№17 (136) 2012
Выпуск 28
НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

Основан в 1995 г.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

Belgorod State University Scientific bulletin
Mathematics & Physics

Учредитель:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

Издатель:
НИУ «БелГУ».
Издательский дом «Белгород»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охраны культурного наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-21121 от 19 мая 2005 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Главный редактор

О.Н. Полухин,
и.о. ректора НИУ «БелГУ»,
доктор политических наук, профессор

Зам. главного редактора

И.С. Константинов,
и.о. проректор по научной и инновационной деятельности НИУ «БелГУ»,
доктор технических наук,
профессор

Ответственные секретари:

В.М. Московкин,
доктор географических наук, профессор кафедры мировой экономики НИУ «БелГУ»

О.В. Шевченко,
зам. начальника УНИД НИУ «БелГУ»,
канд. исторических наук,

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ЖУРНАЛА

Главный редактор

Ю.П. Вирченко,
доктор физико-математических наук (НИУ «БелГУ»)

Заместители главного редактора:

Н.В. Малай,
доктор физико-математических наук (НИУ «БелГУ»)

А.М. Мейрманов,
доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

Ответственный секретарь

М.Н. Бекназаров,
кандидат физико-математических наук (НИУ «БелГУ»)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Теорема существования решений для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями. ***Ю.Е. Гликлих, А.В. Макарова 5***

Построение распределения вероятностей случайных множеств. I. Аддитивные меры на булевской решетке. ***Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская 16***

О разрешимости задачи типа Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля. ***А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова 28***

О среднем числа решений бинарной проблемы Гольдбаха. ***С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина 46***

О числе решений одного уравнения с квадратичными формами. ***С.В. Куртова 51***

Обращение преобразования Радона-Киприянова радиальных функций. ***Л.Н. Ляхов, О.И. Попова 56***

Функция Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля. ***Т.А. Манаенкова 71***

Математические модели диффузии в пороупругих средах. ***А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцева, О.А. Гальцев 77***

О разрешимости одномерного уравнения Кана-Хилларда с вязкостью в пространстве непрерывных ограниченных функций на всей оси. ***Х.Г. Умаров 91***

К решению характеристического сингулярного интегрального уравнения на вещественной прямой в исключительном случае с произвольными порядками нулей. ***Т.М. Урбанович 102***

О диофантовых неравенствах с простыми числами. ***Нгуен Тхи Ча 113***

Задача Геллерстеда для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со смешанным отклонением аргумента в производных. ***Е.В. Чаплыгина 119***

О нильпотентных алгебрах Лейбница. ***О.И. Череватенко 132***

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическая модель процесса возбуждения дифрагированного переходного излучения релятивистским электроном в слоистой периодической среде. ***С.В. Блажевич, М.Н. Бекназаров, И.В. Колосова, А.В. Носков 137***

Члены редколлегии:

С.В. Блажевич, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

И.Е. Внуков, доктор физико-математических наук (НИУ «БелГУ»)

А.В. Глушак, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

С.А. Гриценко, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Красильников, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

Н.Н. Насонов, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

О.М. Пенкин, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

Г.А.Салищев, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

А.П. Солдатов, доктор физико-математических наук, профессор (НИУ «БелГУ»)

В.В. Сыщенко, доктор физико-математических наук (НИУ «БелГУ»)

Численное решение усредненной модели совместного движения жидкостей различной плотности в пористых средах. ***О.В. Гальцев 154***

К расчету траекторий плазменных струй в двухструйной электрической дуге. ***Э.Б. Кулумбаев, Т.Б. Никуличева 169***

Повторное усреднение в задачах фильтрации подземных жидкостей. ***А.М. Мейрманов 178***

Гравитационное оседание агломерата, образованного двумя одинаковыми сферическими частицами. ***Е.Р. Щукин, Л.А. Уварова, Н.В. Малай, З.Л. Шулиманова 194***

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О нулях рядов Дирихле из класса Сельберга, лежащих на коротких промежутках критической прямой. ***Д.Б. Демидов 204***

Неявная схема повышенной точности с расщеплением и факторизацией для численного моделирования невязких течений газа на неструктурированных сетках. ***А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов 208***

Статистика фотоотсчетов гауссовского излучения со статистически связанными модами поляризации. ***А.С. Мазманишивили 213***

Вычисление некоторых комбинаторных сумм статистической механики Бозе-газа методом производящей функции. ***Ю.П. Вирченко 218***

Геометрические свойства алгоритмов. ***Е.А. Мирошников, В.В. Яновский 221***

Численный алгоритм определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами. ***А.Е. Коротков, О.А. Матвеева 226***

Влияние размера зерна на режимы диффузионной сварки наноструктурных листов из сплава ВТ6. ***Е.А. Кудрявцев, Н.В. Лопатин, Г.А. Салищев, Э.В. Иванисенко, С.В. Жеребцов, К.С.Сенкевич 232***

Структурные изменения и механическое поведение при низкотемпературной сверхпластичности наноструктурного сплава ВТ6. ***Г.А. Салищев, Е.А. Кудрявцев, С.В. Жеребцов 236***

Информация для авторов ***240***

Статьи представлены в авторской редакции

Подготовка к изданию *Т.Г. Лагутиной*
Компьютерная вёрстка
Ю.П. Вирченко, Ю.А. Лазебной
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 24.09.2012
Формат 60×84/8
Гарнитура Georgia, Impact
Усл. п. л. 28,36
Тираж 1000 экз.
Заказ 369

Подписные индексы в каталоге агентства: «Роспечать» – 81466

Оригинал-макет тиражирован в Издательском доме «Белгород»
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

© Белгородский государственный национальный исследовательский университет, 2012

17 (136) 2012
Issue 28
SCIENTIFIC PEER-REVIEWED JOURNAL

Belgorod State University Scientific bulletin
Mathematics & Physics

Founded in 1995

Journal is included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Математика Физика

Founder:
Federal state autonomous educational establishment of higher professional education «Belgorod National Research University»

Publisher:
Belgorod National Research University. National Research University Publishing house «Belgorod»

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media ПИ № ФС 77-21121 May 19, 2005.

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL

Editor-in-chief

O.N. Poluchin,
Acting Rector of Belgorod National Research University, doctor of political sciences, Professor

Deputy editor-in-chief

I.S. Konstantinov,
Acting Vice-Rector on Scientific and Innovative Work of Belgorod National Research University, Doctor of Technical Sciences, Professor

Assistant Editors

V.M. Moskovkin,
Doctor of geographical sciences, Professor of world economy department

O.V. Shevchenko,
Deputy Head of department of scientific and innovative activity of Belgorod National Research University, candidate of historical sciences

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES

Editor-in-chief

Yu.P. Virchenko,
doctor of physico-mathematical sciences, professor of Belgorod National Research University

Deputies of editor-in-chief

N.V. Malay,
doctor of physico-mathematical sciences, professor of Belgorod National Research University

A.M. Meirmanov,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

Contents

MATHEMATICS

On solution existence theorem for stochastic inclusions with current velocities. ***Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova*** *5*

Construction of probability distribution of random sets. Additive measures on Boool's lattice. ***Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya*** *16*

About solvability of Cauchy-type problem for abstract differential equations with fractional Riemann-Liouville derivative. ***A.V. Glushak, T.A. Manaenkova*** *28*

About average number of solutions of binary Goldbach's problem. ***S.A. Gritsenko, N.N. Mot'kina*** *46*

About number of solutions of an equation with squares. ***L.N. Kurtova*** *51*

Inversion of Randon-Kipriyanov's transform of radial functions. ***L.N. Lyakhov, O.I. Popova*** *56*

Cauchy's function for abstract differential equations with fractional Riemann-Liouville derivative. ***T.A. Manaenkova*** *71*

Mathematical models of diffusion in porous elastic media. ***A.M. Meirmanov, R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev*** *77*

Solvability of one-dimensional Cahn-Hilliard equation with viscosity in space ofuniformly limited continuous functions. ***Kh.G. Umarov*** *91*

To solution of characteristic singular integral equation on real axes in exceptional case with arbitrary zero orders. ***T.M. Urbanovich*** *102*

On diofantine inequalities with primes. ***Nguyen Thi Tra*** *113*

Gellerstedt's problem for Lavrentiev-Bitsadze's equation with mixed deviation of derivative argument. ***B.V. Chaplygina*** *119*

On nilpotent Leibnitz algebras. ***O.I. Cherevatenko*** *132*

MATHEMATICAL PHYSICS, MATHEMATICAL MODELING

Diffracted transition radiation of relativistic electron in the artificial periodic structure. ***S.V. Blazhevich, M.N. Beknazarov, I.V. Kolosova, A.V. Noskov*** *137*

Numerical solution of averaged model for the join motion of liquids with different densitiesin porous media. ***O.V. Galtsev*** *154*

Trajectories calculation of plasma jet in two-jet electric arc. ***E.B. Kulumbaev, T.B. Nikulicheva*** *169*

Reiterated homogenization in problems of underground liquid filtration. ***A.M. Meirmanov*** *178*

Responsible secretary

M.N. Beknazarov,
candidate of physico-mathematical sciences (Belgorod National Research University)

Members of editorial board

S.V. Blazhevich,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

I.E. Vnukov,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

A.V. Glushak,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

S.A. Gritsenko,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

V.V. Krasilnikov,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

N.N. Nasonov,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

O.M. Penkin,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

G.A. Salishchev,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

A.P. Soldatov,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

V.V. Syshchenko,
doctor of physico-mathematical sciences, professor (Belgorod National Research University)

Proposed articles are given in authors' editing

Prepared for release *T.G. Lagutina*
Dummy layout by *Yu.P. Virchenko*, *Y.A. Lazebnaya*
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 24.09.2012
Format 60×84/8
Typeface Georgia, Impact
Printer's sheets 28,36
Circulation 1000 copies
Order 369

Subscription reference in Rospechat' agency catalogue – 81466,

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University Publishing house «Belgorod»
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia, 308015

Gravitational settling of agglomerate generated by two equivalent spherical particles. ***E.R. Shchukin, L.A. Uvarova, N.V. Malay, Z.L. Shulimanova 194***

SHORT COMMUNICATIONS

On zeros of linear combinations of DirichletЃfs series of SelbergЃfsclassbeing on short intervals of critical line. ***D.B. Demidov 204***

Implicit high-order scheme with splitting and factorization for numerical simulation of inviscid ideal gas flows on unstructured grids. ***A.V. Rusanov, D.Yu. Kosyanov 208***

Photocounts statistics of nonpolarized gaussian optical radiation. ***A.S. Mazmanishvili 213***

Calculation of some combinatoric sums of Bose-gas statistical mechanics by generation function method. ***Yu.P.Virchenko 218***

Geometric properties of algorithms. ***E.A. Miroshnikov, V.V. Yanovsky 221***

Numerical algorithm of zeros calculation of entire functions defined by Dirichlet'sseries with periodic coefficients. ***A.E. Koroktov, O.A. Matveeva 226***

Grain size effect on solid state joining during diffusion bonding of nanostructured sheets of alloy Ti-6Al-4V. ***E.A. Kudrjavtsev, N.V. Lopatin, G.A. Salishchev, E.V. Ivanisenko, S.V. Zherebtsov, K.S. Senkevich 232***

Structural changes and mechanical behavior during low-temperature superplasticity of nanostructured alloy TI-6AL-4V. ***G.A. Salishchev, E.A. Kudryavtsev, S.V. Zherebtsov 236***

Information for authors ***240***

© Belgorod National Research University, 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 519.216.2

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ [1)]

Ю.Е. Гликлих, А.В. Макарова

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: e-mail: yeg@math.vsu.ru

Аннотация. Доказана новая теорема о существовании решений дифференциальных включений с текущими скоростями, у которых и правая часть включения для текущих скоростей, и правая часть включения для квадратичной производной в среднем являются многозначными.

Ключевые слова: производные в среднем, текущие скорости, стохастические дифференциальные включения

Введение. Текущая скорость – это симметрическая производная в среднем траекторий случайного процесса, введенная Э. Нельсоном. Она является естественным аналогом обычной физической скорости детерминированной кривой. Ранее было показано, что если заданы текущая скорость и так называемая квадратичная производная в среднем (дающая информацию о коэффициенте диффузии процесса), то при некоторых условиях можно построить процесс, имеющий заданную текущую скорость и квадратичную производную. В работе рассматривается математическая задача, когда заданы многозначная текущая скорость и квадратичная производная, т.е. уравнение превращается во включение. В [1] было доказано утверждение о существовании решения такой задачи в случае, когда квадратичная производная задана однозначно. Заметим, что в [7, 10] была рассмотрена задача, которая является противоположной в следующем смысле: квадратичная производная многозначна, но имеет специальный тип, а текущая скорость однозначна (или она многозначна, но имеет гладкий однозначный селектор). В настоящей работе мы объединяем методы указанных работ и исследуем специальный класс включений с многозначными правыми частями. Для простоты мы рассматриваем указанные дифференциальные включения на плоском n-мерном торе. С одной стороны, геометрические свойства на этом многообразии унаследованы из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке, а с другой стороны, это компактное многообразие, что позволяет избежать многих технических трудностей.

Везде используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся верхнему и нижнему индексу.

Предварительные сведения в нужном объеме по стохастическому анализу имеются в [5, 6], по теории многозначных отображений и включений – в [3].

[1]Исследование частично поддержано грантами РФФИ 10-01-00143 и 12-01-00183.

1. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{T}^n$ – плоский n-мерный тор. Мы рассматриваем случайные процессы $\xi(t)$, $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{T}^n$, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Для каждого такого процесса для фиксированного значения t обозначим через $\mathcal{P}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ всеми отображениями $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ при $0 \leqslant s \leqslant t$. Эта σ-подалгебра называется алгеброй «прошлого» для процесса ξ.

Обозначим также для фиксированного значения t через $\mathcal{N}_t^\xi$ σ-подалгебру $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ отображением $\xi(t) : \Omega \to \mathcal{T}^n$, которая называется алгеброй «настоящего» для процесса ξ.

σ-алгебры $\mathcal{P}_t^\xi$ и $\mathcal{N}_t^\xi$ при всех t предполагаются полными, т.е. содержащими все множества вероятности ноль. Очевидным образом $\mathcal{N}_t^\xi$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t^\xi$.

