0 \tag{3}$$

$$u(-y,y) = \psi_2(y), \quad 0 \le y \le h/2; \tag{4}$$

условиям сопряжения

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \omega_1(x); \quad u(-0,y) = u(+0,y) = \omega_2(y), \tag{5}$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu_1(x); \quad u_x(-0,y) = u_x(+0,y) = \nu_2(y), \tag{6}$$

где $f(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j = 1,2)$ – соотвественно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, подлежащие определению.

Теорема 1 *Пусть* $f(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $f(+\infty)=0$, $f(x)=o(x^2)$ *при* $x\to 0$; $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty)=0$ *и* $\psi_i'(t)$, $\psi_i''(t)$ $(i=1,2)$ *принадлежат классу Гельдера внутри соответствующих промежутков, причем* $\psi_i'(t)=o\big(\exp(\gamma t)\big)$ $(\gamma<-1/2)$ *при* $t\to+\infty$; $(h/2-t)^{1/2}\psi_2'(t)\to 0$ *при* $t\to h/2$. *Тогда существует единственное при* $h\le 2\sqrt{2}$ *решение* $u(x,y)$ *задачи T.*

Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

I. Единственность решения задачи T вытекает из ниже следующих утверждений.

Лемма 1 *Если* $u(x,y)$ *– решение уравнения (1) в области* D_3 *из класса* $C(\overline{D}_3)\bigcap C^2(D_3)$, *исчезающее на бесконечности с однородным условием (2) и* $h\le 2\sqrt{2}$, *то*

$$\beta=\int\limits_0^{+\infty}\omega_1(x)\nu_1(x)dx+\int\limits_0^{h}\omega_2(y)\nu_2(y)dy\le 0 \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned}\beta+\iint\limits_{D_3}\Bigg[u_x^2(x,y)\big(1-(h^2-y^2)/8\big)+\Bigg(u_y(x,y)-\\ -\frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^{y}u_x(x-\tau,\xi)d\xi\Bigg)^2\Bigg]dxdy\le 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство получим из тождества

$$u(x,y)Lu(x,y)\equiv\big(u(x,y)u_x(x,y)\big)_x+\big(u(x,y)u_y(x,y)\big)_y-$$

$$-u_x^2(x,y)-u_y^2(x,y)-H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)=0,$$

интегрируя которое по области $D_3^{\varepsilon\rho}=\{(x,y):\varepsilon<x<\rho,\ \ \varepsilon<y<h\}$ $(0<\varepsilon<\rho\equiv const)$, применяя формулу Грина [1] и условия леммы, в пределе при $\rho\to+\infty$, $\varepsilon\to 0$, найдем, в силу (5)—(6), что

$$\beta+\iint\limits_{D_3}\big[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)\big]dxdy=0. \tag{9}$$

Так как, в силу интегрирования по частям и однородности условия (2),

$$\iint\limits_{D_3}H(x-\tau)u(x,y)u_x(x-\tau,y)dxdy=$$

$$=-\iint\limits_{D_3}u_y(x,y)\Bigg(H(x-\tau)\int\limits_0^{y}u_x(x-\tau,\xi)d\xi\Bigg)dxdy,$$

то (9) можно записать в форме

$$\beta + \iint\limits_{D_3} \left[u_x^2(x,y) + \left(u_y(x,y) - \frac{1}{2} H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi) d\xi \right)^2 \right] dxdy =$$

$$= \frac{1}{4} \iint\limits_{D_3} \left(H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi) d\xi \right)^2 dxdy,$$

что, в силу неравенства Коши-Буняковского [2] для интеграла

$$\iint\limits_{D_3} \left(H(x-\tau) \int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi) d\xi \right)^2 dxdy = \iint\limits_{D_3} \left(\int\limits_0^y u_x(x,\xi) d\xi \right)^2 dxdy \leq$$

$$\leq \iint\limits_{D_3} \left(y \int\limits_0^y u_x^2(x,\xi) d\xi \right) dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_3} \left(h^2 - y^2 \right) u_x^2(x,y) dxdy,$$

приводит при $h \leq 2\sqrt{2}$ к утверждениям леммы (7) и (8).

Лемма 2 (3). *Если $u(x,y) \in C(\overline{D}_1) \bigcap C^2(D_1)$ $(u(x,y) \in C(\overline{D}_2) \bigcap C^2(D_2))$ – решение уравнения (1), обращающееся в нуль на характеристике $y = -x$ $(x = -y)$, то $\int\limits_0^{+\infty} \omega_1(x)\nu_1(x)dx \geq 0$ $\left(\int\limits_0^h \omega_2(y)\nu_2(y)dy \geq 0 \right)$.*

Утверждение леммы доказано аналогично [3].

II. Для доказательства **существования** решения задачи T отдельно рассмотрим:
а) в гиперболической области D_1 задачу Коши

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u_x(x-\tau,y) = 0, \quad (x,y) \in D_1, \\ & u(x,0) = \omega_1(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \\ & u_y(x,0) = \nu_1(x), \quad 0 < x < +\infty, \\ & \omega_1'(0) = 0, \quad \omega_1(+\infty) = 0; \end{aligned} \tag{10}$$

б) в гиперболической области D_2 задачу Коши

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_2, \\ & u(0,y) = \omega_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \\ & u_x(0,y) = \nu_2(y), \quad 0 < y < h, \\ & \omega_2'(0) = 0, \quad \omega_2(h) = f(0); \end{aligned} \tag{11}$$

в) в эллиптической области D_3 задачу Неймана-Дирихле

$$\begin{aligned}
&u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)-H(x-\tau)u_x(x-\tau,y)=0,\ \ (x,y)\in D_3,\\
&u_y(x,0)=\nu_1(x),\ \ 0<x<+\infty,\\
&u_x(0,y)=\nu_2(y),\ \ 0<y<h,\\
&u(x,h)=f(x),\ \ 0\le x<+\infty,\\
&\lim_{x\to+\infty}u(x,y)=0,\ \ 0\le y\le h,\\
&f(0)=\omega_2(h),\ \ f(+\infty)=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Исходя из функциональных соотношений между $\omega_j(t)$ и $\nu_j(t)$ $(j=1,2)$, полученных из решений задач Коши (10)—(11) и Неймана-Дирихле (12), в силу соответственно условий (3), (4) и (5), составим полную сингулярную интегральную систему относительно $\nu_j(t)$.

Лемма 4 *Пусть $\omega_1(x)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\nu_1(x)\in C^1(0,+\infty)$, абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$, $\omega_1'(0)=0$, $\omega_1(+\infty)=0$ и $Q_{1k}=\{(x,y):-y<x<(k+1)\tau+y,\ -(k+1)\tau/2<y<0\}$, $k=0,1,2,\ldots$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (10), имеющее вид*

$$u(x,y)=\{u_k(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D}_{1k}=\overline{Q_{1k}\setminus Q_{1(k-1)}}\ \ (k=0,1,2,\ldots)\},\tag{13}$$

если

$$\begin{aligned}
u_k(x,y)=\phi_k(x,y)H(x)+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\
\cdot\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{x-m\tau}\big(x-m\tau\big)\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\phi(\eta,y)d\eta,
\end{aligned}\tag{14}$$

где $\gamma_m=\big(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\big)^{-1}$,

$$\phi(x,y)=\{\phi_k(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D}_{1k}\ \ (k=0,1,2,\ldots)\},\tag{15}$$

а

$$\phi_k(x,y)=\frac{1}{2}\big[z_k^{\omega_1}(x-y)+z_k^{\omega_1}(x+y)\big]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}z^{\nu_1}(\xi)d\xi;\tag{16}$$

$$z^{\omega_1}(x)=\{z_k^{\omega_1}(x),\ \ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ \ (k=0,1,2,\ldots)\},\tag{17}$$

когда

$$\begin{aligned}
z_k^{\omega_1}(x)=\omega_1(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m 2^{m-1}(m-1)!H(x-m\tau)\cdot\\
\cdot\frac{d}{dx}\Big[x^{m-1}(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\omega_1(\xi)d\xi\Big]+\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\
\cdot\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-m\tau}\eta\Big(\int\limits_0^{\eta}\omega_1(\xi)d\xi\Big)\frac{d^m}{d\eta^m}\Big(x^2-\big(\eta+m\tau\big)^2\Big)^{m-1}d\eta,
\end{aligned}\tag{18}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ совпадает с $z^{\omega_1}(x)$ из (17)—(18), если там заменить $\omega_1(x)$ на $\nu_1(x)$.

Доказательство утверждения леммы следует из непосредственно проверяемого [4] общего решения уравнения (10_1) в области D_1 вида (13), если там

$$u_k(x,y) = [g_1(x-y) + g_2(x+y)]H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau)\cdot$$
$$\cdot \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} \big(x-m\tau\big)\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1}\big[g_1(\eta-y)+g_2(\eta+y)\big]d\eta, \tag{19}$$

где $g_i(t)$ $(i=1,2)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на отрезке $[k\tau,(k+1)\tau]$ функциии.