Пусть E_t^ξ – условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$.

(i) Производная справа $D\xi(t)$ процесса ξ определяется формулой

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \Big), \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\Delta t \to +0$ означает, что Δt стремится к нулю и при этом $\Delta t > 0$.

(ii) Производная слева $D_*\xi(t)$ определяется формулой

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E_t^\xi \Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \Big) \tag{2}$$

На основе этих понятий вводятся симметрическая производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ и антисимметрическая производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$.

Пусть векторы $v^\xi(t,m)$ и $u^\xi(t,m)$, $m \in \mathcal{T}^n$ таковы, что $D_S\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t))$ и $D_A\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t))$. Эти векторы существуют и они называются регрессиями. Вектор $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$, а $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Рассмотрим автономное гладкое поле невырожденных линейных операторов $A(m) : \mathbb{R}^n \to T_m\mathcal{T}^n$, $m \in \mathcal{T}^n$. Предположим, что $\xi(t)$ – процесс диффузионного типа, у которого в диффузионном слагаемом подинтегральная функция равна $A(\xi(t))$. Тогда его коэффициент диффузии $A(m)A^*(m)$ является гладким полем симметрических положительно определенных тензоров типа $(2,0)$ с матрицами $\alpha(m) = (\alpha^{ij}(m))$. Поскольку все эти матрицы невырождены, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и также является гладким. Кроме того, в каждой точке $m \in \mathcal{T}^n$ матрица $(\alpha_{ij})(m)$ симметрична и положительно определена. Поэтому рассматриваемое поле задает на $\mathcal{T}^n$ новую риманову метрику $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij} dq^i dq^j$ (гладкое поле симметрических положительно определенных $(0,2)$ тензоров). Каждой матрице соответствует дифференциальная форма объема $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$.

Обозначим через $\rho^\xi(t,m)$ вероятностную плотность процесса $\xi(t)$ относительно формы объема $dt \wedge \Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} dt \wedge dq^1 \wedge dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$ на $[0,T] \times \mathcal{T}^n$, т.е. для любой

непрерывной ограниченной функции $f : [0,T] \times \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int_0^T E(f(t,\xi(t)))dt = \int_0^T \Big(\int_\Omega f(t,\xi(t))d\mathsf{P} \Big) dt = \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} f(t,m)\rho^\xi(t,m)dt \wedge \Lambda_\alpha \,. \tag{3}$$

Тогда (см. [11])

$$u^\xi(t,m) = \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,\log\rho^\xi(t,m) = \mathrm{Grad}\,\log\sqrt{\rho^\xi(t,m)}\ , \tag{4}$$

где Grad обозначает градиент относительно римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$.

Для $v^\xi(t,m)$ и $\rho^\xi(t,m)$ выполняется так называемое уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho^\xi(t,m)}{\partial t} = -\mathrm{Div}(v^\xi(t,m)\rho^\xi(t,m))\,, \tag{5}$$

где Div обозначает дивергенцию относительно римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ (см. [11]).

Следуя [1] (см. также [6]), определим дифференцирование D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^*}{\Delta t} \right)\,, \tag{6}$$

где $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))$ – вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^*$ – вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор). Результат этого матричного произведения – матрица ранга 1, но после взятия условного математического ожидания и перехода к пределу $D_2\xi(t)$ становится симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. D_2 называется квадратичной производной в среднем. Она принимает значения в множестве симметрических неотрицательно определенных тензоров (матриц) типа $(2,0)$.

Текущая скорость является физически правильным аналогом обычной скорости неслучайных процессов. Поэтому, с физической точки зрения, важно исследовать уравнения и включения с текущими скоростями. При этом необходимо также знать информацию о квадратичной производной в среднем.

Пусть $v(t,m)$ – векторное поле, $\alpha(t,m)$ – симметрическое неотрицательно определенное $(2,0)$-тензорное поле на торе $\mathcal{T}^n$. Система

$$\begin{cases} D_S\xi(t) &= v(t,\xi(t))\,, \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{7}$$

называется *уравнением с текущими скоростями первого порядка.*

Определение 1. *Говорят, что (7) на $\mathcal{T}^n$ имеет решение на $[0,T]$ с начальным условием $\xi(0)=\xi_0$ если существует вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и процесс, $\xi(t)$ заданный на $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и принимающий значения в $\mathcal{T}^n$ такой, что $\xi(0)=\xi_0$ и для почти всех $t\in[0,T]$ уравнение (7) выполняется P-п.н. для $\xi(t)$.*

Теорема 1. *Пусть* $v : [0,T] \times \mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$ *– гладкое отображение и отображение* $\alpha : \mathcal{T}^n \to \mathrm{S}_+(n)$ *– гладкое и автономное, которое определяет риманову метрику* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *на* $\mathcal{T}^n$*, введенную выше. Пусть* ξ_0 *– случайный элемент со значениями в* $\mathcal{T}^n$*, у которого вероятностная плотность* ρ_0 *относительно формы объема* Λ_α *метрики* $\alpha(\cdot,\cdot)$ *на* $\mathcal{T}^n$ *(см. выше) является гладкой и нигде не равной нулю. Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$ *уравнение* (7) *имеет решение, которое существует на всем отрезке* $t \in [0,T]$.

Теорема 1 является простым следствием [1, теорема 4.1] (см. также [6, Теорема 8.50]). Здесь мы используем тот факт, что на компактном многообразии $\mathcal{T}^n$ правая часть уравнения (7) равномерно ограничена, т.е. выполнено условие [1, Теорема 4.1].

Введем $p_0 = \ln \rho_0$ и рассмотрим $p(t,m) = \ln \rho^\xi(t,m)$, где $\rho^\xi(t,m)$ – плотность (3), соответствующая решению $\xi(t)$ уравнения (7). В доказательстве [1, Теорема 4.1] (см. также [6, Теорема 8.50]) показано, что $p(t,m)$ корректно определено и имеет вид

$$p(t,m) = p_0(g_{-t}(m)) - \int_0^t (\mathrm{Div}\ v)(s, g_s(g_{-t}(m))\ ds, \tag{8}$$

где Div – дивергенция относительно $\alpha(\cdot,\cdot)$, а g_t – поток гладкого векторного поля $v(t,m)$.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(m)$*,* $\rho(t,m)$ *и* Λ_α *– такие же, как в Теореме 1 и в формуле* (8)*. Пусть также векторное поле* v *из Теоремы 1 автономно. Тогда поток* $\hat{g}_t$ *векторного поля* $(1, v(m))$ *на* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ *сохраняет дифференциальную форму объема* $\rho(t,m)dt \wedge \Lambda_\alpha$ *(т.е.* $\hat{g}_t^*(\rho(t,m)dt \wedge \Lambda_\alpha) = \rho_0(m)dt \wedge \Lambda_\alpha$*, где* $\hat{g}_t^*$ *– обратный образ) и, таким образом, для любого измеримого множества* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *и любого* $t \in [0,T]$

$$\int\limits_Q \rho_0(m)\Lambda_\alpha = \int\limits_{g_t(Q)} \rho(t,m)\Lambda_\alpha\,.$$

Доказательство Леммы 1 имеется в [1] (лемма 4.2).

2. Некоторые технические конструкции. Везде далее мы обозначаем через $S_+(n)$ множество симметрических положительно определенных $n \times n$ матриц.

В [1] на основе разложения Гаусса показано, что каждая матрица $\alpha \in S_+(n)$ представима в виде $\alpha = \zeta\delta\zeta^*$, где ζ – нижне-треугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* – ее транспонированная, т.е. верхне-треугольная матрица с единицами на диагонали, и δ – диагональная матрица, чьи угловые миноры (отметим, что все они положительны) совпадают с угловыми минорами матрицы α. Обозначим диагональные элементы матрицы δ через $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Тогда $A = \zeta\sqrt{\delta}$, где $\sqrt{\delta}$ – диагональная матрица с $\sqrt{\delta_1}, \ldots, \sqrt{\delta_n}$ на диагонали такова, что $\alpha = AA^*$.

Если при $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathcal{T}^n$ поле $\alpha(t,m)$ непрерывно (измеримое, гладкое), то $A(t,m)$ тоже непрерывно (измеримое, гладкое, соответственно).

Обозначим через $\mathsf{T}_-(n)$ множество нижне-треугольных $n \times n$-матриц с нулями на диагонали. Это линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех $n \times n$-матриц. Очевидно, что матрица ζ, введенная выше, принадлежит линейному подмногообразию $\mathsf{T}_-(n) + I$ в $\mathbb{R}^{n^2}$, где I – единичная $n \times n$ матрица. Обозначим через $\mathsf{T} : S_+(n) \to \mathsf{T}_-(n)$ гладкое отображение $\alpha \in S_+(n)$ в

$$\mathsf{T}\alpha = \zeta - I \in \mathsf{T}_-(n)\,, \tag{9}$$

а через S_{LC} – множество симметрических положительно определенных матриц с постоянным (равным $C > 0$) определителем. В частности, это означает, что $\delta_1 \cdot ... \cdot \delta_n = \mathrm{const} = C$, а $\sqrt{\delta_1} \cdot ... \cdot \sqrt{\delta_n} = \sqrt{C}$, где точка обозначает произведение.

Пусть $\mathsf{L}_0(n)$ – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $X = (X^1, \ldots, X^n)$ таких, что $X^1 + ... + X^n = 0$. Введем гладкое отображение $\mathsf{L_C} : S_{LC} \to \mathsf{L}_0$, переводящее симметрическую матрицу $\alpha \in S_{LC}$ в

$$\mathsf{L_C}(\alpha) = \Big(\ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}, ..., \ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}} \Big) \in \mathsf{L}_0(n)\,. \tag{10}$$

Отметим, что $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_0(n)$ – линейные пространства, т.е. понятие выпуклого множества в них корректно определено.

Лемма 2 [10]. *Для любого гладкого автономного $(2,0)$-тензорного поля $\alpha(m)$ на плоском торе $\mathcal{T}^n$ со значениями в S_{LC}:*

(i) Форма объема Λ_α соответствующей римановой метрики $\alpha(\cdot,\cdot)$ (см. выше) равна $\sqrt{C}\Lambda_E$, где Λ_E – форма объема евклидовой метрики на $\mathcal{T}^n$, унаследованной из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке.

(ii) Для любого гладкого векторного поля $v(t,m)$ на $\mathcal{T}^n$ его дивергенция $\mathrm{Div}\, v$ относительно Λ_α совпадает с обычной дивергенцией $\mathrm{div}\, v$ (т.е. относительно Λ_E).

(iii) Для любого случайного элемента со значениями в $\mathcal{T}^n$ его плотность распределения относительно Λ_α равна плотности распределения относительно Λ_E, деленной на $\sqrt{C}$.

□ Действительно, $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})}\, dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$ и поскольку $\det(\alpha_{ij}) = C$, то $\Lambda_\alpha = \sqrt{C}\Lambda_E = C dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$.

Напомним, что дивергенция $\mathrm{Div}\, v$ находится из равенства

$$\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = (\mathrm{Div} v)\Lambda_\alpha\,,$$

где $\mathcal{L}_v$ – производная Ли вдоль v (см. подробности, например, в [6]). Напомним также, что $\mathcal{L}_v\Lambda_\alpha = d(v\rfloor\Lambda_\alpha)$, где $\rfloor$ обозначает внутреннее произведение векторов и дифференциальных форм. Поскольку C постоянно, то $d(v\rfloor\Lambda_\alpha) = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i}\sqrt{C}\Lambda_E = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i}\Lambda_\alpha$. Следовательно, $\mathrm{Div} v = \dfrac{\partial v^i}{\partial q^i} = \mathrm{div} v$.

Утверждение (iii) вытекает из (i). ■

3. Включения с текущими скоростями. Пусть $v(t,m)$ – многозначное векторное поле, $\boldsymbol{\alpha}(t,m)$ – многозначное симметрическое положительно определенное $(2,0)$-тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in v(t,\xi(t))\,, \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t))\,. \end{cases} \tag{11}$$

называется дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка. Понятие решение включения (11) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в Определении 1.

Напомним (см. [3]) следующее

Определение 2. *Пусть X и Y – метрические пространства. Для заданного $\varepsilon > 0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ называется ε-аппроксимацией многозначного отображения $F : X \to Y$, если график отображения f, как множество в $X \times Y$, лежит в ε-окрестности графика отображения F.*

Известно (см., например, [3]), что для полунепрерывного сверху многозначного отображения с выпуклыми замкнутыми образами точек в нормированном линейном пространстве ε-аппроксимации существуют при любом $\varepsilon > 0$.

Мы накладываем на $v(t, m)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, m)$ следующие условия.

Условие 1. *Многозначное векторное поле $v(m)$ на $\mathbb{T}^n$ автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что для любого ε_k поле $v(m)$ имеет гладкую ε_k-аппроксимацию $v_i(m)$ и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности $t \in [0, T]$ и $m \in \mathbb{T}^n$ первые частные производные $\dfrac{\partial v_i}{\partial m_j}$.*

Условие 2.

(i) Многозначное $(2, 0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}$ на $\mathcal{T}^n$ принимает значения в S_{LC}; оно автономно и полунепрерывно сверху.

(ii) Значения $\boldsymbol{\alpha}$ замкнуты и равномерно ограничены.

(iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $\mathsf{T}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{T}_-(n)$ и множество $\mathsf{L_C}(\boldsymbol{\alpha}(m))$ выпукло в $\mathsf{L}_0(n)$.

Лемма 3. *При выполнении Условия 1 многозначное векторное поле $v(t, m)$ имеет непрерывный селектор, к которому равномерно сходится подпоследовательность последовательности аппроксимаций $v_i(m)$ при $i \to \infty$.*

□ Действительно, из теоремы Асколи (см. [9]) нетрудно вывести, что при выполнении Условия 2 последовательность $v_i(t, m)$ компактна в пространстве непрерывных векторных полей на $\mathcal{T}^n$. ■

Теорема 2. *Пусть многозначное векторное поле $v(t, m)$ на $\mathcal{T}^n$ удовлетворяет Условию 1, а многозначное $(2, 0)$-тензорное поле $\boldsymbol{\alpha}(m)$ удовлетворяет Условию 2. Пусть ξ_0 – случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого распределение относительно формы объема Λ_E равно $\sqrt{C}\rho_0$, где ρ_0 – гладкое и нигде не равное нулю распределение. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (11) имеет решение, определенное на всем интервале $t \in [0, T]$.*

□ Так как отображения T и $\mathsf{L_C}$ гладкие, многозначные отображения $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{T}_-(n)$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$ со значениями в $\mathsf{L}_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку таковым является $\boldsymbol{\alpha}$. По Условию 2 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по [2, Теорема 2] (см. также [6, Теорема 4.11]) для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \to 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных ε_q-аппроксимаций, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам полей $\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathsf{L}_C\boldsymbol{\alpha}$, соответственно. Выберем указанные последовательности аппроксимаций для последовательности $\varepsilon_k \to 0$ из Условия 1. Без ограничения общности все

эти аппроксимации можно считать гладкими. Так что существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2,0)$-тензорных полей из S_{LC}, которая поточечно сходится к борелевскому селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\boldsymbol{\alpha}(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем α_k^{ij}.

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$, как было указано выше. Рассмотрим, далее, последовательность уравнений

$$\begin{cases} D_S\xi(t) &= v_k(\xi(t))\,, \\ D_2\xi(t) &= \alpha_k(\xi(t))\,. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что по Лемме 2 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0, поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot,\cdot)$ совпадают между собой. Все уравнения (12) удовлетворяют условиям Теоремы 1 так, что для каждого уравнения существует решение. Решение k-го уравнения обозначим $\xi_k(t)$.

Для решения $\xi_k(t)$ осмотическая скорость имеет вид

$$u_k(t,m) = \frac{1}{2}\mathrm{Grad}_k\, p_k(t,m),$$

где Grad_k – градиент относительно $\alpha_k(\cdot,\cdot)$, а $p_k(t,m)$ построено по формуле (8). По определению этого градиента его координатное представление имеет вид $(\mathrm{Grad}_k p_k(t,m))^i = \alpha_k^{ij}\dfrac{\partial p_k}{\partial q^j}$.

Введем векторные поля $a_k(t,m) = v_k(t,m) + u_k(t,m)$.

По Лемме 1 $\rho_i(t,m)dt\wedge dq^1\wedge\cdots\wedge dq^n = \hat{g}_t^{(i)*}\rho_0(t,m)dt\wedge dm_1\wedge\cdots\wedge dq^n$, где $\hat{g}_t^{(i)}$ поток векторного поля $(1,v_i)$ на $[0,1]\times\mathbb{T}^n$. Следовательно $\dfrac{\partial\rho_i}{\partial m_j}$ равно $\left(T\hat{g}_{-t}\dfrac{\partial}{\partial m^j}\right)\rho_0$, производной ρ_0 по направлению векторного поля $\left(T\hat{g}_{-t}\dfrac{\partial}{\partial m^j}\right)$, где $T\hat{g}_{-t}$ касательное отображение для $\hat{g}_{-t}$. Поскольку все частные производные всех v_i равномерно ограничены одинаковой константой, то все $T\hat{g}_{-t}$ также равномерно ограничены одинаковой константой, и мы получаем, что производные $\dfrac{\partial\rho_i}{\partial m_j}$ равномерно ограничены одной и той же константой при всех $i=1,\ldots,\infty$ и всех $j=1,2,\ldots,n$ так же, как все $\dfrac{\partial p_i}{\partial m^j}$. Таким образом, все векторные поля $\mathrm{Grad}_k\, p_k$ при всех k равномерно ограничены одинаковой константой. Так как все $v_k(m)$ очевидным образом тоже равномерно ограничены одинаковой константой, это означает, что все $a_k(t,m)$ равномерно ограничены одной и той же константой.

Как сказано в разд. 1, каждое поле $\alpha_k(m)$ представимо в виде $\alpha_k(m) = A_k(m)A_k^*(m)$.

Рассмотрим на $\mathcal{T}^n$ последовательность стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито

$$\xi_k(t) = \xi_0 + \int_0^t a_k(s,\xi(s))ds + \int_0^t A_k(s,\xi(s))dw(s). \tag{13}$$

Поскольку коэффициенты уравнений (13) при всех k гладкие и ограничены, каждое уравнение имеет единственное сильное решение, определенное на всем отрезке $[0,T]$.

На банаховом многообразии $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ-алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0,t]$, $t\in[0,T]$, и семейство полных под-σ-алгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot)\mapsto x(t)$. Понятно, что $\mathcal{N}_t$ является под-σ-алгеброй в $\mathcal{P}_t$.

Так как уравнения (13) можно рассматривать как уравнения на $\mathbb{R}^n$ с пространственно-периодическими коэффициентами, мы можем применить [4, Следствие III.2] и получить утверждение о том, что множество $\{\mu_k\}$ мер на $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C})$ слабо компактно. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ. Без ограничения общности можно считать, что последовательность μ_k слабо сходится к μ. Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0,T],\mathcal{T}^n),\mathcal{C},\mu)$, т.е. для каждого элементарного события $m(\cdot)\in C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t,m(\cdot))=m(t)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является «прошлым» для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ – «настоящим».

По построению $D_S\xi_k(t)=v_k(t,\xi_k(t))$ при любом k. Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)-v_k(m(t))]f(m(\cdot))d\mu_k=0\,.$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Так как μ_k слабо сходится к μ, существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k>K(\varepsilon)$

$$\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu_k$$
$$-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}[m(t+\Delta t)-m(t-\Delta t)]f(m(\cdot))d\mu\|<\varepsilon$$

и

$$\|\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu_k-\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(\cdot)v(m(t))d\mu\|<\varepsilon.$$

Наконец, так как $v_k(t,m)$ равномерно сходятся к $v(t,m)$, то равномерно для всех μ_i, включая μ, и равномерно по t

$$\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i\to\int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i$$

при $k\to\infty$, т.е. для любого $\varepsilon_1>0$ существует K_1 такое, что при $k>K_1$ при всех i и при всех $t\in[0,T]$

$$\|\int_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v_k(m(t))d\mu_i-\int_{[0,T]\times\Omega}f(m(\cdot))v(m(t))d\mu_i\|<\varepsilon_1$$

Тогда при $k > \max(K, K_1)$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$

$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t) - v_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu \| <$$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu_k -$$

$$- \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)] f(m(\cdot)) d\mu \| +$$

$$+ \| \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_k - \int_{[0,T]\times\Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k \| +$$

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \| < 2\varepsilon + \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t) - v(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu = 0\,.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, отсюда вытекает, что

$$D_S \xi(t) = v(\xi(t)). \tag{14}$$

Напомним, что по построению $v(\xi(t)) \in v(\xi(t))$ μ-п.н.

По построению, для любого $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой функции $f(m(\cdot))$ как было указано выше

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{C^0([0,T],\mathcal{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^* - \alpha_k(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0\,.$$

Так как $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ при $k \to \infty$ поточечно, $\alpha_k(t,m)$ стремится к $\alpha(t,m)$ п.н. относительно всех мер μ_k и относительно μ. Выберем $\delta > 0$. По теореме Егорова (см., например, [8]) для любого i существует подмножество $\tilde{K}^i_\delta \subset C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}^i_\delta) > 1-\delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}^i_\delta$. Введем $\tilde{K}_\delta = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{K}^i_\delta$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}_\delta$ при всех i и $\mu(\tilde{K}_\delta) > 1-\delta$.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0,T],\mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \to 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению $\alpha(m(t))$ является равномерным пределом последовательности

непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, т.е. и на любом конечном объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидным образом $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$.

Из-за описанной выше равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ при всех k мы выводим из ограниченности $f(m(\cdot))$, что при достаточно большом k

$$\| \int_{\tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < \delta \,.$$

Так как $f(m(\cdot))$ ограничено, имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для всех $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т.е. их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, поскольку

$$\mu_k(C^0([0,T], \mathfrak{T}^n) \backslash \tilde{K}_\delta) < \delta$$

при всех достаточно больших k, то

$$\| \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)\backslash \tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \| < 2\delta Q\, \Xi$$

при всех достаточно больших k. Так как δ – произвольное положительное число, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0 \,.$$

Функция $\alpha(m(t))$ – μ-п.н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T], \mathfrak{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_k слабо сходятся к μ, то по лемме из [4, VI.1]

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_k = \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидным образом,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu_k$$

$$= \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*] f(m(\cdot)) d\mu.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{C^0([0,T],\mathfrak{T}^n)} [(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^* - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ – произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathfrak{N}_t$, это означает, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ-п.н.

Вместе с (14) это означает, что $\xi(t)$ является искомым решением включения (11). ■

Литература

1. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E. Differential inclusions with mean derivatives // Dynamic systems and applications. – 2007. – 16. – P.49-72.
2. Azarina S.V., Gliklikh Yu.E., Obukhovskii A.V. Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds // Applicable Analysis. – 2007. – 86;9. – P.1105-1116.
3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / М: Комкнига, 2005. – 215 с.
4. Гихман И.В., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.3 / М.: Наука, 1975. – 496 с.
5. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / М.: Комкнига, 2005. – 416 с.
6. Gliklikh Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / London: Springer-Verlag, 2011. – 460 p.
7. Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // Applicable Analysis (in print)
8. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Келли Дж.Л. Общая топология / М.: Наука, 1968. – 432 с.
10. Makarova A.V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II // Global and Stochastic Analysis. – 2012. – 2;1. – P.101-112.
11. Nelson E. Quantum fluctuations /Princeton: Princeton University Press, 1985. – 147 p.

ON SOLUTION EXISTENCE THEOREM FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH CURRENT VELOCITIES

Yu.E. Gliklikh, A.V. Makarova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: e-mail: yeg@math.vsu.ru

Abstract. New solution existence theorem is proved for differential inclusions with current velocities where inclusion right-hand sides both for current velocities and for quadratic mean derivatives are set-valued.

Key words: mean derivatives; current velocities; stochastic differential inclusions.

УДК 531.1

ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ. I. АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ НА БУЛЕВСКОЙ РЕШЕТКЕ

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Аннотация. Предлагается общая конструкция распределения вероятностей для случайных множеств $\tilde{X}$ на минимальной σ-алгебре, порождаемой бесконечной системой случайных событий $\Gamma(A) = \{A \subset \tilde{X}\}$, $|A| < \infty$. События образуют решетку с максимальным элементом, частичный порядок в которой определяется отношением включения, и при этом каждая упорядоченная пара элементов соединяется конечной цепью. В первой части работы строятся аадитивные меры на булевском кольце, порождаемом решеткой случайных событий.

Ключевые слова: система множеств, решетка, полукольцо, σ-алгебра, мера.

1. Введение. Построение вероятностного пространства $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P} \rangle$ со структурой измеримости, определяемой σ-алгеброй $\mathfrak{B}$ и мерой P, обычно состоит в выделении некоторой системы $\mathfrak{A}$ случайных событий Γ из Ω, которая считается достаточной для вероятностного описания моделируемой содержательной (физической) ситуации, и определении σ-аддитивной функции на минимальной σ-алгебре $\mathfrak{B}$, порождаемой этой системой. При этом возникают две проблемы. Первая состоит в том, чтобы иметь эффективный способ установления того, является ли заданная функция на Ω измеримой или, что то же самое, являются ли измеримыми наперед заданные подмножества Γ из Ω. Вторая состоит в том, чтобы установить, когда априорно заданные вероятности $\Pr\{\Gamma\}$ событий Γ из системы $\mathfrak{A}$ являются значениями единственной σ-аддитивной меры Q на $\mathfrak{B}$, которая является единственным продолжением функции P, первоначально заданной на $\mathfrak{A}$, на всю σ-алгебру.

На сегодняшний день общепринято, что первая задача может эффективно решаться на основе так называемых систем Дынкина [1], которые первоначально были предназначены именно для упрощения проверки измеримости заданной функции относительно некоторой σ-алгебры. Вторая же задача, как правило, решается посредством определения аддитивной меры на булевском полукольце множеств. Определенная таким образом мера, при наличии свойства σ-полуаддитивности на полукольце, допускает единственное продолжение до σ-аддитивной меры на минимальной σ-алгебре, содержащей это полукольцо (см., например, [2]). Считается, что построение полукольца, содержащего заданную систему $\mathfrak{A}$ множеств и задание аддитивной функции P на полукольце, представляет собой более простую задачу. Например, в теории случайных процессов такое

полукольцо возникает естественным образом, когда мы интересуемся случайными событиями, связанными с прохождением траекторий случайного процесса фиксированных областей значений в фиксированные моменты времени. Наличие аддитивности меры P для этого полукольца означает существование соотношений согласованности для набора частных распределений вероятностей [3]. Решение задачи о задании меры P сводится, таким образом, к заданию бесконечного набора функций, удовлетворяющих этим соотношениям. Однако, мыслимы случаи, когда построение полукольца и определение на нем аддитивной меры может представлять собой некоторую самостоятельную задачу, как это имеет место для частных распределений вероятностей случайных множеств [4]. Кроме того, проверка свойства σ-полуаддитивности для уже определенной функции P тоже требует аккуратных оценок (см., например, [3]).

Нашей целью в этом сообщении является построение σ-аддитивной меры на минимальной σ-алгебре, порождаемой системой $\mathfrak{A}$ случайных событий $\Gamma(A) = \{A \subset \tilde{X}\}$, $|A| < \infty$, связанных со случайными реализациями $\tilde{X}$ множеств из некоторого пространства погружения Σ так, что элементарные события составляют степенное множество над этим пространством, $\Omega = \mathcal{P}(\Sigma)$. Эта система событий представляет собой решетку с максимальным элементом Ω, частичный порядок на которой задается отношением включения, и она обладает рядом дополнительных свойств. В частности, каждая упорядоченная пара элементов решетки соединена конечной цепью. Оказывается, что, в рассмотренном нами случае, для конструкции меры достаточно задать монотонную функцию $\mathsf{P}(\cdot)$ такую, что $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$ при $B \supset A$, где множества A и B из пространства погружения Σ конечны, и эта функция должна удовлетворять некоторому специальному свойству положительной определенности. Этому свойству, как правило, легко удовлетворить в каждом конкретном случае и при этом не возникает никаких дополнительных соотношений согласованности. Тогда распределение вероятностей случайных множеств $\tilde{X}$ строится на основе такой функции, если положить $\mathsf{P}(A) = \Pr\{A \subset \tilde{X}\}$.