Действительно, в силу (10_2)—(10_3) и

$$g_1(x)+g_2(x) = z^{\omega_1}(x),\ -g_1^{'}(x)+g_2^{'}(x) = z^{\nu_1}(x), \tag{20}$$

из (19) получим интегро-дифференциально-разностное уравнение Вольтерра

$$z_k^{\omega_1}(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau)\frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} \big(x-m\tau\big)\cdot$$
$$\cdot \big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)^{m-1} z^{\omega_1}(\eta)d\eta = \omega_1(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{21}$$

решение [5] которого имеет форму (18), или относительно $z^{\nu_1}(x)$ также уравнение типа (21) с правой частью $\nu_1(x)$.

Функции $g_i(t)$ $(i=1,2)$, найденные из системы (20), на основании (19), приведут к обобщенной формуле Даламбера (13)—(14), которая будет решением задачи Коши (10), единственным в силу построения.

Лемма 5 *Пусть $\omega_2(y) \in C[0,h]\bigcap C^2(0,h)$, $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, абсолютно интегрируемы на $[0,h]$ и $\omega_2^{'}(0)=0$, $\omega_2(h)=f(0)$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (11), имеющее вид*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big[\omega_2(y-x)+\omega_2(x+y)\big] + \frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x} \nu_2(\xi)d\xi,\ \ (x,y)\in \overline{D}_2. \tag{22}$$

Доказательство леммы проводится аналогично лемме 4. Форма (22) решения задачи Коши (11) может быть найдена из (13)—(18) при $k=0$ с учетом данных задачи и области ее решения.

Лемма 6 *Если $\nu_1(x) \in C^1(0,+\infty)$, $f(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$ и $\nu_2(y) \in C^1(0,h)$, абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$ и $[0,h]$ соответственно, причем $f(0)=\omega_2(h)$, $f(+\infty)=0$, $f(x)=o(x^2)$ при $x\to 0$, то существует единственное при $h \le 2\sqrt{2}$ решение задачи Неймана-Дирихле (12) в области D_3, которое имеет вид*

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) =$$
$$= \{u_{1k}(x,y) + u_{2k}(x,y),\ (x,y)\in \overline{D}_{3k}\ (k=0,1,2,...)\}, \tag{23}$$

где

$$u_{1k}(x,y)=\int\limits_0^h \nu_2(t)G_k^-(x,y;\xi,t)\big|_{\xi=0}dt, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} u_{2k}(x,y)=&\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)G_k^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=0}d\xi+\\ &+\int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)G_{kt}^+(x,y;\xi,t)\big|_{t=h}d\xi, \end{aligned} \tag{25}$$

а

$$\begin{aligned} G_k^{\mp}(x,y;\xi,t)=&\overline{G}(x,y;\xi,t)H(x)+\sum_{m=1}^{k}\big(\mp 1\big)^m\gamma_m H(x-m\tau)\cdot\\ &\cdot\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_0^{+\infty}\big(x-m\tau\big)^{(1\mp1)/2}\eta^{(1\pm1)/2}\big((x-m\tau)^2-\eta^2\big)_{\mp}^{m-1}\overline{G}(\eta,y;\xi,t)d\eta, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \overline{G}(x,y;\xi,t)=&\frac{1}{2\pi}\ln\Bigg(\frac{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big)-\cos\big((y-t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x-\xi)\pi/2h\big)+\cos\big((y-t)\pi/2h\big)}\cdot\\ &\cdot\frac{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big)-\cos\big((y+t)\pi/2h\big)}{\operatorname{ch}\big((x+\xi)\pi/2h\big)+\cos\big((y+t)\pi/2h\big)}\Bigg), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\big(\xi^2-\eta^2\big)_-^{\alpha}=\begin{cases}0, & \xi\ge\eta,\\ \big(\eta^2-\xi^2\big)^{\alpha}, & \xi<\eta;\end{cases}\quad \big(\xi^2-\eta^2\big)_+^{\alpha}=\begin{cases}\big(\xi^2-\eta^2\big)^{\alpha}, & \xi>\eta,\\ 0, & \xi\le\eta;\end{cases}$$

причем $z^{\nu_1}(x)$ и $z^f(x)$ определяются равенствами типа (17)—(18), в которых следует заменить $\omega_1(x)$ соответственно на $\nu_1(x)$ и $f(x)$.

Доказательство единственности решения задачи Неймана-Дирихле (12) в области D_3 из класса $C(\overline{D}_3)\bigcap C^2(D_3)$ следует из того, что однородная задача (12) имеет при $h\le 2\sqrt{2}$ тривиальное решение, так как согласно лемме 1, в силу (8),

$$\iint\limits_{D_3}\Bigg[u_x^2(x,y)\big(1-(h^2-y^2)/8\big)+\Bigg(u_y(x,y)-\frac{1}{2}H(x-\tau)\int\limits_0^y u_x(x-\tau,\xi)d\xi\Bigg)^2\Bigg]dxdy=0.$$

Решение задачи Неймана-Дирихле (12) в области D_3 найдено в виде суммы (23) решений двух вспомогательных задач

$$\begin{aligned} &u_{jxx}(x,y)+u_{jyy}(x,y)-H(x-\tau)u_{jx}(x-\tau,y)=0,\\ &u_j(x,h)=(j-1)f(x),\quad 0\le x<+\infty,\\ &u_{jy}(x,0)=(j-1)\nu_1(x),\quad 0<x<+\infty,\\ &u_{jx}(0,y)=(2-j)\nu_2(y),\quad 0<y<h,\\ &\lim_{x\to+\infty}u_j(x,y)=0,\quad 0\le y\le h,\\ &f(0)=\omega_2(h),\quad f(+\infty)=0,\quad (j=1,2). \end{aligned} \tag{28}$$

1. Функция $u_1(x,y) = \{u_{1k}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{3k}\ (k = 0,1,2,...)\}$ получена в форме

$$u_{1k}(x,y) = \sum_{l=0}^{+\infty} R_k(x,\lambda_l)\cos\lambda_l y, \tag{29}$$

где

$$R_k(x,\lambda_l) = -\frac{2}{h\lambda_l} T_k(x,\lambda_l) \int\limits_0^h \nu_2(t)\cos\lambda_l t dt, \tag{30}$$

а

$$\begin{gathered} T_k(x,\lambda_l) = e^{-\lambda_l x} H(x) + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \gamma_m H(x - m\tau)\cdot \\ \cdot \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_{x-m\tau}^{+\infty} \eta\big(\eta^2 - (x - m\tau)^2\big)^{m-1} e^{-\lambda_l \eta} d\eta, \end{gathered} \tag{31}$$

$k\tau \le x \le (k+1)\tau$, является решением [5; 4] уравнения

$$T''(x,\lambda_l) - \lambda_l^2 T(x,\lambda_l) - H(x-\tau)T'(x-\tau,\lambda_l) = 0,$$

удовлетворяющим условиям $T'(0,\lambda_l) = -\lambda_l,\ T(+\infty,\lambda_l) = 0$, причем $\lambda_l = (l + 1/2)\pi/h$.

Подставляя (31), (30) в (29), учитывая [6], что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} e^{-(2n+1)a} = \frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{ch} a + \cos x}{\operatorname{ch} a - \cos x},$$

найдем $u_{1k}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_{3k}$ в форме (24).

2. Решение $u_2(x,y) = \{u_{2k}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{3k}\ (k = 0,1,2,...)\}$ построено в виде

$$u_{2k}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} A_k(x,\lambda)\Pi(y,\lambda)d\lambda, \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered} A_k(x,\lambda) = H(x)\cos\lambda x + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau)\cdot \\ \cdot \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} \big((x - m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1}\big(x - m\tau\big)\cos\lambda\eta d\eta \end{gathered} \tag{33}$$

удовлетворяет [5; 4] уравнению

$$A''(x,\lambda) + \lambda^2 A(x,\lambda) - H(x-\tau)A'(x-\tau,\lambda) = 0,$$

и условию $A'(0,\lambda) = 0$, а

$$\Pi(y,\lambda) = c_1(\lambda)e^{\lambda y} + c_2(\lambda)e^{-\lambda y},\ \ 0 \le y \le h, \tag{34}$$

$c_i(\lambda) \equiv const$ $(i = 1, 2)$, является общим решением уравнения $\Pi''(y, \lambda) - \lambda^2 \Pi(y, \lambda) = 0$.

Подставляя (34), (33) в (32), на основании условий (28_2)—(28_3) $(j = 2)$, получим для определения $c_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$ систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{+\infty} \big(c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\big) A_k(x, \lambda) d\lambda = f(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \\ &\int\limits_0^{+\infty} \lambda\big(c_1(\lambda) - c_2(\lambda)\big) A_k(x, \lambda) d\lambda = \nu_1(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau. \end{aligned} \tag{35}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{+\infty} \big(c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h}\big) \cos \lambda x d\lambda = z_k^f(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \\ &\int\limits_0^{+\infty} \lambda\big(c_1(\lambda) - c_2(\lambda)\big) \cos \lambda x d\lambda = z_k^{\nu_1}(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau. \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда из (35), в силу (33), получим относительно $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ интегро-дифференциально-разностные уравнения Вольтерра типа (21) с правой частью $f(x)$ и $\nu_1(x)$ соответственно, решения [5] которых $z_k^f(x)$ и $z_k^{\nu_1}(x)$ будут иметь вид (18) относительно $f(x)$ и $\nu_1(x)$.

Так как функции $f(x) \in C[0, +\infty) \bigcap C^2(0, +\infty)$, $f(+\infty) = 0$, $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$; $\nu_1(x)$ принадлежит классу Гельдера внутри $(0, +\infty)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, +\infty)$, то, очевидно, в силу (18), этими свойствами обладает $z^f(x)$ и $z^{\nu_1}(x)$.

Поэтому, обратив косинус–преобразования Фурье (36) [7] с правыми частями $z^f(x)$, $z^{\nu_1}(x)$ при $x > 0$, получим систему

$$c_1(\lambda)e^{\lambda h} + c_2(\lambda)e^{-\lambda h} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} z^f(t) \cos \lambda t dt,$$

$$c_1(\lambda) - c_2(\lambda) = \frac{2}{\pi\lambda} \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t) \cos \lambda t dt,$$

из которой

$$c_i(\lambda) = \frac{1}{\pi \operatorname{ch} \lambda h} \int\limits_0^{+\infty} \left[z^f(t) + (-1)^{i+1} \frac{1}{\lambda} e^{(-1)^i \lambda h} z^{\nu_1}(t) \right] \cos \lambda t dt, \quad (i = 1, 2). \tag{37}$$

Подставляя (34), (33), (37) в (32), используя [6] формулы

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} cx} \cos bx dx = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{\cos(a\pi/2c) \operatorname{ch}(b\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/c) + \cos(a\pi/c)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{x \operatorname{ch} cx} \cos bx dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(b\pi/2c) + \sin(a\pi/2c)}{\operatorname{ch}(b\pi/2c) - \sin(a\pi/2c)}, \ \operatorname{Re} c > | \operatorname{Re} a | + | \operatorname{Im} b |,$$

получим $u_{2k}(x, y)$ в виде (25).

III. 1. **Функциональное соотношение** между $\omega_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное на линию $y = 0$, $0 < x < +\infty$ из области D_1, получим, в силу (13)—(18) и (3), из интегро-дифференциально-разностного уравнения Вольтерра

$$\phi_k(x, -x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x - m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x - m\tau) \cdot$$
$$\cdot \left((x - m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \phi(\eta, -x) d\eta = \psi_1(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau,$$

совпадающее с уравненим (21), решение [5] которого имеет форму (18), где следует заменить $\omega_1(x)$ на $\psi_1(x)$, то есть

$$\phi_k(x, -x) = z_k^{\psi_1}(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{38}$$

После подстановки (38) в (16), получим искомое соотношение

$$z_k^{\omega_1}(2x) + z_k^{\omega_1}(0) + \int\limits_{2x}^{0} z^{\nu_1}(\xi) d\xi = 2 z_k^{\psi_1}(x), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau,$$

или

$$z_k^{\omega_1}(x) + z_k^{\omega_1}(0) + \int\limits_{x}^{0} z^{\nu_1}(\xi) d\xi = 2 z_k^{\psi_1}(x/2), \ k\tau \le x \le (k+1)\tau.$$

Значит,

$$z_k^{\nu_1}(x) = \left(z_k^{\omega_1}(x)\right)' - 2\left(z_k^{\psi_1}(x/2)\right)', \ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{39}$$

искомое функциональное соотношение из D_1.

2. Аналогично, из (22), (4) найдем **функциональное** соотношение между $\omega_2(y)$ и $\nu_2(y)$, принесенное на линию $x = 0$, $0 < y < h$ из области D_2:

$$\nu_2(y) = \omega_2'(y) - \psi_2'(y/2), \ \ 0 < y < h. \tag{40}$$

3. **Функциональные** соотношения между $\omega_j(x)$ и $\nu_j(x)$ $(j = 1, 2)$ на линиях $x = 0$, $0 < y < h$ $(j = 2)$; $y = 0$, $0 < x < +\infty$ $(j = 1)$, принесенные из области D_3, найдем из (23)—(27), используя условия сопряжения (5):

$$\omega_2(y) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) \overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{t=0} d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^{h} \nu_2(t) \overline{G}(0, y; \xi, t)\big|_{\xi=0} dt + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) \overline{G}_t(0, y; \xi, t)\big|_{t=h} d\xi, \ \ 0 \le y \le h, \tag{41}$$

$$\omega_1(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) G_k^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=0} d\xi + \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt + \\ + \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) G_{kt}^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau. \tag{42}$$

Пусть

$$R(x) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi) \overline{G}(x,0;\xi,t)\big|_{t=0} d\xi. \tag{43}$$

Тогда, в силу (26), равенство (42) можно записать в форме интегро-диффе-ренциально-разностного уравнения Вольтерра

$$R(x)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_0^{x-m\tau} (x-m\tau)\cdot \\ \cdot\big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} R(\eta) d\eta = \omega_1(x) - \int\limits_0^h \nu_2(t) G_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt - \\ - \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) G_{kt}^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{44}$$

которое совпадает с уравнением (21).

Поэтому, в силу (18), из (44) найдем

$$R(x) = z_k^{\omega_1}(x) - \int\limits_0^h \nu_2(t) \overline{\overline{G}}_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} dt - \\ - \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi) \overline{\overline{G}}_{kt}^+(x,0;\xi,t)\big|_{t=h} d\xi,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{45}$$

где $z_k^{\omega_1}(x)$ совпадает с (17)—(18), а

$$\overline{\overline{G}}_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} = H(x)\overline{G}_k^-(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} - \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau)\cdot$$

$$\cdot \frac{d^m}{dx^m}\Bigg(\int\limits_{(k-m)\tau}^{x-m\tau} (x-m\tau)\big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} \overline{\overline{G}}^-(\eta,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} d\eta +$$

$$+ \sum_{\theta=0}^{k-m-1} \int\limits_{\theta\tau}^{(\theta+1)\tau} (x-m\tau)\big((x-m\tau)^2 - \eta^2\big)^{m-1} \overline{\overline{G}}^-(\eta,0;\xi,t)\big|_{\xi=0} d\eta \Bigg),$$

причем

$$\overline{\overline{G}}^{-}(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0}=\left\{\overline{\overline{G}}_k^{-}(x,0;\xi,t)\big|_{\xi=0},\ k\tau\le x\le(k+1)\tau\ (k=0,1,2,...)\right\}$$

и $\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x,0;\xi,t)\big|_{t=h}$ имеет выше приведенную форму.

На основании (45), (43) равенство (42) примет вид

$$\begin{aligned} z_k^{\omega_1}(x)=&\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(\xi)\overline{G}(x,0;\xi,t)\big|_{t=0}d\xi+\int\limits_0^{h}\nu_2(t)\overline{\overline{G}}_k^{-}(x,0;\xi,t\big|_{\xi=0}dt+\\ &+\int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\overline{\overline{G}}_{kt}^{+}(x,0;\xi,t)\big|_{t=h}d\xi,\ k\tau\le x\le(k+1)\tau. \end{aligned}\tag{46}$$

Выражения (41), (46) – искомые функциональные соотношения из D_3.

IV. Используя условия сопряжения (5)—(6), функциональные соотношения (39), (40) и, после дифференцирования, (41), (46), придем к полной системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} &\nu_2(y)-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{h}\nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt-\\ &-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt=W_1(y),\ 0<y<h, \end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned} &z^{\nu_1}(x)+\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{h}\nu_2(t)\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt+\\ &+\frac{2}{h}\,\mathrm{sh}\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^{\nu_1}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}dt=W_2(x),\ 0<x<+\infty, \end{aligned}\tag{48}$$

где

$$\begin{aligned} &W_1(y)=-\psi_2'(y/2)-\frac{2}{h}\sin\frac{\pi y}{2h}\cdot\\ &\cdot\int\limits_0^{+\infty} z^{f}(t)\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi t/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi t/h)+\cos(\pi y/h)\big)^2}dt, \end{aligned}\tag{49}$$

$$W_2(x)=-F'(x)+\int\limits_0^{+\infty} z^{f}(\xi)\Phi(x,\xi)d\xi+\int\limits_0^{h}\nu_2(t)T(x,t)dt,\tag{50}$$

причем

$$F(x) = \left\{2z_k^{\psi_1}(x),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau,\ (k=0,1,2,...)\right\},$$
$$\Phi(x,\xi) = \left\{\overline{\overline{G}}^{+}_{ktx}(x,0;\xi,h),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k=0,1,2,...)\right\},$$
$$T(x,t) = \left\{\overline{\overline{G}}^{-}_{kx}(x,0;0,t) - \overline{G}_x(x,0;0,t),\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k=0,1,2,...)\right\}.$$

Интеграл в формуле (49) и его производная по y сходятся, так как $z^f(+\infty)=0$, а при $y \to h$, $t \to 0$, в силу условия $z^f(t) = o(t^2)$.