2. Построение полукольца. Пусть имеется бесконечное множество Σ [2)] и система событий $\Gamma(x) = \{x \in \tilde{X}\} \subset \Omega$, $x \in \Sigma$. (Далее, всюду по тексту множества подмножеств из Σ мы называем событиями, несмотря на то, что еще не введена структура измеримости и факт измеримости этих множеств относительно этой структуры не установлен.) Тогда система $\mathfrak{A}$, элементами которой являются события $\Gamma(A) \subset \Omega$,

$$\Gamma(A) = \bigcap_{x \in A} \Gamma(x)\,, \quad A \in \mathcal{P}_0(\Sigma) \tag{1}$$

частично упорядочена так, что $\Gamma(B)$ следует за $\Gamma(A)$, если $B \supset A$. Здесь и далее $\mathcal{P}_0(\Sigma) = \{A : A \subset \Sigma, |A| < \infty\}$.

Очевидно, что введенная таким образом структура решетки обладает максимальным элементом $\Omega = \Gamma(\varnothing)$ и если два ее элемента $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ с конечными A и B связаны отношением порядка, то между можно вставить не более чем конечный набор элементов $\Gamma(C)$, а именно таких, у которых $A \subset C \subset B$. Построим на основе указанной системы событий полукольцо с единицей.

[2]В случае, когда множество Σ конечно, предлагаемая конструкция тривиальна.

Ведем события $\bar{\Gamma}(x) = \complement\Gamma(x)$, $x \in \Sigma$, где $\complement\Gamma \equiv \Omega \setminus \Gamma$, и, соответственно, –

$$\Gamma(A) = \bigcap_{x\in A} \bar{\Gamma}(x)\,, \quad A \in \mathcal{P}_0(\Sigma)\,.$$

Определим для каждой пары A, B конечных подмножеств из Σ событие

$$\Gamma(A,B) = \Big(\bigcap_{x\in A} \Gamma(x)\Big) \cap \Big(\bigcap_{y\in B} \bar{\Gamma}(y)\Big)\,. \tag{2}$$

Класс всех таких событий обозначим посредством $\mathfrak{S}$. В этом классе содержатся события $\Gamma(A,\varnothing) = \Gamma(A)$, $A \subset \Sigma$ и, в частности, $\Omega \equiv \Gamma(\varnothing,\varnothing)$, а также невозможное событие в том случае, когда $A \cap B \neq \varnothing$, так как $\Gamma(x) \cap \bar{\Gamma}(x) = \varnothing$ для любого $x \in \Sigma$.

Для событий класса $\mathfrak{S}$ справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Имеет место тождество*

$$\Gamma(A_1,B_1) \cap \Gamma(A_2,B_2) = \Gamma(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \tag{3}$$

для любых конечных подмножеств A_1, A_2, B_1, B_2 из Σ.

□ Это непосредственно следует из определения (2). ■

Лемма 2. *Для конечных подмножеств A, B, D из Σ в том случае, когда $D \cap A = \varnothing$, $D \cap B = \varnothing$, имеет место тождество*

$$\Gamma(A,B) = \bigcup_{C\subset D} \Gamma(A \cup C, B \cup (D \setminus C))\,. \tag{4}$$

Это разложение дизъюнктивно.

□ Доказательство строится индукцией по $|D|$. При $|D| = 1$, $D = \{z\}$, $z \in \Sigma$ имеем

$$\Gamma(A, B \cup \{z\}) \cup \Gamma(A \cup \{z\}, B) = \big(\Gamma(A,B) \cap \complement\Gamma(z)\big) \cup (\Gamma(A,B) \cap \Gamma(z)) =$$

$$= \Gamma(A,B) \cap \big(\complement\Gamma(z) \cup \Gamma(z)\big) = \Gamma(A,B) \cap \Omega = \Gamma(A,B)\,.$$

Индукционный шаг от произвольного множества D с мощностью $|D|$ к множеству $D \cup \{z\}$ с мощностью $(|D|+1)$, $z \notin D$ получается следующим разбиением оператора объединения

$$\bigcup_{C\subset D\cup\{z\}} \ldots = \left(\bigcup_{C\subset D} \ldots\right) \cup \left(\bigcup_{C\,:\,z\in C\subset D\cup\{z\}} \ldots\right)\,.$$

Объединение, полученное применением первого оператора в правой части, по предположению индукции, равно

$$\bigcup_{C\subset D} \Gamma(A \cup C, B \cup (D \cup \{z\} \setminus C)) = \Gamma(A, B \cup \{z\})\,.$$

Объединение же, полученное применением второго оператора в этом случае преобразуется следующим образом:

$$\bigcup_{C\,:z\in C\subset D\cup\{z\}} \Gamma(A\cup C, B\cup(D\cup\{z\}\setminus C)) = \bigcup_{C\subset D} \Gamma(A\cup\{z\}\cup C, B\cup(D\setminus C)) = \Gamma(A\cup\{z\}, B)\,.$$

В результате,

$$\bigcup_{C\subset D\cup\{z\}} \Gamma(A\cup C, B\cup(D\cup\{z\}\setminus C)) = \Gamma(A\cup\{z\}, B)\cup\Gamma(A, B\cup\{z\}) = \Gamma(A, B)\,,$$

ввиду разобранного выше случая с $|D| = 1$.

Дизъюнктивность разложения (4) следует из того, что для двух компонент объединения при $C_1 \subset D$ и $C_2 \subset D$, $C_1 \neq C_2$, обязательно, согласно (3), имеет место

$$\Gamma(A\cup C_1, B\cup(D\setminus C_1))\cap\Gamma(A\cup C_2, B\cup(D\setminus C_2)) = \Gamma(A\cup C_1\cup C_2, B\cup(D\setminus(C_1\cap C_2))) = \varnothing\,,$$

так как

$$(A\cup C_1\cup C_2)\cap(B\cup(D\setminus(C_1\cap C_2))) \supset (C_1\cup C_2)\cap(D\setminus(C_1\cap C_2)) \neq \varnothing\,. \quad \blacksquare$$

Лемма 3. *Для того чтобы имело место* $\Gamma(A, B) = \varnothing$ *необходимо и достаточно, чтобы* $A\cap B \neq \varnothing$.

$\square$ Если событие $\Gamma(A, B) = \{\tilde{X} \supset A, \tilde{X}\cap B = \varnothing\}$ не содержит ни одной реализации $\tilde{X} \subset \Sigma$, то условия $\tilde{X} \supset A$, $\tilde{X}\cap B = \varnothing$ не могут одновременно выполняться ни для одного множества $\tilde{X}$. Это возможно только в случае, когда $A\cap B \neq \varnothing$.

Обратно, если имеет место $A\cap B \neq \varnothing$, то условия, определяющие событие $\Gamma(A, B)$ противоречат друг другу. $\blacksquare$

Лемма 4. *Пусть* A, A', B, B' *– конечные подмножества из* Σ *такие, что* $A\cap B = A'\cap B' = \varnothing$. *Для того чтобы имело место* $\Gamma(A, B)\cap\Gamma(A', B') = \varnothing$ *необходимо и достаточно, чтобы* $A\cap B' \neq \varnothing$ *либо* $A'\cap B \neq \varnothing$.

$\square$ Из (3) следует, что равенство в условии леммы эквивалентно $\Gamma(A\cup A', B\cup B') = \varnothing$. Тогда из Леммы 3 следует, что для этого необходимо и достаточно чтобы

$$\varnothing \neq (A\cup A')\cap(B\cup B') = (A\cap B')\cup(A'\cap B)\,. \qquad \blacksquare$$

Лемма 5. *Для конечных подмножеств* A, A', B, B' *из* Σ *таких, что* $A\cap B = A'\cap B' = \varnothing$, *включение* $\Gamma(A, B) \supset \Gamma(A', B')$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $A \subset A'$, $B \subset B'$.

$\square$ Если $A \subset A'$ и $B \subset B'$, то из (3) следует

$$\Gamma(A', B') = \Gamma(A, B)\cap\Gamma(A'\setminus A, B'\setminus B) \subset \Gamma(A, B)\,.$$

Обратно, пусть имеет место $\Gamma(A,B) \supset \Gamma(A',B')$,

$$\{\tilde{X} \supset A, \tilde{X} \cap B = \varnothing\} = \Gamma(A,B) \supset \Gamma(A',B') = \{\tilde{X} \supset A', \tilde{X} \cap B' = \varnothing\}\,.$$

В условиях теоремы для множеств A, A', B, B' события $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A',B')$ не пусты. Выберем $\tilde{X} = A'$, которое удовлетворяет условиям события $\Gamma(A',B')$ в правой части включения. Тогда такая реализация должна принадлежать событию в левой части включения. Следовательно, должно, в частности, выполняться $A' \supset A$ в силу условий для реализаций, принадлежащих событию $\Gamma(A',B')$. Точно также рассуждая, положив $\tilde{X} = \complement B'$, получим, что должно выполняться $B \cap \complement B' = \varnothing$, так как выбранная случайная реализация удовлетворяет условиям события $\Gamma(A,B)$. Из полученного равенства $B \cap \complement B' = \varnothing$ следует $B' \cup \complement B = \Sigma$, то есть $\complement B \supset \complement B'$, $B \subset B'$. ■

Следствием доказанной леммы является то, что включение $\Gamma(A') \subset \Gamma(A)$ возможно только в том случае, когда $A' \supset A$.

Теорема 1. *Класс событий $\mathfrak{S}$ является булевским полукольцом с единицей.*[3)]

□ Класс $\mathfrak{S}$ содержит невозможное событие. Из Леммы 1 следует замкнутость класса $\mathfrak{S}$ относительно пересечений. Рассмотрим произвольную пару событий $\Gamma(A,B), \Gamma(A',B')$ из Ω, для которых имеет место включение $\Gamma(A,B) \supset \Gamma(A',B')$ и $\Gamma(A',B')$ не пусто, то есть имеют место включения $A \subset A'$ и $B \subset B'$. Применим формулу (4)

$$\Gamma(A,B) = \bigcup_{C \subset D} \Gamma(A \cup C, B \cup (D \setminus C))\,,$$

в которой положим $D = (A' \setminus A) \cup (B' \setminus B)$, где компоненты объединения не пересекаются. Тогда разложение в правой части дизъюнктивно и одна из компонент этого разложения, а именно, при $C = A' \setminus A$, совпадает с $\Gamma(A,B)$. Это доказывает, что рассматриваемый класс $\mathfrak{S}$ является полукольцом. ■

Булевское полукольцо $\mathfrak{S}$ порождается системой $\mathfrak{A}$ случайных событий в том смысле, что оно находится в пересечении всех полуколец, содержащих эту систему.

Мы будем говорить, что функция $\mathsf{P}(\cdot)$ монотонно не возрастает на решетке $\mathfrak{A} = \{\Gamma(A) : A \subset \Sigma : |A| < \infty\}$ с минимальным элементом $\varnothing$, в которой отношение порядка определяется отношением включения, если для любых A и B из $\mathfrak{A}$, для которых имеет место $A \subset B$, выполняется $\mathsf{P}(A) \geqslant \mathsf{P}(B)$.

Считается, что построение меры нужно начинать с ее определения на подходящем полукольце, в нашем случае, на минимальном полукольце $\mathfrak{S}$, содержащем систему $\mathfrak{A}$. Затем построенная на полукольце мера однозначно продолжается по аддитивности на минимальное кольцо, содержащее полукольцо. После чего находятся условия, при выполнении которых мера на полукольце является σ-аддитивной. В этом случае появляется возможность применить лебегово продолжение положительной меры с полукольца $\mathfrak{S}$ с единицей Ω на σ-алгебру *измеримых* случайных событий.

Построение σ-аддитивной меры на минимальной σ-алгебре вероятностного пространства случайных множеств на основе заданных ее значений $\mathsf{P}(\cdot)$ на решетке $\mathfrak{A} = \{\Gamma(A) :$

[3]Определение см. в [2].

$A \subset \Sigma, |A| < \infty\}$ обладает двумя особенностями. Во-первых, при определении аддитивной функции $\mathsf{Q}(\cdot)$ на полукольце $\mathfrak{S}$ такой, что ее сужение на систему $\mathfrak{A}$ совпадает с функцией P, оказывается, что функция Q, в общем случае, не является положительной, то есть она представляет собой заряд. При этом возникает естественное ограничение (свойство положительной определенности) на функцию P, при выполнении которого заряд Q является положительной мерой, и только после этого появляется возможность рассматривать функцию Q как распределение вероятностей случайных множеств. Во-вторых, оказывается удобным строить аддитивную функцию не на полукольце $\mathfrak{S}$, а сразу на минимальном кольце $\mathfrak{R}$, вследствие сложности внутреннего описания типичных элементов полукольца и, наоборот, бóльшей прозрачности строения кольца $\mathfrak{R}$, которое дается нижеследующими утверждениями.

Теорема 2. *Для любого $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$ система событий*

$$\mathfrak{R}(D) = \{\Gamma : \Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \qquad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D)\}$$

является кольцом с единицей Ω. [4)]

$\square$ Необходимо проверить замкнутость системы $\mathfrak{R}(D)$ относительно операций $\cap$, $\triangle$.

Пусть Γ_1 и Γ_2 – произвольные элементы из $\mathfrak{R}(D)$, определяемые, соответственно, классами $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ подмножеств из D,

$$\Gamma_i = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_i} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Тогда, в силу попарной несовместимости событий $\Gamma(C, D \setminus C)$, $C \in \mathcal{P}(D)$, имеем

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,,$$

$$\Gamma_1 \setminus \Gamma_2 = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_2} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,,$$

$$\Gamma_2 \setminus \Gamma_1 = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,,$$

и, следовательно,

$$\Gamma_1 \triangle \Gamma_2 = (\Gamma_1 \setminus \Gamma_2) \cup (\Gamma_2 \setminus \Gamma_1) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_1 \triangle \mathcal{K}_2} \Gamma(C, D \setminus C) \ \in \ \mathfrak{R}(D)\,. \quad \blacksquare$$

Теорема 3. *Если $D \subset D'$ при $D, D' \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, то $\mathfrak{R}(D) \subset \mathfrak{R}(D')$.*

[4]Здесь и далее в аналогичных случаях мы используем стандартное обозначение степенного множества $\mathcal{P}(D)$ для класса всех подмножеств конечного множества D, вместо $\mathcal{P}_0(D)$, что не должно вызывать недоразумений, так как все такие подножества конечны.

□ Пусть $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$,

$$\Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D)\,.$$

Определим класс

$$\mathcal{K}' = \{C' = C \cup C'' \,:\, C \in \mathcal{K}, C'' \in \mathcal{P}(D \setminus D')\}\,,$$

в котором множества $C' = C \cup C'' \subset D'$, и поэтому $\mathcal{K}' \subset \mathcal{P}(D')$. Для любого $C \subset D$, ввиду $C \cap (D' \setminus D) = \varnothing$, $(D \setminus C) \cap (D' \setminus D) = \varnothing$, согласно Лемме 2, имеет место дизъюнктивное разложение

$$\Gamma(C, D \setminus C) = \bigcup_{C'' \subset D' \setminus D} \Gamma(C \cup C'', (D \setminus C) \cup [(D' \setminus D) \setminus C'']\,)\,. \tag{5}$$

Рассмотрим дизъюнктивное объединение

$$\bigcup_{C' \in \mathcal{K}'} \Gamma(C', D' \setminus C') = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \bigcup_{C'' \in \mathcal{P}(D' \setminus D)} \Gamma(C'' \cup C, D' \setminus (C'' \cup C))\,,$$

которое, ввиду $(D \setminus C) \cup [(D' \setminus D) \setminus C''] = D' \setminus (C \cap C'')$, согласно (5), преобразуется в следующее

$$\bigcup_{C' \in \mathcal{K}'} \Gamma(C', D' \setminus C') = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,.$$

Следовательно, $\Gamma \in \mathfrak{R}(D')$. ■

Теорема 4. *Система событий*

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)} \mathfrak{R}(D)$$

является кольцом с единицей Ω. Она состоит из тех и только тех событий Γ, которые представимы в виде дизъюнктивных объединений

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma(A_j, B_j)\,; \quad A_k \cap B_k = \varnothing\,,\ A_k, B_k \in \mathcal{P}_0(\Sigma)\,. \tag{6}$$

□ Для любого $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, каждый элемент $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$, который, согласно определению кольца $\mathfrak{R}(D)$, определяется разложением

$$\Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C)\,, \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D)\,,$$

представим в виде (6). Это означает, что разложение (6) имеет место для любого $\Gamma \in \mathfrak{R}$.

Обратно, пусть имеется событие Γ, представленное в виде разложения (6). Для соответствующего ему дизъюнктивного набора $\Gamma(A_j, B_j)$, $j = 1 \div n$ определим множество $D = \bigcup\limits_{j=1}^{n}(A_j \cup B_j)$ и классы $\mathcal{K}_j = \{C = A_j \cup C' \,:\, C' \subset D \setminus (A_j \cup B_j)\}$, $j = 1 \div n$. Тогда, воспользовавшись Леммой 2, запишем следующее дизъюнктивное разложение

$$\Gamma(A_j, B_j) = \bigcup_{C' \subset D \setminus (A_j \cup B_j)} \Gamma(A_j \cup C', B_j \cup [(D \setminus (A_j \cup B_j)) \setminus C']) \,, \tag{7}$$

которое возможно ввиду непересекаемости множества $(D \setminus (A_j \cup B_j))$ с A_j и B_j, $j = 1 \div n$. Разложение (7) представим в виде

$$\Gamma(A_j, B_j) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}_j} \Gamma(C, D \setminus C) \,, \quad j = 1 \div n \,,$$

так как, ввиду $A_j \cap B_j = \varnothing$, выполняется $B_j \cup [(D \setminus (A_j \cup B_j)) \setminus C'] = D \setminus C$, $j = 1 \div n$.

Заметим, теперь, что ввиду попарной несовместимости совокупности событий $\Gamma(A_j, B_j)$, $j = 1 \div n$, соответствующие им классы $\mathcal{K}_j$, $j = 1 \div n$ также попарно несовместимы. Тогда

$$\bigcup_{j=1}^{n} \Gamma(A_j, B_j) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{C \in \mathcal{K}_j} \Gamma(C, D \setminus C) = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C) \,,$$

где $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{K}_j$. Откуда следует, что $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$.

Наконец, система $\mathfrak{R}$ является кольцом, так как для любой пары событий $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{R}$, принадлежащих соответственно кольцам $\mathfrak{R}(D_1)$ и $\mathfrak{R}(D_2)$, которые, согласно Теорема 3, содержатся в кольце $\mathfrak{R}(D_1 \cup D_2)$, их пересечение и симметрическая разность принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$. ■

Очевидно, что кольцо $\mathfrak{R}$ минимальное среди всех колец, содержащих полукольцо $\mathfrak{S}$.

В дальнейшем нам понадобятся еще два вспомогательных утверждения о свойствах событий $\Gamma(A, B)$, $A, B \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$.

Лемма 6. *Пусть* $\Gamma(A, B) \in \mathfrak{R}(D)$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B \subset D$ *и событие* $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$ *таково, что* $\Gamma \supset \Gamma(A, B)$. *Тогда*

$$\Gamma \supset \bigcup_{\substack{C \subset D: \\ A \subset C, B \subset D \setminus C}} \Gamma(C, D \setminus C) \,.$$

□ На основании Теоремы 2, каждый элемент Γ из $\mathfrak{R}(D)$ представим в виде дизъюнктивного разложения

$$\Gamma = \bigcup_{C \in \mathcal{K}} \Gamma(C, D \setminus C) \,, \quad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(D) \,. \tag{8}$$

По условию леммы $\Gamma(A,B)\cap\Gamma=\Gamma(A,B)$. Тогда, используя Лемму 1,

$$\Gamma(A,B)=\bigcup_{C\in\mathcal{K}}\Gamma(A\cup C,B\cup D\setminus C)\,. \tag{9}$$

При этом, ввиду дизъюнктивности последнего разложения, для любого множества C из $\mathcal{K}$, соответствующего непустому событию $\Gamma(A\cup C,B\cup D\setminus C)$, должно выполняться $(A\cup C)\cap(B\cup D\setminus C)=\varnothing$. Это, приводит к двум условиям на все те множества C из $\mathcal{K}$, которые обязаны присутствовать в полученном разложении, $B\cap C=A\cap(D\setminus C)=\varnothing$. Пустота первого выписанных пересечений эквивалентна включению $B\subset D\setminus C$, а второго – $A\subset C$. Следовательно класс $\mathcal{K}$ должен содержать все множества C, удовлетворяющие этим двум условиям. ■

Лемма 7. *Если* $\Gamma\in\mathfrak{R}(D)$ *и событие* $\Gamma(A,B)$, $A,B\in\mathcal{P}_0(\Sigma)$, $A\cap B=\varnothing$, *у которого* $(A\cup B)\cap D=\varnothing$ *таково, что* $\Gamma\cap\Gamma(A,B)=\Gamma(A,B)$, *то* $\Gamma=\Omega$.

□ Так как событие Γ представимо в виде разложения (8) и его пересечение с $\Gamma(A,B)$ – в виде (9), то сравнивая его с (4), получаем, что $\mathcal{K}=\mathcal{P}(D)$. ■

Теперь мы приступим к построению аддитивной функции $\mathsf{Q}(\cdot)$ на кольце $\mathfrak{R}$. Оно основано на следующем утверждении.

Теорема 5. *Если для каждого множества* $D\subset\mathcal{P}_0(\Sigma)$ *определена функция* $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, *аддитивная на кольце* $\mathfrak{R}(D)$, *и при этом весь класс функций* $\{\mathsf{Q}_D(\cdot);D\subset\mathcal{P}_0(\Sigma)\}$ *обладает свойством согласованности* $\mathsf{Q}_{D'}|_{\mathfrak{R}(D)}=\mathsf{Q}_D$, $D'\supset D$, *то существует единственная аддитивная на кольце* $\mathfrak{R}$ *функция* Q *такая, что*

$$\mathsf{Q}|_{\mathfrak{R}(D)}=\mathsf{Q}_D\,,\qquad D\in\mathcal{P}_0(\Sigma)\,. \tag{8}$$

□ Пусть $\Gamma\in\mathfrak{R}$ и для этого события имеет место дизъюнктивное разложение

$$\Gamma=\bigcup_{j=1}^{n}\Gamma_j\,,\qquad \Gamma_k\in\mathfrak{R},\ k=1\div n\,.$$

Тогда для каждого Γ_j найдется такое $D_j\in\mathcal{P}_0(\Sigma)$, что $\Gamma_j\in\mathfrak{R}(D_j)$, $j=1\div n$. Определим $D=\bigcup\limits_{j=1}^{n}D_j$. Тогда, согласно Теореме 3, $\mathfrak{R}(D_j)\subset\mathfrak{R}(D)$, $j=1\div n$, и поэтому все составляющие Γ_j, $j=1\div n$ дизъюнктивного разложения принадлежат $\mathfrak{R}(D)$. Следовательно, $\Gamma\in\mathfrak{R}(D)$.

Если имеется класс $\mathfrak{C}$ согласованных между собой аддитивных функций $\mathsf{Q}_D(\cdot);D\in\mathcal{P}_0(\Sigma)$, выберем в качестве множества, определяющего конкретную из них, введенное выше множество D и положим $\mathsf{Q}(\Gamma)=\mathsf{Q}_D(\Gamma)$ согласно (8). Это определение однозначно, так как, вследствие свойства согласованности функций класса $\mathfrak{C}$, для любого множества $D'\supset D$ из $\mathcal{P}_0(\Sigma)$ имеет место $\mathsf{Q}_{D'}(\Gamma)=\mathsf{Q}_D(\Gamma)$. Кроме того, воспользовавшись аддитивностью выбранной функции $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, устанавливается аддитивность функции $\mathsf{Q}(\cdot)$,

$$\mathsf{Q}(\Gamma)=\mathsf{Q}_D(\Gamma)=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{Q}_D(\Gamma_j)=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{Q}(\Gamma_j)\,.\qquad ■$$

Принцип построения аддитивных функций на кольце $\mathfrak{R}$ на основе формулы (8) сводит задачу о нахождении конкретной аддитивной функции на кольце $\mathfrak{R}$, удовлетворяющей «краевому» условию $\mathsf{Q}(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$, $D \subset \mathcal{P}_0(\Sigma)$ на системе $\mathfrak{A}$, к построению аддитивных функций $\mathsf{Q}_D(\cdot)$ класса $\mathfrak{C}$, которые удовлетворяют условию $\mathsf{Q}_D(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$ для D. Это позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любой монотонно убывающей функции* $\mathsf{P}(\cdot)$ *на решетке* $\mathfrak{A} = \{\Gamma(A) : A \subset \Sigma, |A| < \infty\}$ *существует единственная аддитивная функция* $\mathsf{Q}(\cdot)$ *на кольце* $\mathfrak{R}$, *которая удовлетворяет условию* $\mathsf{Q}(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$ *при любом* $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$. *Эта функция на событиях из полукольца* $\mathfrak{S}$ *принимает значения*

$$\mathsf{Q}(\Gamma(A,B)) \equiv \mathsf{P}(A,B) = \sum_{C \subset B} (-1)^{|C|} \mathsf{P}(A \cup C) \tag{9}$$

при любых конечных подмножествах A, B *из* Σ.

□ **1.** В каждом кольце $\mathfrak{R}(D)$ (как в любом конечном кольце) имеется дизъюнктивный набор событий $\Gamma(A, D \setminus A)$, $A \subset D$ такой, что любое событие $\Gamma \in \mathfrak{R}(D)$ представляется в виде

$$\Gamma = \bigcup_{A \in \mathcal{K}} \Gamma(A, D \setminus A)\,, \qquad \mathcal{K} \subset \mathcal{P}_0(D)\,. \tag{10}$$

При этом кольцо $\mathfrak{R}(D)$ является самым узким кольцом, содержащим указанный набор событий. Тогда для построения аддитивной функции $\mathsf{Q}_D(\cdot)$ на $\mathfrak{R}(D)$ необходимо и достаточно определить ее значения на этих порождающих элементах.

Запишем формулу определение (9) функции $\mathsf{P}(A,B)$ в виде

$$\mathsf{P}(A,B) = \sum_{C\,:\,A \subset C \subset D} (-1)^{|C \setminus A|} \mathsf{P}(C)\,,$$

где $D = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Положим $\mathsf{Q}_D(\Gamma(A,B)) = \mathsf{P}(A,B)$. При этом $\mathsf{Q}_D(\Gamma(A)) = \mathsf{P}(A)$. Тогда для события (10) из $\mathfrak{R}(D)$ должно выполняться

$$\mathsf{Q}_D(\Gamma(A,B)) = \sum_{A \in \mathcal{K}} \mathsf{P}(A, D \setminus A)\,, \quad \mathcal{K} \subset \mathsf{P}_0(D)\,.$$

Покажем, что введенные таким образом функции $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$ образуют согласованный набор, то есть для любого $\Gamma \in \mathfrak{R}(D'')$ имеет место $\mathsf{Q}_{D''}(\Gamma) = \mathsf{Q}_{D'}(\Gamma)$ при $D' \supset D''$. Докажем сначала эту формулу для событий $\Gamma(A,B)$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = D''$. Для этого запишем формулу (4) в виде

$$\Gamma(A,B) = \bigcup_{C\,:\,A \subset C \subset D' \setminus B} \Gamma(C, D' \setminus C)\,,$$

в которой произведена замена множества суммирования $C \cup A$ на C и положено $D' = D \cup A \cup B$.