Первый интеграл в (50) и его производная по x также сходятся, что следует из аналогичных предыдущему рассуждений, например, для интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{\overline{G}}^{+}_{0tx}(x,0;\xi,h)d\xi = \int\limits_0^{+\infty} z^f(\xi)\overline{G}_{tx}(x,0;\xi,h)d\xi =$$

$$= \frac{2}{h}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)\big(\operatorname{sh}^2(\pi t/2h) - \operatorname{ch}^2(\pi x/2h)\big)}{\big(\operatorname{ch}(\pi t/h) + \operatorname{ch}(\pi x/h)\big)^2}dt,\ 0 < x < \tau.$$

Сходимость второго интеграла в (50) и производной по x обеспечена абсолютной интегрируемостью $\nu_2(y)$ на $[0,h]$ и гельдеровостью внутри $(0,h)$, которая следует из гельдеровости $\psi_2'(y)$.

Интегралы в формулах (49) $\big((50)\big)$ имеют вторые производные по y (по x) на $(0,h)$ $\big((0,+\infty)\big)$, то есть их первые производные удовлетворяют там условию Липшица.

Значит, функции W_j', как и ψ_j'', удовлетворяют условию Гельдера внутри своих промежутков определения, а $W_j \in H_1$.

Регуляризация системы (47)—(48) в классе функций $\nu_2(y)$, $z^{\nu_1}(x)$, ограниченных в нуле, когда $\nu_2(y) = o\big[(h-y)^{-1/2}\big]$ при $y \to h$ и $z^{\nu_1}(x) = o\big(\exp(-(1/4+\varepsilon)x)\big)$ $(\varepsilon > 0)$ при $x \to +\infty$, проведена аналогично [8]:

$$\begin{aligned}\nu_2(y) = \frac{1}{2}W_1(y) + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}dt - \\ - \frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h) - \cos(\pi y/h)}dt,\ 0 < y < h,\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}z^{\nu_1}(x) = \frac{1}{2}W_2(x) + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h W_1(t)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h) - \operatorname{ch}(\pi x/h)}dt - \\ - \frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} W_2(t)\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi t/2h)}{\operatorname{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\operatorname{sh}(\pi t/h)}{\operatorname{ch}(\pi t/h) - \operatorname{ch}(\pi x/h)}dt,\ 0 < x < +\infty.\end{aligned} \tag{52}$$

Из системы (51)—(52), в силу (49)—(50), получим систему

$$\nu_2(y) + \int\limits_0^h \nu_2(s)B(y,s)ds = A(y),\ 0 < y < h, \tag{53}$$

$$z^{\nu_1}(x) - \int\limits_0^h \nu_2(s)\Theta(x,s)ds = L(x),\ 0 < x < +\infty, \tag{54}$$

где

$$B(y,s) = \frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty} T(t,s)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt,$$

$$\begin{aligned}
A(y) = &-\frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt+\\
&+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}dt-\\
&-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\Bigg\{\sin\frac{\pi y}{2h}\cdot\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi y/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi y/h)\big)^2}+\\
&+\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\sin\frac{\pi t}{2h}\cdot\\
&\cdot\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h)-\cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h)+\cos(\pi t/h)\big)^2}dt+\\
&+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\cos(\pi y/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\cos(\pi y/h)}\Phi(t,s)dt\Bigg\}ds;
\end{aligned}$$

$$\Theta(x,s) = \frac{1}{4h}T(x,s) - \frac{1}{4h^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h)-\mathrm{ch}(\pi x/h)}T(t,s)dt,$$

$$L(x) = -\frac{1}{2}F'(x) - \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h) - \mathrm{ch}(\pi x/h)}dt +$$

$$+\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} F'(t)\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h) - \mathrm{ch}(\pi x/h)}dt + \frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty} z^f(s)\Big\{\Phi(x,s) -$$

$$-\frac{2}{h}\int\limits_0^h\left(\frac{\cos(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\sin(\pi t/h)}{\cos(\pi t/h) - \mathrm{ch}(\pi x/h)}\sin\frac{\pi t}{2h}\cdot\frac{\mathrm{ch}(\pi s/2h)\big(\mathrm{sh}^2(\pi s/2h) - \cos^2(\pi t/2h)\big)}{\big(\mathrm{ch}(\pi s/h) + \cos(\pi t/h)\big)^2}dt -$$

$$-\frac{1}{h}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2h)}{\mathrm{ch}(\pi x/2h)}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{sh}(\pi t/h)}{\mathrm{ch}(\pi t/h) - \mathrm{ch}(\pi x/h)}\Phi(t,s)dt\Big\}ds.$$

Функции $A(y)$, $A'(y)$, $L(x)$, $L'(x)$ принадлежат классу Гельдера; $A(x), L(x) \to 0$ при $x \to 0$; $L(x) = o(\exp(\gamma x))$, $\gamma < -1/2$ при $x \to +\infty$; $\big(h/2 - y\big)^{1/2}A(y) \to 0$ при $y \to h/2$.

Ядра $B(x,t)$, $\Theta(x,t)$ непрерывно дифференцируемы в областях определения, ограничены в точке $(0,0)$, допускают обращение в ∞ порядка не выше $1/2$ вблизи $(0,h)$, а вблизи $(+\infty, 0)$ исчезают.

Система (53)—(54) является системой уравнений Фредгольма, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения задачи Т.

Литература

1. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу, М.: Высшая школа. 1999. 695 с.

2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа, Ч.1. М.: Наука. 1982. 616 с.

3. Ф.И. Франкль. Избранные труды по газовой динамике, М.: Наука. 1973. 712 с.

4. А.Н. Зарубин. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом, Орел: ОГУ. 1999. 225 с.

5. А.Н. Зарубин. Интегро-дифференциально-разностные уравнения Вольтерра и интегральные преобразования // Труды Всероссийской научно-практической конференции "Современная математика и проблемы математического образования". Орел. 2009.

6. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Элементарные функции, М: Наука. 1981. 799 с.

7. В.П. Диткин, А.П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление, М: Наука. 1974. 544 с.

8. О.И. Маричев. Об уравнении смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. № 6. 1969. С. 74-80.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS OF MIXED TYPE WITH INTERSECTING LINES OF DEGENERACY

A.N. Zarubin, O.V. Lashtabega

Orel State University,

Komsomolskaya str., 95, Orel, 302026, Russia, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru,tanda80@yandex.ru

Abstract. For mixed-type equation with the operator of the Lavrent'ev-Bitsadze, nonsmooth line of degeneracy and zapazdyvaenim in the derivative is considered in asymmetric analogue of the Tricomi.

Keywords: equation of mixed type, delay, integro-differential-difference equation.

УДК 517.9

ЗАДАЧА РИМАНА - ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

А.П. Солдатов, О.В. Чернова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru,vaschenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Для эллиптической системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + a\phi + b\overline{\phi} = f_2$$

в области D на плоскости с гладкой границей Γ рассматривается задача Римана-Гильберта

$$\mathrm{Re}\ G\phi^+|_\Gamma = f_1,$$

где определитель $l \times l-$ матрицы— функции G всюду отличен от нуля. В работе установлено, что в классе

$$C^\mu_J(\overline{D}) = \{\phi \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D) | L\phi \in C^\mu(\overline{D})\}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}$$

эта задача фредгольмова и ее индекс

$$æ = -æ_0 + l, \quad æ_0 = \frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_\Gamma.$$

Ключевые слова: эллиптические системы, задача Римана-Гильберта, фредгольмов оператор.

Пусть область D на плоскости $\mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$. Последнее означает, что производная гладкой параметризации кривой принадлежит $C^{\mu+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. В области D рассмотрим эллиптическую систему

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + a\phi + b\overline{\phi} = f_2, \tag{1}$$

где собственные значения постоянной матрицы $J \in C^{l\times l}$ лежат в верхней полу- плоскости, а $l\times l-$матричные коэффициенты $a, b \in C^\mu(\overline{D})$. Не ограничивая общности, матрицу J здесь можно считать треугольной. Решения этой системы представляют $l-$вектор-функции $\phi = (\phi_1 \dots \phi_l)$, они ищутся в классе

$$C^\mu_J(\overline{D}) = \{\phi \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D) | L\phi \in C^\mu(\overline{D})\}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}.$$

Для данной эллиптической системы рассмотрим задачу Римана—Гильберта

$$\mathrm{Re} G\phi^+|_\Gamma = f_1, \tag{2}$$

где $l \times l-$ матрица- функция $G \in C^{\mu+0}$ и ее определитель всюду отличен от нуля.