Применив определение функции $\mathsf{Q}_{D'}(\cdot)$ на $\mathfrak{R}(D')$,

$$\mathsf{Q}_{D'}(\Gamma(A,B)) = \sum_{C\,:A\subset C\subset D'\setminus B} \mathsf{Q}_{D'}(\Gamma(C, D'\setminus C))\,,$$

нужно доказать, что имеет место равенство

$$\mathsf{Q}_{D''}(\Gamma(A,B)) = \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{Q}_{D'}(\Gamma(A\cup C, B\cup (D'\setminus C)\setminus D''))\,,$$

или, что тоже самое,

$$\mathsf{P}(A,B) = \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup [(D'\setminus D'')\setminus C])\,.$$

Эта формула доказывается индукцией по числу $|D'\setminus D''|$. При $|D'\setminus D''| = 0$, $D' = D''$ имеем тождество. Индукционный шаг строится на основе равенства

$$\mathsf{P}(A',B') = \mathsf{P}(A'\cup\{x\}, B') + \mathsf{P}(A', B'\cup\{x\})\,, \tag{11}$$

верного для любых множеств $A', B' \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, $A'\cap B' = \varnothing$ и $x\notin A'\cup B'$. Оно доказывается следующим преобразованием

$$\mathsf{P}(A', B'\cup\{x\}) = \sum_{C\subset B}(-1)^{|C|}\mathsf{P}(A'\cup C) + \sum_{C\,:x\in C\subset B'\cup\{x\}}(-1)^{|C|}\mathsf{P}(A'\cup C) =$$

$$= \mathsf{P}(A',B') - \mathsf{P}(A'\cup\{x\}, B')\,.$$

Для построения индукционного шага применим (11) к сумме

$$\sum_{C\subset D'\cup\{x\}\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup[(D'\cup\{x\}\setminus D'')\setminus C]) =$$

$$= \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, (B\cup\{x\})\cup[(D'\setminus D'')\setminus C]) + \sum_{C\,:x\in C\subset D'\cup\{x\}\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup[(D'\cup\{x\}\setminus D'')\setminus C])\,,$$

где первая сумма, по предположению индукции, на основании (11) при $A = A'$, $B\cup\{x\} = B'$, равна $\mathsf{P}(A, B\cup\{x\})$, а вторая, по той же причине, положив в (11) $A' = A\cup\{x\}$, $B' = B$ и используя

$$\sum_{C\,:x\in C\subset D'\cup\{x\}\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup C, B\cup[(D'\cup\{x\}\setminus D'')\setminus C]) = \sum_{C\subset D'\setminus D''} \mathsf{P}(A\cup\{x\}\cup C, B\cup[(D'\setminus D'')\setminus C])\,,$$

равна $\mathsf{P}(A\cup\{x\}, B)$. Снова применив формулу (11) при $A' = A, B' = B$, получим,

$$\mathsf{P}(A\cup\{x\}, B) + \mathsf{P}(A, B\cup\{x\}) = \mathsf{P}(A,B)\,.$$

2. Мы доказали, что формула (9) определяет класс согласованных между собой функций $\mathsf{Q}_D(\cdot)$, удовлетворяющих краевому условию. Докажем, наконец, что существует только одна такая функция. Для этого достаточно доказать, что такая функция

единственна на каждом кольце $\mathfrak{R}(D)$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$. Зафиксируем множество A из $\mathcal{P}_0(\Sigma)$. Ввиду аддитивности искомой функции, достаточно доказать, что существует единственный набор ее значений $\mathsf{Q}_D(A,B))$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = D$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$, для которого имеет место $\mathsf{Q}_D(\Gamma(D)) = \mathsf{P}(D)$, $D \in \mathcal{P}_0(\Sigma)$.

Доказательство проводится индукцией по числу $|B|$. При $|B| = 0$, $B = \varnothing$ имеем тождество. Индукционный шаг строится на основе дизъюнктивного разложения $\Gamma(A,B) = \Gamma(A \cup \{x\}, B) \cup \Gamma(A, B \cup \{x\})$ при $x \notin A \cup B$, из которого следует, что

$$\mathsf{P}(A, B \cup \{x\}) = \mathsf{P}(A,B) - \mathsf{P}(A \cup \{x\}, B)\,.$$

Тогда однозначная, по предположению индукции, определенность значений в правой части влечет однозначную определенность значения в левой части, у которого $|B \cup \{x\}| = 1 + |B|$. ■

Простые примеры показывают, что в общем случае функция $\mathsf{P}(\cdot,\cdot)$ не обязана быть неотрицательной, то есть она не определяет положительной меры на полукольце $\mathfrak{S}$. В связи с этим, введем следующее определение. Будем говорить, что функция $\mathsf{P}(\cdot)$ обладает свойством *положительной определенности*, если для любых конечных подмножеств A и B из Σ имеет место $\mathsf{P}(A,B) \geqslant 0$. Тогда следствием доказанной теоремы является

Теорема 7. *Если монотонно убывающая функция $\mathsf{P}(\cdot)$ на решетке $\mathfrak{A} = \{A \subset \Sigma : |A| < \infty\}$ является положительно определенной, то она однозначным образом продолжается до положительной меры $\mathsf{Q}(\cdot)$ на кольце $\mathfrak{R}$ так, что на порождающем его полукольце $\mathfrak{S}$ она определяется формулой $\mathsf{Q}(\Gamma(A,B)) = \mathsf{P}(A,B)$ при любых $A, B \in \mathfrak{A}$.*

Литература

1. Дынкин Е.Б. Основания теории марковских процессов / М.: Физматгиз,1959. –226 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 4-е изд. / М.: Наука, 1976. – 544 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов / М.: Наука, 1977. – 568 с.
4. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry / G.Matheron. – New York: John Wiley and Sons, 1975.

CONSTRUCTION OF PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM SETS I. ADDITIVE MEASURES ON BOOL's LATTICE

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Single Crystal Institute,
Lenin av., 60, Kharkov, 61000, Ukraine, e-mail: shpilolga@list.ru

Abstract. The general construction of probability distribution on the minimal σ-algebra generated by infinite system of random events $\Gamma(A) = \{A \subset \tilde{X}\}$, $|A| < \infty$ connected with random sets $\tilde{X}$ is proposed. Such events form the lattice with maximal element where the partial ordering is defined by inclusion relation when each pair of elements in the lattice may be connected only by the finite chain. In the first part additive measures on Boole's ring generated by the lattice of random events are built.

Key words: system of sets, lattice, semiring of sets, σ-algebra, measure.

УДК 517.983

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ [5)]

А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru, Manaenkova@bsu.edu.ru

Аннотация. Установлен критерий равномерной корректности задачи типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с дробной производной, абстрактная задача типа Коши, критерий разрешимости.

Пусть A — линейный замкнутый оператор, плотно определенный в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. При $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-n} u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-k} u(t) = 0, \quad k = 1, ..., n-1. \tag{2}$$

где $D_{0+}^{\alpha} u(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(I_{0+}^{n-\alpha} u\right)(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, $I_{0+}^{\beta} u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s)\, ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ (см. [1, с. 41], [2, с. 69]), $D_{0+}^{-\gamma} u(t) = I_{0+}^{\gamma} u(t)$ для $\gamma > 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $u_0 \in D(A)$.

Примеры решения некоторых конкретных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля могут быть найдены в [2, 3].

Среди работ, посвященных изучению абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто порядка α, можно отметить работу [4], в которой изучается ослабленная задача Коши, работу [5], в которой приведен критерий равномерной корректности задачи Коши. Неоднородное дифференциальное уравнение порядка $1 + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с дробной производной Капуто и позитивным оператором A было исследовано в [6] методом сумм Да Прато и Гривара. Работы [7], [8] содержат различные критерии равномерной корректности задачи типа Коши с дробной производной Римана-Лиувилля. В настоящей работе приводится критерий равномерной корректности задачи типа Коши отличный от приведенных в [7], [8].

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

Определение 1. *Решением задачи (1), 2) называется функция $u(t)$ такая, что имеют место включения $u(t) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$, $I_{0+}^{k-\alpha}u(t) \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$ для $k = 0, 1, ..., n-1$, $I_{0+}^{n-\alpha}u(t) \in C^n(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$, и которая удовлетворяет условиям (1), (2).*

Определение 2. *Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если при любом $u_0 \in D(A)$, существует единственное решение $u(t; u_0)$ задачи (1), (2) и если $u_{0,m} \in D(A)$, $u_{0,m} \to 0$ влечет $u(t; u_{0,m}) \to 0$ равномерно по t на любом компактном интервале из $(0, \infty)$.*

Применим к уравнению (1) оператор I_{0+}^{α}. Учитывая равенство (см. [1, с. 50], [2, с. 74])

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{0+}^{\alpha-k} u(0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \, t^{\alpha-k} \tag{3}$$

и граничные условия (2), можно утверждать, что задача (1), (2) равномерно корректна только тогда, когда следующее интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-n} \, u_0}{\Gamma(\alpha - n + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\,\alpha-1} \, Au(s) \, ds, \qquad t > 0, \tag{4}$$

равномерно корректно в смысле определения 3, которое мы приводим далее.

Определение 3. *Интегральное уравнение (4) называется равномерно корректным, если для каждого $u_0 \in D(A)$ существует единственное решение $u(t; u_0) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$ этого уравнения и если $u_{0,m} \in D(A)$, $u_{0,m} \to 0$ влечет сходимость $u(t; u_{0,m}) \to 0$ равномерно по t на любом компактном интервале из $(0, \infty)$.*

Пусть $\mathcal{B}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. Определим разрешающий оператор задачи (1), (2).

Определение 4. *Операторная функция $T_\alpha(t) \in \mathcal{B}(X)$ называется разрешающим оператором для задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:*

(i) $T_\alpha(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$ и $D_{0+}^{\alpha-n} T_\alpha(0) = I$,

(ii) $T_\alpha(t)$ коммутирует с A, то есть, $T_\alpha(t) D(A) \subset D(A)$ и $AT_\alpha(t)u_0 = T_\alpha(t)Au_0$ для любого $u_0 \in D(A)$ и $t > 0$,

(iii) $T_\alpha(t)u_0$ является решением задачи (1), (2) для любого $u_0 \in D(A)$ и $t > 0$.

Определение 5. *Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$, если задача (1), (2) имеет разрешающий оператор $T_\alpha(t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|T_\alpha(t)\| \leqslant M(t) e^{\omega t}, \quad t > 0, \tag{5}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ и функция $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$ и $T_\alpha(t)$ – соответствующий разрешающий оператор. При $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ определим преобразование Лапласа для разрешающего оператора

$$H_\alpha(\lambda) = L[T_\alpha(t)](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t) \, dt \, .$$

Учитывая оценку (5), можно утверждать, что $H_\alpha(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$. Используя свойства (ii) и (iii) определения 4 и тождество [см. 2, с. 284] для преобразования Лапласа дробных производных

$$L[D_{0+}^{\alpha}u](\lambda) = \lambda^\alpha L[u](\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} D_{0+}^{\alpha-k}u(0),$$

после преобразования Лапласа из (1), (2), получим следующие соотношения:

$$\lambda^\alpha H_\alpha(\lambda)u_0 - \lambda^{n-1}u_0 = AH_\alpha(\lambda)u_0, \quad u_0 \in X; \quad \lambda^\alpha H_\alpha(\lambda)u_0 - \lambda^{n-1}u_0 = H_\alpha(\lambda)Au_0, \quad u_0 \in D(A).$$

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$, тогда оператор $(\lambda^\alpha I - A)$ обратим и $H_\alpha(\lambda) = \lambda^{n-1}R(\lambda^\alpha, A)$, то есть, множество $\{\lambda^\alpha : Re\ \lambda > \omega\}$ включено в $\rho(A)$ и*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \lambda^{1-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)u_0\ dt, \quad u_0 \in X. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Тогда $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ и оператор $D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t)$ непрерывен при $t \geq 0$ в равномерной операторной топологии только тогда, когда $A \in \mathcal{B}(X)$.*

□ Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$. При $\lambda > \omega$. Тогда, учитывая представление оператора дробного интегрирования через оператор Лапласа [см. 1, с. 117]

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi(t) = L^{-1}[\lambda^{-\alpha}L[\varphi](\lambda)](t),$$

получим соотношение

$$\lambda^{\alpha-n}R(\lambda^\alpha, A) - \frac{I}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t) - I\right)dt,$$

откуда

$$\left\|\lambda^{\alpha-n}R(\lambda^\alpha, A) - \frac{I}{\lambda}\right\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)\ dt, \tag{7}$$

где $\eta(t) = \left\|D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t) - I\right\|$ непрерывна при $t \geq 0$, $\eta(0) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ такое, что $\eta(t) \leq \varepsilon$ при $t \in [0,\delta]$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)\ dt = \int_0^\delta e^{-\lambda t}\eta(t)\ dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)\ dt \leq$$

$$\leq \varepsilon\int_0^\delta e^{-\lambda t}\ dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}M(s)e^{\omega s}ds + 1\right)dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t}\left(\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}M(s)ds\right)dt + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{8}$$

Рассмотрим оставшийся интеграл в правой части (8). После разбиения внутреннего интеграла на два по отрезкам $[0,\delta]$ и $[\delta,t]$ и изменения порядка интегрирования получим

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t}\left(\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}M(s)ds\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_\delta^\infty M(s)\int_s^\infty e^{(\omega-\lambda)t}(t-s)^{n-\alpha-1}dtds + \int_0^\delta M(s)\int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t}(t-s)^{n-\alpha-1}dtds\right)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_\delta^\infty M(s)\frac{\Gamma(n-\alpha)}{(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}e^{(\omega-\lambda)s}ds + \int_0^\delta M(s)\int_\delta^\infty e^{-(\lambda-\omega)t}(t-\delta)^{n-\alpha-1}\,dtds\right) =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda-\omega)\delta}}{(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}\int_\delta^\infty M(s)ds + \frac{e^{-(\lambda-\omega)\delta}}{(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}\int_0^\delta M(s)ds = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to\infty, \tag{9}$$

с учетом того, что $M(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Следовательно, из (7)-(9) для достаточно больших λ мы получим $\|\lambda^{\alpha-n+1}R(\lambda^\alpha,A) -I\|<1$. Поэтому $R(\lambda^\alpha,A)$ имеет ограниченный обратный оператор, то есть оператор $R^{-1}(\lambda^\alpha,A)=\lambda^\alpha I-A$ – ограничен и, таким образом, $A\in\mathcal{B}(X)$.