Исходя из матричного обозначения $z_J = x \cdot 1 + y \cdot J$, для $z = x + iy \in \mathbb{C}$, введем интегральный оператор типа Коши

$$(I_1\varphi_1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t), \quad z \in D$$

и сингулярный оператор Коши

$$(S_J\varphi_1)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi_1(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3}$$

где $\varphi_1 \in C^\mu(\Gamma)-$ вещественная $l-$вектор-функция. Согласно [1] интегральный оператор I_1 ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C_J^\mu(\overline{D})$ и справедлива формула Сохоцкого-Племеля

$$2(I_1\varphi_1)^+(t_0) = \varphi_1(t_0) + (S_J\varphi_1)(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \tag{4}$$

Пусть $\overline{D}$ содержится в круге $|z| < R$, рассмотрим линейный ограниченный оператор продолжения $P : C^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\mathbb{C})$, для которого $(P\varphi)(z) = 0$ при $|z| \geq R$ и $(P\varphi)(z) = \varphi(z)$ при $z \in D$. С помощью этого оператора продолжения введем интегральный оператор по области

$$(I_2\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} (t-z)_J^{-1}(P\varphi)(t) dt_1 dt_2,$$

определенный для комплексных $l-$вектор-функций $\varphi \in C^\mu(\overline{D})$.

Согласно [2] оператор I_2 ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$ и справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)(I_2\varphi) = \varphi. \tag{5}$$

В частности, оператор I_2 компактен в пространстве $C^\mu(\overline{D})$. Из этих же соображений следует, что пространство C_J^μ относительно нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_{C^\mu} + |L\varphi|_{C^\mu}$$

банахово.

Обратимся к сформулированной задаче Римана—Гильберта.

Лемма 1. *Задача (1)—(2) в классе $C_J^\mu(\overline{D})$ эквивалентным образом редуцируется к следующей системе сингулярных интегральных уравнений*

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}(GI_2\varphi_2)(t_0) + 2\mathrm{Re}[G(\varphi_1 + S_J\varphi_1)](t_0) - 2\mathrm{Im}G(t_0)\xi = 2f_1(t_0), \ t_0 \in \Gamma, \\ \varphi_2(z) + [aI_2\varphi_2 + b\overline{I_2\varphi_2}](z) + [aI_1\varphi_1 + b\overline{I_1\varphi_1}](z) + i(a-b)\xi = f_2(z), \ z \in D, \end{gathered} \tag{6}$$

относительно некоторой вещественной $l-$вектор-функции $\varphi_1 \in C^\mu(\Gamma)$, комплексной $l-$вектор-функции $\varphi_2 \in C^\mu(\overline{D})$ и постоянного вектора $\xi \in \mathbb{R}^l$.

Доказательство основывается на теореме представления 2 из [2]. Напомним, что по предположению матрица J треугольна, так что условия этой теоремы выполнены. Таким образом, любая функция $\phi \in C_J^\mu$ единственным образом представима в виде

$$\phi = I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 + i\xi, \quad z \in D.$$

Подставляя это интегральное представление в (1)—(2) и пользуясь формулами (4) и (5), после элементарных преобразований приходим к системе (6).

Система (6) может быть записана в терминах классического сингулярного оператора Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi(t)(t-t_0)^{-1}dt, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{7}$$

В основе лежит следующий критерий компактности интегрального оператора вида

$$(K\varphi)(t_0) = \int_\Gamma \frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть* Γ *гладкий контур,* $k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma)$, $0<\nu<1$, *и* $k(t,t)\equiv 0$. *Тогда для* $\varphi \in C(\Gamma)$ *оператор (8) принадлежит классу* $C^\mu(\Gamma), 0<\mu<\nu$, *и справедлива оценка*

$$|K|_\mu \le C|\varphi|_0|k|_\nu,$$

где постоянная $C>0$ *зависит только от* μ, ν *и* Γ.

Здесь и ниже $|\varphi|_\alpha$, $0<\alpha<1$, означает норму в C^α, а $|\varphi|_0$ есть $\sup-$ норма.

Доказательство. Существует такое $\rho>0$ (стандартный радиус контура), что для любой точки $a\in\Gamma$ и $0<\delta<\rho$ множество $\Gamma\cap\{|t-a|\le\delta\}$ является гладкой дугой. При этом справедливы оценки

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{|t-a|\le\delta\}} |t-a|^{\alpha-1}ds_t \le M\delta^\alpha, \quad 0<\alpha<1, \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{|t-a|\ge\delta\}} |t-a|^{\alpha-2}ds_t \le M\begin{cases} \delta^{\alpha-1}, & 0<\alpha<1,\\ \ln\frac{\rho}{\delta}, & \alpha=1,\end{cases} \tag{10}$$

где постоянная $M>0$ зависит только от Γ и α.

В частности,

$$|\psi(t_0)| \le |k|_\nu|\varphi|_0\int_\Gamma |t-t_0|^{\nu-1}ds_t \le C_0|k|_\nu|\varphi|_0. \tag{11}$$

Зафиксируем точки $t_1,t_2\in\Gamma$ и пусть $\delta=|t_1-t_2|\le\rho/3$. Запишем

$$\psi(t_1)-\psi(t_2) = \int_\Gamma\left[\frac{k(t_1,t)}{t-t_1}-\frac{k(t_2,t)}{t-t_2}\right]\varphi(t)ds_t = \Delta_1+\Delta_2,$$

где Δ_1 и Δ_2 означают интегралы по, соответственно, $\Gamma_1=\Gamma\cap\{|t-t_1|\le 2\delta\}$ и $\Gamma_2=\Gamma\cap\{|t-t_1|\ge 2\delta\}$ Очевидно,

$$|\Delta_1| \le |k|_\nu|\varphi|_0\int_{\Gamma_1}[|t-t_1|^{\nu-1}+|t-t_2|^{\nu-1}]ds_t.$$

Поскольку $|t-t_1|\le 2\delta$ влечет $|t-t_2|\le 3\delta$, на основании (9) имеем:

$$|\Delta_1| \le M[(2\delta)^\nu+(3\delta)^\nu]|k|_\nu|\varphi|_0.$$

Что касается Δ_2, то запишем

$$\Delta_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{k(t_1,t)-k(t_2,t)}{t-t_1}\varphi(t)ds_t + \int_{\Gamma_2} \frac{(t_1-t_2)k(t_2,t)}{(t-t_1)(t-t_2)}\varphi(t)ds_t$$

Тогда

$$|\Delta_2| \le |k|_\nu |\varphi|_0 \Bigg[\delta^\nu \int_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1} ds_t + \delta \int_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1}|t-t_2|^{\nu-1} ds_t$$

Поскольку $|t-t_1| \ge 2\delta$ влечет $|t-t_2| \ge |t-t_1| - \delta \ge |t-t_1| - |t-t_1|/2$, к выражению в квадратных скобках можем применить оценку (10). Тогда

$$|\Delta_2| \le |k|_\nu |\varphi|_0 M[\delta^\nu \ln\frac{\rho}{\delta} + 2^{1-\nu}\delta^\nu]$$

Объединяя обе оценки для Δ_1 и Δ_2, в результате получим:

$$\frac{|\psi(t_1)-\psi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu} \le C_1 |k|_\nu |\varphi|_0, \quad |t_1-t_2| \le \frac{\rho}{3},$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$. Если $|t_1-t_2| \ge \rho/3$, то, очевидно, с учетом (11)

$$\frac{|\psi(t_1)-\psi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu} \le 2\left(\frac{3}{\rho}\right)^\nu C_0 |k|_\nu |\varphi|_0.$$

Тем самым необходимая оценка теоремы установлена.

Из теоремы 1 следует, что для функций $k \in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$ со свойством $k(t,t)=0$ оператор $K\varphi$, определяемый правой частью (8), ограничен $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$ и, значит, компактен в $C^\mu(\Gamma)$. Класс таких операторов обозначим $\mathcal{K}_0(C^\mu)$.