Обратно, пусть $A\in\mathcal{B}(X)$, согласно [1, с. 601] $T_\alpha(t)=t^{\alpha-n}E_{\alpha,\alpha-n+1}(t^\alpha A)$, где $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — функция Миттаг-Леффлера, определяемая соотношением

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\ , \qquad z,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha>0.$$

Покажем, что $T_\alpha(t)$ удовлетворяет условиям определения 5 при $M(t)=Kt^{\alpha-n}e^{-\varepsilon t}$, где $K>0$ – некоторая постоянная, $\varepsilon>0$ произвольно. Очевидно,

$$\|T_\alpha(t)\|\leq t^{\alpha-n}\sum_{j=0}^\infty\frac{\|A\|^j\,t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+\alpha-n+1)} = t^{\alpha-n}E_{\alpha,\alpha-n+1}\left(\|A\|\,t^\alpha\right). \tag{10}$$

Пусть сначала $\alpha\in(0,2)$. Тогда неравенство (10) означает, что $T_\alpha(t)$ экспоненциально ограничена. Действительно, асимптотическое поведение функции Миттаг-Леффлера при $0<\alpha<2$ и $|z|\to\infty$ (см. [9, с. 134])

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{(1-\mu)/\alpha}\exp\left(z^{1/\alpha}\right)-\sum_{j=1}^n\frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu-\alpha j)}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\ |\arg z|\leq\nu\pi,\ \nu\in\left(\frac{\alpha}{2},\alpha\right), \tag{11}$$

и непрерывность этой функции при $t\geq 0$ означает, что при $\omega>0$ существует постоянная $K>0$ такая, что

$$E_{\alpha,\alpha-n+1}(\omega t^\alpha)\leq Ke^{\omega^{1/\alpha}t}, \quad t\geq 0, \quad \alpha\in(0,2). \tag{12}$$

Из (10), (12) получим оценку

$$\|T_\alpha(t)\| \le K t^{\alpha-n} e^{\|A\|^{1/\alpha} t} = M(t) e^{\left(\|A\|^{1/\alpha}+\varepsilon\right)t}, \quad \varepsilon > 0. \tag{13}$$

Если $\alpha \in [2,\infty)$, то зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k > \alpha/2$. Тогда

$$\|T_\alpha(t)\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j\, t^{j\alpha+\alpha-n}}{\Gamma(j\alpha+\alpha-n+1)} = t^{\alpha-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^{(1/k)kj}\, t^{(\alpha/k)kj}}{\Gamma((\alpha/k)kj+\alpha-n+1)} \le$$

$$\le t^{\alpha-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^{(1/k)j}\, t^{(\alpha/k)j}}{\Gamma((\alpha/k)j+\alpha-n+1)} = t^{\alpha-n} E_{\alpha/k,\alpha-n+1}\left(t^{\alpha/k}\, \|A\|^{1/k}\right)$$

и, используя (12), опять получим оценку (13).

Следовательно, $A \in \mathcal{G}^\alpha\left(M, \|A\|^{1/\alpha}\right)$ и $T_\alpha(t)$ — соответствующий разрешающий оператор.

Так как $D_{0+}^{\nu}\left(t^{\mu-1}E_{\alpha,\mu}(At^\alpha)\right) = t^{\mu-\nu-1}E_{\alpha,\mu-\nu}(At^\alpha)$ $(\mu > 0,\ \nu \in \mathbb{R})$, то

$$D_{0+}^{\alpha-n} T_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} = E_{\alpha,1}(t^\alpha A). \tag{14}$$

Ряд в (14) сходится по норме при $t \ge 0$ и определяет ограниченный линейный оператор $D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t)$. Оценка степенного ряда дает

$$\left\|D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t) - I\right\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A\|^j\, t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} = t^\alpha\, \|A\|\, E_{\alpha,\alpha+1}\left(\|A\|\, t^\alpha\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0+} \left\|D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t) - I\right\| = 0$, то есть оператор $D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(t)$ непрерывен в равномерной операторной топологии. ■

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ для некоторого $\alpha > 2$ и*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t} M(t)dt \le \frac{K_1}{\nu^{\alpha-n+1}}\ , \qquad \nu > 0, \quad n = [\alpha]+1,\ K_1 > 0\,. \tag{15}$$

Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.

□ Если $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ при некотором $\alpha > 2$, то в силу леммы 1 $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$, что, в частности, означает следующее

$$\Lambda_{\alpha,\ \omega} := \left\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\lambda > \omega,\ |\mathrm{arg}\lambda| \le \frac{\pi}{\alpha} < \frac{\pi}{2}\right\} \subseteq \rho(A).$$

Следовательно, $\rho(A)$ состоит из целой комплексной плоскости, за ислючением некоторого ограниченного множества, содержащего начало координат. Если $\mu \in \mathbb{C}$ достаточно велико, то $\mu = \lambda^\alpha \in \Lambda_{\alpha,\omega}$ и из соотношений (5), (6) и (15) вытекает

$$\|\mu R(\mu,A)\| = \left\|\lambda^{\alpha-n+1}\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t}T_\alpha(t)dt\right\| \le |\lambda|^{\alpha-n+1}\left\|\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t}e^{\omega t}M(t)dt\right\| \le$$

$$\leq \frac{K_1|\lambda|^{\alpha-n+1}}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{\alpha-n+1}} \leq \frac{K_1|\lambda|^{\alpha-n+1}}{\left(|\lambda|\cos\dfrac{\pi}{\alpha}-\omega\right)^{\alpha-n+1}} \to \frac{K_1}{\cos^{\alpha-n+1}\dfrac{\pi}{\alpha}}\ , \quad K_1>0, \quad |\lambda|\to\infty.$$

Из этого соотношения следует, что $\|R(\lambda^\alpha, A)\| = O(1/|\lambda|^\alpha)$. Теперь утверждение теоремы следует из приводимой ниже леммы 2 (см. [10], лемма 5.2). ■

Например, в качестве функции $M(t)$, удовлетворяющей неравенству (15), можно рассмотреть функцию $M(t) = M_0 t^{\alpha-n} e^{-\varepsilon t},\ \varepsilon>0,\ n=[\alpha]+1$. Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}M(t)dt = \int_0^\infty M_0 e^{-\nu t}e^{-\varepsilon t}t^{\alpha-n}dt = M_0\int_0^\infty e^{-(\nu+\varepsilon)t}t^{\alpha-n}dt =$$

$$\frac{M_0\Gamma(\alpha-n+1)}{(\nu+\varepsilon)^{\alpha-n+1}} \leq \frac{K_1}{\nu^{\alpha-n+1}}\ .$$

Лемма 2. *Если $\sigma(A)$ ограниченное подмножество из $\mathbb{C}$ и $\|R(\mu, A)\| = O(1/|\mu|)$ при $|\mu|\to\infty$, то $A\in\mathcal{B}(X)$.*

Далее рассмотрим задачу (1), (2) при $0<\alpha<1$ и найдем условия ее разрешимости. В этом случае интегральное уравнение (4) и соотношение (6) примут вид

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}\ u_0}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\ \alpha-1}\ Au(s)\ ds, \qquad t>0, \tag{16}$$

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)u_0\ dt, \qquad u_0\in X, \quad \lambda>\omega. \tag{17}$$

После дифференцирования равенства (17) получим

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(R(\lambda^\alpha, A)u_0) = (-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T_\alpha(t)u_0\ dt, \quad u_0\in X, \quad \lambda>\omega, \quad n=0,1,\dots\ , \tag{18}$$

что вместе с (5) дает следующую оценку

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!}\left\|\frac{d^nR(\lambda^\alpha, A)}{d\lambda^n}\right\| \leq \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda-\omega)^n\ t^n}{n!}\ e^{-\lambda t}\,\|T_\alpha(t)\|\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{t(\lambda-\omega)}e^{-\lambda t}e^{\omega t}M(t)\ dt = \int_0^\infty M(t)\ dt = K_2, \qquad \lambda>\omega, \quad M(t)\in L^1(\mathbb{R}_+). \tag{19}$$

Приведем далее формулировку теоремы 1.4 из [11], которая будет использована при установлении разрешимости задачи (1), (2) для случая $\alpha\in(0,1)$.

Теорема 3. *Пусть A – линейный замкнутый оператор с плотной в X областью определения $D(A)$, $u_0\in D(A)$ и пусть $a(t)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|\ dt < \infty\,.$$

Тогда операторное уравнение

$$T(t)u_0 = a(t)u_0 + \int_0^t a(t-s)AT(s)u_0\, ds\,, \quad t > 0\,, \tag{20}$$

имеет решение $T(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|T(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}\,, \qquad t > 0\,, \tag{21}$$

с некоторой функцией $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, только тогда, когда выполняются условия:

1) $L[a](\lambda) \neq 0$ и $1/L[a](\lambda) \in \rho(A)$ для каждого $\lambda > \omega$,

2) при $\lambda > \omega$ существует $(I - L[a](\lambda)A)^{-1}$ и функция $Q(\lambda) = L[a](\lambda)(I - L[a](\lambda)A)^{-1}$ удовлетворяет оценке

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n \left\|Q^{(n)}(\lambda)\right\|}{n!} \leq K_0 \tag{22}$$

с постоянной $K_0 > 0$.

В рассматриваемом нами случае $\alpha \in (0,1)$ уравнение (16) – частный случай уравнения (20), если $a(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. При этом $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $L[a](\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^\alpha}$ и

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}\, \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt = \frac{1}{\omega^\alpha} < \infty\,.$$

Составим соответствующую уравнению (16) функцию $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}\left(I - \frac{1}{\lambda^\alpha}A\right)^{-1} = (\lambda^\alpha I - A)^{-1} = R(\lambda^\alpha, A).$$

При этом неравенство (22) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n \left\|Q^{(n)}(\lambda)\right\|}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!} \left\|\frac{d^n R(\lambda^\alpha, A)}{d\lambda^n}\right\| \leq K_0\,.$$

Следовательно, при $0 < \alpha < 1$ к уравнению (16) применима теорема 3, которую мы можем переформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha < 1$. В этом случае $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ только тогда, когда $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!} \left\|\frac{d^n R(\lambda^\alpha, A)}{d\lambda^n}\right\| \leq K_0\,, \qquad \lambda > \omega\,,\ K_0 > 0\,. \tag{23}$$

Следующий результат – непосредственное следствие предыдущей теоремы.

Теорема 5. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы оператор $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ и существовала сильно непрерывная операторная*

функция $T(t)$, удовлетворяющая неравенству $\|T(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}$, $t > 0$, $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u_0 \, dt, \quad u_0 \in X, \tag{24}$$

и в этом случае $T_\alpha(t) = T(t)$.

□ Пусть существует функция $T(t)$ с упомянутыми выше свойствами. После дифференцирования под знаком интеграла в (24) получим (18), а из свойств функции $T(t)$ – соотношение (23). Применяя теорему 4, получим $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$. Пусть $T_\alpha(t)$ – соответствующий разрешающий оператор. Тогда (24) выполняется для обоих операторов $T_\alpha(t)$ и $T(t)$ и, как следует из единственности преобразования Лапласа, $T_\alpha(t) = T(t)$.

Обратное утверждение. Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$, тогда в силу определений 3 и 4 существует разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ такой, что имеет место оценка (5) и, кроме того, $T_\alpha(t)$ удовлетворяет (1), (2), а следовательно, действуя преобразованием Лапласа на (1) и учитывая (2), получим соотношение (24). ■

Теорема 6. *Если A является генератором сильно непрерывной C_0-полугруппы, то $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega^{1/\alpha})$ для каждого $\alpha \in (0, 1)$ с некоторой функцией $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

□ Пусть A генератор непрерывной C_0-полугруппы, тогда по теореме Хилле-Иосиды найдутся постоянные $\omega \in \mathbb{R}$, $C = C(\omega) \geq 1$ такие, что $R(\lambda, A)$ существует для любого $\lambda > \omega$ и

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \lambda > \omega, \ n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{25}$$

Индукцией по n получим следующее представление

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda^\alpha, A) = (-1)^n \lambda^{-n-\alpha} \sum_{k=1}^{n+1} b^\alpha_{k,n+1} (\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A))^k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \ \alpha > 0 \,, \tag{26}$$

где

$$b^\alpha_{1,1} = 1, \quad b^\alpha_{1,n} = 0, \ n = 2, 3, \dots \,, \tag{27}$$

$$b^\alpha_{k,n} = (n - 2 - (k-1)\alpha) b^\alpha_{k,n-1} + \alpha(k-1) b^\alpha_{k-1,n-1}, \quad 1 < k \leq n, \quad n = 2, 3, \dots \,, \tag{28}$$

$$b^\alpha_{k,n} = 0, \quad k > n, \quad n = 1, 2, \dots \,. \tag{29}$$

Действительно, при $n = 1$ находим

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda^\alpha, A) = -\alpha \lambda^{\alpha-1} R^2(\lambda^\alpha, A). \tag{30}$$

С другой стороны, по формулам (27)-(29) получаем $b^\alpha_{1,2} = 0$, $b^\alpha_{2,2} = -\alpha b^\alpha_{2,1} + \alpha b^\alpha_{1,1} = \alpha$, подставляя которые в (26), получим (30).

Предположим теперь, что (26)-(29) верны при $n = m$, то есть, имеет место равенство

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} R(\lambda^\alpha, A) = (-1)^m \lambda^{-m-\alpha} \sum_{k=1}^{m+1} b^\alpha_{k,m+1} (\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A))^k,$$

дифференцируя которое, будем иметь

$$\frac{d^{m+1}}{d\lambda^{m+1}}R(\lambda^\alpha, A) = (-1)^m \sum_{k=1}^{m+1}(-m-\alpha+k\alpha)b^\alpha_{k,m+1}\lambda^{-m-1-\alpha+k\alpha}R^k(\lambda^\alpha, A)+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} k\alpha b^\alpha_{k,m+1}\lambda^{-m-\alpha+k\alpha-1}R^{k+1}(\lambda^\alpha, A)\,. \tag{31}$$

Из формул (26)-(29) получаем следующее представление

$$\frac{d^{m+1}}{d\lambda^{m+1}}R(\lambda^\alpha, A) = (-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+2} b^\alpha_{k,m+2}\lambda^{-m-1-\alpha+k\alpha}R^k(\lambda^\alpha, A) =$$

$$= (-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+2}\left((m-k\alpha+\alpha)b^\alpha_{k,m+1}+\alpha(k-1)b^\alpha_{k-1,m+1}\right)\lambda^{-m-1-\alpha+k\alpha}R^k(\lambda^\alpha, A)\,.$$

Заметим, что в первой сумме последнее слагаемое за счет коэффициента $b^\alpha_{m+2,m+1} = 0$ обращается в ноль, а во второй суммирование начинается с $k = 2$, и, заменяя $k-1$ на k, мы окончательно получим (31). Что и означает справедливость формул (26)-(29).