Лемма 2. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\mu+0}$, сингулярные операторы S_J и S определяются (3) и (7) соответственно. Тогда операторы*

$$S_J - S, \ -S_{\overline{J}} + S \in \mathcal{K}_0(C^\mu). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\Gamma \in C^{1,\nu}$ с некоторым $\nu > \mu$, $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ - единичный касательный вектор к Γ в точке t, рассматриваемый в соответствии с выбранной ориентацией контура. Поскольку $dt = e(t)|dt|$ и $dt_J = e_J(t)|dt|$, оператор $K = S_J - S$ можно записать в форме (8) по отношению к

$$\frac{k(t_0,t)}{t-t_0} = (t-t_0)_J^{-1} e_J(t) - (t-t_0)^{-1} e(t),$$

т.е. с функцией $k(t_0,t) = (t-t_0)(t-t_0)_J^{-1} e_J(t) - e(t)$. Необходимо убедиться, что

$$k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma), \quad k(t,t) \equiv 0.$$

Очевидно, этот факт достаточно показать по отношению к любой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим гладкую параметризацию $\gamma: \ [0,1] \to \Gamma$ класса $C^{1,\nu}[0,1]$ и положим $t = \gamma(s), \ t_0 = \gamma(s_0), \ 0 \le s \le 1$. Тогда

$$k[\gamma(s_0),\gamma(s)] = [\gamma(s)-\gamma(s_0)][\gamma(s)-\gamma(s_0)]_J^{-1}[\gamma'(s)]_J - \gamma'(s).$$

Пусть для краткости $\widetilde{k}(s_0,s)=k[\gamma(s_0),\gamma(s)]$ и

$$q(s_0,s)=\frac{\gamma(s)-\gamma(s_0)}{s-s_0}=\int_0^1\gamma'(rs+(1-r)s_0)dr.$$

Поскольку $\gamma'\in C^\nu[0,1]$, функция $q(s_0,s)\in C^\nu[0,1]\times[0,1]$ и $q(s,s)=\gamma'(s)$. В этих обозначениях

$$\widetilde{k}(s_0,s)=q(s_0,s)q_J^{-1}(s_0,s)[\gamma'(s)]_J-\gamma'(s).$$

Так как $|q(s_0,s)|\neq 0$ для $0\leqslant s_0,s\leqslant 1$, матрица—функция $q_J^{-1}(s_0,s)\in C^\nu([0,1]\times[0,1])$. Таким образом, принадлежность $\widetilde{k}(s_0,s)$ классу C^ν очевидна. Равенство нулю функции $\widetilde{k}(s_0,s)$ при $s=s_0$ следует непосредственно из ее определения.

Поскольку предыдущие рассуждения справедливы для любой матрицы J, собственные значения которой не вещественны, они проходят и по отношению к оператору $S_{\overline{J}}$ в (12).

Теорема 1 и леммы 1,2 приводят теперь к следующему основному результату.

Теорема 2. *Задача (1)—(2) фредгольмова в классе $C^\mu_J(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой*

$$æ=-æ_0+l,\quad æ_0=\frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_\Gamma, \tag{13}$$

где приращение непрерывной ветви аргумента берется в направлении, оставляющем область D слева.

Доказательство. Систему (6) можно переписать в следующей операторной форме:

$$\begin{gathered}(K_{11}\varphi_1)(t_0)+(K_{12}\varphi_2)(t_0)+C_1(t_0)\xi=f_1(t_0),\ t_0\in\Gamma,\\ (K_{21}\varphi_1)(z)+\varphi_2(z)(1+K_{22})+C_2(z)\xi=f_2(z),\ z\in D.\end{gathered} \tag{14}$$

В силу того,что функция φ_1 вещественна, $2\mathrm{Re}[GS_J\varphi_1]=GS_J\varphi_1-GS_{\overline{J}}\varphi_1$, для оператора K_{11} получим выражение

$$(K_{11}\varphi_1)(t_0)=[G(\varphi_1+S_J\varphi_1)+\overline{G}(\varphi_1-S_{\overline{J}}\varphi_1)](t_0).$$

Операторы $K_{12},\ K_{21},\ K_{22}$ и функции C_1,C_2 здесь определяются равенствами

$$(K_{12}\varphi_2)(t_0)=2\mathrm{Re}(GI_2\varphi_2)(t_0),$$

$$(K_{21}\varphi_1)(z)=(aI_1\varphi_1+b\overline{I_1\varphi_1})(z),\quad (K_{22}\varphi_2)(z)=(aI_2\varphi_2(t)+b\overline{I_2\varphi_2(t)})(z),$$
$$C_1(t_0)=-2\mathrm{Im}G(t_0),\quad C_2(z)=i(a-b)(z)$$

Оператор системы (14) действует $C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})\times\mathbb{R}^l\to C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})$, где нижний индекс $\mathbb{R}$ указывает на то, что элементы соответствующего пространства являются вещественными вектор-функциями. Саму систему можно записать в краткой форме $N\varphi+C\xi=f$ с операторными матрицами

$$N=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & 1+K_{22}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}.$$

Оператор K_{11} здесь естественным образом продолжается на комплексные вектор-функции по правилу $\overline{K_{11}\varphi_1}=K_{11}\overline{\varphi_1}$.

Поэтому оператор данной системы можно рассматривать в пространствах комплексных векторов, при этом его свойство фредгольмовости и индекс останутся неизменными (если размерности понимать над соответствующими полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). Таким образом, достаточно убедится,что оператор N фредгольмов в пространстве $C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\overline{D})$ комплексных вектор-функций и его индекс дается первым слагаемым $æ_0$ формулы (13).

Ясно, что операторы K_{22} и K_{12} компактны, соответственно, в пространствах $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\overline{D})$ и $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}(\Gamma)$. На основании леммы 2 можем записать $K_{11} = G(1+S) + \overline{G}(1-S) + GK_1 + \overline{G}K_2$, где операторы $K_j \in \mathcal{K}_0(C^{\mu})$.

Таким образом, с точностью до компактного слагаемого оператор N совпадает с

$$N_0 = \begin{pmatrix} G(1+S) + \overline{G}(1-S) & 0 \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Фигурирующую здесь матрицу можно представить в виде произведения

$$\begin{pmatrix} G(1+S) + \overline{G}(1-S) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно классической теории сингулярных уравнений [3] оператор, определяемый первым сомножителем фредгольмов и его индекс равен $-æ_0$. Что касается оператора, отвечающего второму сомножителю, то он, очевидно, обратим.

Таким образом, на основании известных свойств [4] фредгольмовых операторов оператор N фредгольмов и его индекс равен $-æ_0$, что завершает доказательство теоремы.

Литература

1. А.П. Солдатов. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I.Гладкий случай. // Изв. АН СССР"(сер.матем.) 1991. Т.55, No.5.С.1070-1100.

2. О.В. Ващенко. Интегральное представление решений эллиптических систем первого порядка в классах Гельдера. // Материалы III Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик-Эльбрус. 2005.-С.11-14.

3. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд., М., Наука, 1968.

4. Р. Пале. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.-М.:Мир, 1970.

THE RIEMANN-HILBERT PROBLEM FOR ELLIPTIC SYSTEM OF THE FIRST ORDER ON THE PLAIN IN HOLDER CLASSES

A.P. Soldatov, O.V. Chernova

Belgorod State University,

Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Soldatov@bsu.edu.ru,vaschenko@bsu.edu.ru

Abstract. The Riemann-Hilbert problem

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi + a\phi + b\overline{\phi} = f_2$$

is considered in domain D which is bounded by smooth contour Γ, where $\det G(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$. It is proved that this problem is Fredholm solvable in the class

$$C_J^{\mu}(\overline{D}) = \{\phi \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D) | L\phi \in C^{\mu}(\overline{D})\}, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}$$

end it's index

$$æ = -æ_0 + l, \quad æ_0 = \frac{1}{\pi}(\arg\det G)\big|_{\Gamma}.$$

Keywords: elliptic systems, Riemann-Hilbert problem, Fredholm operator.

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ - НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА - БИЦАДЗЕ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

С.Л. Хасанова

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой,
ул. Николаева, 10, Стерлитамак, 453118, Россия, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Аннотация. В работе при помощи системы собственных функций построено в виде ряда решение специальной задачи для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе. Изучен также пространственный аналог задачи в цилиндрической области.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение смешанного типа, характеристики, собственные числа, собственные функции, ряд по собственным функциям.

1 Задача Трикоми - Неймана для уравнения Лаврентьева - Бицадзе

Рассмотрим уравнение

$$Bu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области D, когда область D_+ есть сектор единичного радиуса с центром в начале координат: $0 < \varphi < \varphi_0 \leq \pi,\ 0 < r < 1$.

Задача Трикоми - Неймана (задача TN). *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap \mathrm{C}^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Bu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{5}$$

$$\left.u\right|_{AC} = 0,$$

где f - заданная достаточно гладкая функция.

Решая задачу Дарбу для уравнения (1) в области D_- с условиями:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2], \tag{6}$$

можно получить соотношение на отрезке AB оси $y = 0$:

$$u_x(x, 0) - u_y(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \tag{7}$$

Теперь решим в области D_+ следующую смешанную задачу для уравнения Лапласа: найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2) - (5) и (7). Переходя к полярным координатам (r,φ) и разделяя переменные $u(x,y)=v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, получим:

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-\frac{\mu^2}{r^2}R(r)=0,\ 0<r<1, \tag{8}$$

$$R(0)=0, \tag{9}$$

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\ \ 0<\varphi<\varphi_0, \tag{10}$$

$$\Phi^{'}(\varphi_0)=0, \tag{11}$$

$$R'(x)\Phi(0)-\frac{R(x)}{x}\Phi'(0)=0,\ 0<x<1, \tag{12}$$

где $\mu\neq 0$ - постоянная разделения.

Решением уравнения (8), удовлетворяющего условию (9), является функция

$$R(r)=r^{\mu},\ \mu>0. \tag{13}$$

Подставляя функцию (13) в условие (12), получим

$$\mu\Phi(0)-\Phi'(0)=0. \tag{14}$$

Решая краевую задачу (10), (11), (14), найдем

$$\Phi_n(\varphi)=C_n\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right),$$

где μ_n - определяется по формуле

$$\mu_n=\frac{\pi}{\varphi_0}\left(n-\frac{3}{4}\right)\ ,n=1,2,\dots\ . \tag{15}$$

Следовательно, функции вида

$$v_n(r,\varphi)=C_nr^{\mu_n}\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$$

удовлетворяют в области D_+ условиям (2) - (4) и (7). Решение задачи (2) - (5) и (7) в области D_+ будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y)=v(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nr^{\mu_n}\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right). \tag{16}$$

При любом $r\leq r_0<1$ ряд (16) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз, за исключением точки $(0,0)$.

Предположим, что ряд (16) допускает почленное дифференцирование по переменной r на множестве $0<r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq\varphi_0$. Удовлетворяя ряд (16) граничному условию (5), получим

$$f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_nf_n\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right),\ 0\leq\varphi\leq\varphi_0. \tag{17}$$

В ряде (17) произведем замену $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{\pi}\theta$. Тогда полагая $f(\varphi) = f(\varphi_0\theta/\pi) = g(\theta)$, получим

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin\left(\lambda_n\theta + \frac{\pi}{4}\right),\ 0 \le \theta \le \pi,\ \lambda_n = n - \frac{3}{4}. \tag{18}$$

Если функция $g(\theta) \in C^{\alpha}[0,\pi],\ \alpha \in (0,1]$, то в силу результатов работы [3] ряд (18) сходится равномерно на $[0,\pi]$. Тогда ряд (17) также сходится равномерно на $[0,\varphi_0]$. Таким образом, сумма ряда (16) непрерывна на $\overline{D}_+$ и на множестве $0 < r \le 1$ допускает почленное дифференцирование по переменной r. Коэффициенты ряда f_n определяются по формуле

$$f_n = \frac{1}{\mu_n}\int_0^{\pi} g(\theta)h_n(\theta)d\theta = \frac{1}{n-3/4}\int_0^{\varphi_0} f(\varphi)h_n(\pi\frac{\varphi}{\varphi_0})d\varphi,\quad n = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

где $h_k(\varphi)$ - биортогональная система относительно системы синусов $\sin(\lambda_n\theta + \pi/4),\ n = 1, 2, \dots$, и она имеет вид [3]

$$h_k(\theta) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos\theta/2)^{-1}}{(tg\theta/2)^{1/2}}\sum_{n=1}^{k}(\sin n\theta)\mathrm{B}_{r-n}, \tag{20}$$

$$\mathrm{B}_l = \sum_{m=0}^{l} C_{1/2}^{l-m}C_{1/2}^{m}(-1)^{l-m},\ B_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Таким образом, сумма ряда (16) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_+$, на $\overline{D}_+$ допускает почленное дифференцирование по r и φ, за исключением точки $r = 0$ и на множестве $D_+ \cup AB$ имеет производные по r и φ любое число раз. Полагая в (16) $\varphi = 0$, найдем

$$v(r,\varphi)\Big|_{\varphi=0} = u(x,0) = \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{\mu_n}, \tag{21}$$

которая принадлежит классу $C[0,1] \cup C^{\infty}(0,1)$. В области D_- решение задачи TN определяется как решение задачи Дарбу для уравнения (1) с данными (6), функция $\tau(x)$ определена формулой (21). Это решение имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x+y)^{\mu_n},\quad (x,y) \in D_-. \tag{22}$$

Поскольку в $\overline{D}_-$ $0 \leqslant x + y \leqslant 1$, то ряд (22) в $\overline{D}_-$ сходится равномерно и на множестве $D_- \cup AB$ допускает почленное дифференцирование по x и y любое число раз.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1 *Если $f(\varphi) \in C^{\alpha}[0,\varphi_0],\ \alpha \in (0,1]$, то существует единственное решение задачи TN и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\mu_n}\sin(\mu_n\varphi + \pi/4), & (r,\varphi) \in D_+, \\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x+y)^{\mu_n}, & (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

где f_n определяются по формуле (19).

2 Построение решения задачи Трикоми - Неймана для уравнения Лаврентьева - Бицадзе с комплексным параметром

Для уравнения Лаврентьева - Бицадзе с комплексным параметром в области D найдем решение следующей задачи.

Задача TN**.** *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}\,(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap \mathrm{C}^2(D_+ \cup D_-), \tag{23}$$

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0, \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{26}$$

$$\left.u(x,y)\right|_{AC} = 0, \tag{27}$$

где f *- заданная достаточно гладкая функция.*

Используя собственные функции задачи TN_λ решение задачи (23) - (26) в области D_+ при $\lambda \neq \lambda_{n,m}$ будем искать в виде суммы ряда

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin\left[\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right], \ 0 < \varphi \le \varphi_0, \tag{28}$$

где коэффициенты f_n определяются по формуле (19), а $\dfrac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}$ - ортонормированные собственные функции задачи для уравнения

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right) R(r) = 0, \ 0 < r < 1, \tag{29}$$

с граничным условием $R(0) = 0$. На основании асимптотической формулы [4, с. 217]

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad n \to \infty$$

ряд (28) при любом $r \le r_0 < 1$ сходится равномерно, так как при больших n справедлива оценка

$$\left| f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leqslant M \cdot \frac{r^{\mu_n}}{\mu_n},$$

где $M = \mathrm{const} > 0$. Можно также показать, что ряд (28) на $D_+ \cup AB$ допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз.

Удовлетворяя (28) граничному условию (25) получим ряд

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right), \ 0 \le \varphi \le \varphi_0,$$

равномерная сходимость которого обоснована в § 3.

Для построения решения задачи TN в области D_- воспользуемся формулой

$$u_{n,m}(x,y) = c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\right]. \tag{30}$$

Из формулы (28) находим:

$$v(r,0) = u(x,0) = \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(x\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})},\ x\in[0,1], \tag{31}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,x}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \frac{J_{\mu_n}(x\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})},\ x\in(0,1). \tag{32}$$

Если в формуле (30) положить $c_{n,m} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{f_n}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}$, то сумма ряда от функций $u_{n,m}(x,y)$ по переменной n определяет решение задачи Коши для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области D_- с краевыми условиями (31) и (32):

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}\frac{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right)}{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2 *Если $f(\varphi)\in \mathrm{C}^{\alpha}[0,\varphi_0]$, $\alpha\in(0,1]$, то существует решение задачи (23) - (27) при всех $\lambda\neq\lambda_{n,m}$ и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right), & (r,\varphi)\in D_+ \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}\frac{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right)}{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)}, & (x,y)\in D_-, \end{cases}$$

где $\lambda_{n,m}$ - собственные значения задачи TN_λ, f_n - определяются по формуле (19).

3 Пространственная задача Трикоми - Неймана

Рассмотрим уравнение

$$LW \equiv W_{xx} + \operatorname{sgn} y\cdot W_{yy} + W_{zz} = 0, \tag{33}$$

в области $G = D\times(0,\pi)$, где D - область плоскости R^2_{xy}, описанная ранее. Обозначим $S_0 = \Gamma_0\times[0,\pi]$, $S_{AK} = AK\times[0,\pi]$, $z\in[0,\pi]$; $G_+ = G\cap\{y>0\}$; $G_- = G\cap\{y<0\}$.

Задача TN. *Найти функцию $W(x,y,z)$, удовлетворяющую условиям:*

$$W(x,y,z)\in \mathrm{C}\,(\,\overline{G}\,)\cap \mathrm{C}^1(G\cup S_0\cup S_{AK})\cap \mathrm{C}^2(G_+\cup G_-),$$

$$LW(x,y,z) \equiv 0, \quad (x,y,z) \in G_+ \cup G_-,$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{S_0} = \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=1} = F(\varphi, z), \quad 0 < \varphi \le \varphi_0, \ z \in [0,\pi], \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{S_{AK}} = 0, \tag{35}$$

$$\left.W(x,y,z)\right|_{y=-x} = 0, \quad x \in [0,1/2], \ z \in [0,\pi],$$

$$\left.W(x,y,z)\right|_{z=0} = \left.W(x,y,z)\right|_{z=\pi} = 0,$$

где F - заданная достаточно гладкая функция.

В области G, разделив в уравнении (33) переменные $W(x,y,z) = u(x,y)Z(z)$, получим

$$u(x,y) \in \mathrm{C}\,(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap \mathrm{C}^2(D_+ \cup D_-), \tag{36}$$

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{37}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{38}$$

$$u(x,y)\,|_{y=-x} = 0, \quad x \in [0,1/2], \tag{39}$$

$$Z'' + \mu^2 Z = 0, \ 0 \le z \le \pi, \ Z(0) = Z(\pi) = 0, \tag{40}$$

где $\mu = \mathrm{const} > 0$.

Задача (36) - (39) есть задача (23), (24), (26) и (27), где $\lambda = -\mu^2$. Полагая в формуле

$$u(x,y) = \int\limits_0^{x+y} \nu(t) J_0\left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\right] dt, \tag{41}$$

где $J_0(.)$ – функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ *при* $\lambda > 0$, $\lambda = -\mu^2$, и учитывая, что $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, получим соотношение

$$u(x,0) = \mu^2 \int\limits_0^x u_y(t,0) I_0[\mu(x-t)]dt, \ 0 \le x \le 1, \tag{42}$$

где $I_0(t)$ - модифицированная функция Бесселя, позволяющее свести полученную задачу к нелокальной эллиптической задаче в области D_+ (см. § 4).

В области D_+, разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, перейдем к задаче

$$R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0, \ 0 < r < 1, \tag{43}$$

$$R(0) = 0, \quad |\, R'(1)\, | < +\infty, \tag{44}$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \ 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{45}$$

$$\Phi'(\varphi_0) = 0, \tag{46}$$

$$\Phi(0)R(r) = \Phi^{'}(0)\int\limits_0^r t^{-1}R(t)I_0(\,\mu(r-t))dt, \quad 0<r<1. \tag{47}$$

Решением уравнения (43), удовлетворяющим условиям (44), является модифицированная функция Бесселя

$$R(r) = I_\nu(\mu r), \quad \operatorname{Re}\nu > 0.$$

Подставив ее в равенство (47), получим второе граничное условие для определения функции $\Phi(\varphi)$:

$$\nu\,\Phi(0) - \Phi'(0) = 0. \tag{48}$$

Решения уравнения (45), удовлетворяющие граничным условиям (46) и (48), являются функции

$$\Phi_k(\varphi) = C_k \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad C_k = \text{const} \neq 0\ .$$

Таким образом, функции

$$u_k(x,y) = v_k(r,\varphi) = C_k I_{\mu_n}(\mu r)\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

определяют в области D_+ решения уравнения (37), удовлетворяющие условиям (38) и (42).

Решениям задачи (40) являются функции

$$Z_n(z) = B_n \sin nz, \ B_n = \text{const} \neq 0, \quad \mu = n = 1,\, 2,\, \cdots .$$

Решение задачи TN в области G_+ будем искать в виде суммы ряда

$$W(x,y,z) = V(r,\varphi,z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk}\sin nz \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{I_{\mu_n}(nr)}{I_{\mu_n}(n)}. \tag{49}$$

Удовлетворив сумму ряда (49) граничному условию (34), имеем

$$\left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{r=1} = \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=1} = F(\varphi,z) = \sum_{n,k=1}^{\infty}\mu_n f_{nk}\sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sin nz,$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $P_n(\varphi)$ в ряд по системе синусов

$$P_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_{nk}\sin\left(\mu_k\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0, \tag{50}$$

а функция $P_n(\varphi)$ определяется по формуле

$$P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(\varphi,z)\sin nz dz.$$

Если функция $F(\varphi,z)$ по переменной φ удовлетворяет на сегменте $[0,\varphi_0]$ условию Гёльдера с показателем α, где $0<\alpha\le 1$, то функция $P_n(\varphi)$ также удовлетворяет с тем же показателем на сегменте $[0,\varphi_0]$ условию Гельдера, поэтому ряд (50) сходится равномерно на $[0,\varphi_0]$.

Ряд (49) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}_+$ и там допускает почленное дифференцирование по переменной r, за исключением отрезка $r = 0$, если функция $F(\varphi, z)$ в замкнутой области $0 \le \varphi \le \varphi_0,\ 0 \le z \le \pi$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ [5, с. 364].

Решение задачи TN в области G_- имеет вид:

$$W(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} \frac{I_{\mu_k}\left(n\sqrt{x^2-y^2}\right)}{I_{\mu_k}(n)}. \tag{51}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 *Если функция $F(\varphi, z)$ в замкнутой области $0 \le \varphi \le \varphi_0,\ 0 \le z \le \pi$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, то существует решение задачи TN в области G и оно задается формулами (49), (51).*

Литература

1. А.В. Бицадзе. О некоторых задачах для уравнений смешанного типа. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 561-564.

2. М.М. Смирнов. Уравнения смешанного типа, М.: Наука. 1970. 296 с.

3. Е.И. Моисеев. О базисности одной системы синусов. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177-179.

4. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции, М.: Физматгиз. 1963. 516 с.

5. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Ч. II, М.: Наука. 1998. 448 с.

ON SOLUTIONS TO TRICOMI-NEUMANN PROBLEMS FOR LAVRENTIEV-BITSADZE EQUATION WITH A COMPLEX PARAMETER

S.L. Hasanova

Sterlitamak State Pedagogical Academy,
Nikolaeva str., 10, Sterlitamak, 453118, Russia, e-mail: hasanovasl@rambler.ru

Abstract. We consider a problem for Lavrentiev-Bitsadze equation of mixed type finding as eigenseries. Also an analogous problem for cylindrical domain is studied.

Keywords: differential equation of mixed type, characteristics, eigenvalues, eigenfunctions, eigenseries.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

А.Г. Александров – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН (г. Москва, Россия)

Е.А. Аршава – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры (г. Харьков, Украина)

С.И. Безродных – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН), (г. Москва, Россия)

Г.О. Бузыкин – младший научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН), (г. Москва, Россия)

В.И. Власов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором аналитико-численных методов математической физики Учреждения Российской академии наук Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН) (г. Москва, Россия)

А.В. Глушак – доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и информационных технологий Белгородского государственного университета (г. Белгород, Россия)

Св.А. Гриценко – старший преподаватель кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета (г. Белгород, Россия)

Ф.С. Дедиков – соискатель кафедры математического анализа Белгородского государственного университета (г. Белгород, Россия)

М.В. Журавлев – студент Воронежского государственного университета (г. Воронеж, Россия),

А.Н. Зарубин – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Орловского государственного университета

О.В. Лаштабега – старший преподаватель Орловского государственного университета (г. Орел, Россия)

А.М. Мейрманов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики Белгородского государственного университета (г. Белгород, Россия)

Л.А. Минин – кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета (г. Воронеж, Россия)

С.М. Ситник – кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского института МВД России (г. Воронеж, Россия)

С.Л. Скороходов – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ВЦ РАН (г. Москва, Россия)

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Принимаются рукописи статей, написанные на русском (или на английском) языке, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу, соответственно, математиков и физиков. Ни в коем случае, рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (соответственно, условий проведения эксперимента). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована – разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение.

Во введении должна быть кратко описана проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, должна быть дана краткая история вопроса и описан полученный автором (ами) результат. В заключении должна быть дана краткая характеристика полученного результата и указано его значение в дальнейшем развитии темы работы.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются для обзорной статьи, с той лишь разницей, что её содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Принимаются также для публикации статьи, носящие методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается отдельным решением редколлегии журнала.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

Рукопись должна состоять из следующих частей:

1) основной содержательной части, представляемой на русском или английском языках. Она должна начинаться указанием номера УДК того научного направления, которому посвящена статья. Затем следует название статьи. Оно должно состоять не более чем из 20 слов. Далее приводится список авторов статьи, затем следует полностью основная часть рукописи;

2) аннотации на русском языке. Её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

3) списка ключевых слов (не более 10-12).

4) перевода заглавия, аннотации и ключевых слов на английский язык;

5) списка литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

6) данных об авторах статьи с указанием места работы, точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке, должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

7) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи;

8) укороченного заголовка статьи, состоящего не более, чем из трёх слов, который печатается в колонтитулах журнала.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения с авторским оригиналом при редактировании.

Если в рукописи имеются рисунки, то они должны быть подготовлены в формате "eps" и соответствующие им файлы необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п. 7).

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX следующие:

1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;

2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации цифровых меток, соответствующих номеру формулы. Допускается применение для нумерации формул цифр, снабжённых штрихами. Однако, этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста. В случае, если в статье имеются части в виде приложений, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть не зависимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения;

3) то же самое касается литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи. Их нужно отмечать цифрами в порядке появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.