При $\alpha \in (0,1)$, $k, n \in \mathbb{N}$, $b^\alpha_{k,n} > 0$. Тогда из (26) – (29) имеем при $\lambda > \omega^{1/\alpha}$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda^\alpha, A)\right\| \le \sum_{k=1}^{n+1} b^\alpha_{k,n+1}\lambda^{k\alpha-n-\alpha}\|R^k(\lambda^\alpha, A)\| \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n+1} b^\alpha_{k,n+1}\frac{\lambda^{k\alpha-n-\alpha}}{(\lambda^\alpha-\omega)^k} = (-1)^n C\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\frac{1}{\lambda^\alpha-\omega}\right)\,. \tag{32}$$

(Отметим, что равенство в (32) является частным случаем (26) при $A = \omega$.)

Далее, мы используем соотношение

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha)\,dt = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha-\omega}, \quad \lambda > \omega^{1/\alpha}, \quad \omega > 0\,. \tag{33}$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (33) при $\beta = \alpha$ дает

$$(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\frac{1}{\lambda^\alpha-\omega}\right) = \int_0^\infty t^{n+\alpha-1}e^{-\lambda t}E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha)dt\,.$$

Учитывая асимптотическое поведение (11) функции Миттаг-Леффлера, получим следующее неравенство

$$\sum_{j=0}^\infty \frac{(\lambda-\omega_0)^n}{n!}\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda^\alpha, A)\right\| \le \sum_{j=0}^\infty \frac{(\lambda-\omega_0)^n}{n!}\int_0^\infty t^{n+\alpha-1}e^{-\lambda t}E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} e^{(\lambda-\omega_0)t} E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha)\ dt \le C \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\omega_0 t} (\omega t^\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \exp\left(\omega^{1/\alpha} t\right)\ dt =$$

$$= C_1 \int_0^\infty \exp\left(-\omega_0 + \omega^{1/\alpha} t\right)\ dt < K_0, \qquad \omega_0 > \omega^{1/\alpha}.$$

Таким образом, по теореме 4, $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega^{1/\alpha})$. ■

Чтобы получить представление разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ через резольвенту от A, мы используем формулу обращения Поста-Уиддера, которая определяется следующей леммой (см. [12, с. 241]).

Лемма 3. *Пусть $u(t)$ непрерывная на X функция, определенная при $t > 0$ такая, что $u(t) = O(e^{\gamma t})$ при $t \to \infty$ для некоторого γ и пусть $L[u](\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $u(t)$. Тогда*

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \left(\frac{d^n L[u](\lambda)}{d\lambda^n}\right) \left(\frac{n}{t}\right)$$

и сходимость равномерная на любом компакте из $(0, \infty)$.

Лемма 3, совместно с (26) – (29), которые выполняются при любом $0 < \alpha < 1$, дает следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $0 < \alpha < 1$, A – генератор сильно непрерывной C_0-полугруппы, тогда соответствующий ему разрешающий оператор задачи (1), (2) имеет вид*

$$T_\alpha(t) u_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n+1} b^\alpha_{k,n+1} \left(I - \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha A\right)^{-k} u_0\,, \tag{34}$$

где $b^\alpha_{k,n}$ константы, определенные формулами (27)-(29). Сходимость равномерна по t на любом компактном интервале из $(0, \infty)$ для каждого фиксированного $u_0 \in X$.

Теорема 8. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Если $T_\alpha(t)$ – разрешающий оператор задачи (1), (2), то*

$$A u_0 = \Gamma(\alpha+1) \lim_{t\to 0+} \frac{I^{1-\alpha}_{0+} T_\alpha(t) u_0 - u_0}{t^\alpha} \tag{35}$$

для тех $u_0 \in X$, для которых этот предел существует.

□ Для каждой функции $v(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; X)$ мы имеем

$$\lim_{t\to 0+} v(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{\Gamma(\alpha+1) I^\alpha_{0+} v(t)}{t^\alpha}\ . \tag{36}$$

Выберем $v(t) = I^{1-\alpha}_{0+} D^\alpha_{0+} T_\alpha(t)$ и, используя (1) и (2), в левой части (36) получим

$$\lim_{t\to 0+} I^{1-\alpha}_{0+} D^\alpha_{0+} T_\alpha(t) = \lim_{t\to 0+} I^{1-\alpha}_{0+} A T_\alpha(t) u_0 = A u_0\,. \tag{37}$$

В правой части (36), применяя полугрупповое свойство операторов дробного интегродифференцирования (см. [1] формула (2.21) с. 42) и учитывая формулы (3) и (2.44) из [1], получим

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha}I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{1-\alpha}D_{0+}^{\alpha}T_\alpha(t)=\lim_{t\to 0+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha}I_{0+}^{1-\alpha}I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}T_\alpha(t)=$$

$$=\Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to 0+}\frac{I_{0+}^{1-\alpha}(T_\alpha(t)u_0-t^{\alpha-1}u_0/\Gamma(\alpha))}{t^\alpha}=\Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to 0+}\frac{I_{0+}^{1-\alpha}T_\alpha(t)u_0-u_0}{t^\alpha}\ . \qquad (38)$$

Равенства (37) и (38)доказывают формулу (35). ■

Отметим, что в работе [7] Бажлекова Э. исследовала задачу

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha}u(t)=Au(t),\quad t>0,$$

$$u(0)=u_0,\ u^{(k)}(0)=0,\quad k=1,2,...,n-1,$$

где ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}u(t)=D_{0+}^{\alpha}\left(u(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k u^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right)$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$.

Разрешающий оператор $S_\alpha(t)$ этой задачи связан с резольвентой оператора A соотношением (см. [7], формула (2.6)) $L[S_\alpha(t)](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)$. Поскольку $0<\alpha<1$, то учитывая (6), получим

$$L[I_0^{1-\alpha}T_\alpha(t)](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}L[T_\alpha(t)](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)=L[S_\alpha(t)](\lambda).$$

Следовательно, если $0<\alpha<1$ и существует разрешающий оператор для задачи (1), (2), то существует разрешающий оператор $S_\alpha(t)$ и при этом справедливо равенство $I_0^{1-\alpha}T_\alpha(t)=S_\alpha(t)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Далее, рассмотрим аналитические разрешающие операторы задачи (1), (2). Пусть $\Xi(\omega,\theta)$ – открытый сектор с вершиной $\omega\in\mathbb{R}$ и углом 2θ в комплексной области, симметричный относительно действительной положительной оси, то есть

$$\Xi(\omega,\theta)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg(\lambda-\omega)|<\theta\}\,,$$

и пусть $\Xi_\theta=\Xi(0,\theta)$.

Определение 6. *Разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ задачи (1), (2) называется аналитическим, если $T_\alpha(t)$ допускает аналитическое продолжение в сектор Ξ_{θ_0} при некотором $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.*

Теорема 9. *Пусть $\alpha\in(0,1)$ и $\lambda^\alpha\in\rho(A)$ для каждого $\lambda\in\Xi(\theta_0+\pi/2,\ \omega_0)$. Если для любых $\omega>\omega_0$, $\theta<\theta_0$ существует постоянная $C=C(\theta,\omega)$ такая, что*

$$\|R(\lambda^\alpha,A)\|<\frac{C|\lambda|^{1-\alpha}}{|\lambda-\omega|},\qquad \lambda\in\Xi(\theta+\pi/2,\omega)\,, \qquad (39)$$

то линейный замкнутый плотно определенный оператор A является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$, удовлетворяющего неравенству

$$\|T_\alpha(t)\| \leqslant M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}, \quad t \in \Xi_{\theta_0} \tag{40}$$

с некоторой функцией $M(s) = M_{\theta,\omega}(s)$, принадлежащей $L^1(\mathbb{R}_+)$.

□ Пусть $t \in \Xi_\theta$ для всех $\theta < \theta_0$ и пусть $\delta \in (\theta, \theta_0)$, $\omega > \omega_0$, $\varrho > 0$. Положим

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda^\alpha, A)d\lambda\,, \tag{41}$$

где контур $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$, $\Gamma_1 = \left\{\omega + re^{-i(\pi/2+\delta)},\ \ \varrho \le r < \infty\right\}$, $\Gamma_2 = \{\omega + \varrho e^{i\varphi}$, $|\varphi| \le \pi/2 + \delta\}$, $\Gamma_3 = \left\{\omega + re^{i(\pi/2+\delta)},\ \ \varrho \le r < \infty\right\}$. Направление на контуре определяется движением из нижней полуплоскости в верхнюю. Пусть $\varrho = \dfrac{1}{|t|}$ и $a = \sin(\delta - \theta)$. Тогда из (41), учитывая (39), получим оценку

$$\|T(t)\| \le \frac{C}{2\pi}\int_\Gamma e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|}\ . \tag{42}$$

Интегралы по контурам Γ_1 и Γ_3 равны. Поэтому рассмотрим только один из них, а именно, по контуру Γ_3. Так как $t \in \Xi_\theta$, то есть $t = |t|e^{-i\theta}$, и угол наклона переменной λ на этом контуре фиксирован, то получаем следующие соотношения:

$$\lambda = \omega + re^{i(\pi/2+\delta)},\ \ \mathrm{Re}(\lambda t) = \omega\mathrm{Re}\ t + r\ |t|\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta - \theta\right) = \omega\mathrm{Re}\ t - a\ r\ |t|,$$

$$|\lambda| \le |r - \omega| \le r + \omega,\ \ |\lambda - \omega| = r\,,\ \ ds = dr\,.$$

Поэтому

$$\int_{\Gamma_3} e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|} \le \int_\varrho^\infty e^{\omega\mathrm{Re}t - ar|t|}(r+\omega)^{1-\alpha}\frac{dr}{r} \le e^{\omega\mathrm{Re}\ t}|t|^{\alpha-1}\int_1^\infty e^{-as}(s+\omega|t|)^{1-\alpha}\frac{ds}{s}$$

$$\le M_0 e^{\omega\mathrm{Re}\ t}|t|^{\alpha-1}\left(\int_1^\infty e^{-as}\frac{ds}{s^\alpha} + (\omega|t|)^{1-\alpha}\int_1^\infty e^{-as}\frac{ds}{s}\right). \tag{43}$$

Учитывая, что $t \in \Xi_\theta$, то есть $|t| = \mathrm{Re}\ t\cos\theta$, а также сходимость интегралов в (43), получим

$$\int_{\Gamma_3} e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|} \le M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}. \tag{44}$$

Теперь рассмотрим интеграл по контуру $\Gamma_2 = \{\omega + \varrho e^{i\varphi},\ \ |\varphi| \le \pi/2 + \delta\}$, на котором

$$\lambda = \omega + \varrho e^{i\varphi},\ \ \mathrm{Re}(\lambda t) = \omega\mathrm{Re}\ t + \varrho|t|\cos\varphi,$$

$$|\lambda| \le \omega + \varrho,\ \ |\lambda - \omega| = \varrho,\ \ ds = \varrho\ d\varphi,\ \ \varrho = \frac{1}{|t|}\ .$$

После элементарных преобразований будем иметь

$$\int_{\Gamma_2} e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|} \le 2\int_0^{\pi} e^{\omega \mathrm{Re}\ t} e^{\varrho|t|\cos\varphi}(\omega+\varrho)^{1-\alpha}\, d\varphi \le$$

$$\le 2e^{\omega \mathrm{Re}\ t}\left(\omega+\frac{1}{|t|}\right)^{1-\alpha}\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\, d\varphi \le M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}. \tag{45}$$

Из (42)-(45) следует

$$\|T(t)\| \le M(|t|)e^{\omega_0 \mathrm{Re}\ t}, \qquad \omega_0 > \omega\,.$$

Эта оценка показывает, что интеграл в (41) абсолютно сходится при $t \in \Sigma_\theta$, поэтому $T(t)$ является аналитическим в этой области и выполняется оценка (40).

Далее зафиксируем λ такое, что $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ и возьмем $\varrho < \mathrm{Re}\ \lambda$. Тогда для преобразования Лапласа функции $T(t)$, определенной формулой (41), имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\mu^\alpha, A)\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\mu)t}dtd\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\cup ze^{i\psi}} \frac{R(\mu^\alpha, A)}{\mu-\lambda}\, d\mu\,, \ \ |\arg\psi| \ge \theta\,. \tag{46}$$

В (46) мы использовали теорему Фубини и учли, что интеграл по контуру $re^{i\psi}, |\arg\psi| \ge \theta$ от аналитической убывающей функции $\dfrac{R(\mu^\alpha, A)}{\mu-\lambda}$ стремится к нулю при $r \to \infty$, а следовательно, интегралы по контурам Γ и $\Gamma \cup re^{i\psi}, |\arg\psi| \ge \theta$ совпадают.

Далее, используя теорему Коши, переходим от интеграла по контуру $\Gamma\cup re^{i\psi}$ к интегралу по контуру $C_\rho = \{\mu : |\lambda-\mu| = \rho\} \subset \varrho(A)$. Откуда, после применения интегральной формулы Коши, окончательно получим

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{R(\mu^\alpha, A)}{\mu-\lambda}\, d\mu = R(\lambda^\alpha, A), \qquad C_\rho = \{\mu : |\lambda-\mu| = \rho\} \subset \varrho(A).$$

Таким образом, мы доказали, что выполняются условия теоремы 5 и, следовательно, $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$, а соответствующий разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ равен $T(t)$. ■

Непосредственно из теоремы 9 получим утверждение.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Тогда оператор A является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ при $t \in \Xi_{\theta_0}$, если $\rho(A) \supset \Xi_{\alpha(\pi/2+\theta_0)}$ и для каждого $\theta < \theta_0$ выполняется оценка*

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{C}{|\lambda|}\,, \qquad \lambda \in \Xi_{\alpha(\pi/2+\theta)}\,. \tag{47}$$

Следствие 2. *Если $\varrho(A) \supset \{\lambda : Re\lambda > 0\}$ и для некоторой постоянной C выполняется*

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{C}{Re\ \lambda}\,, \quad Re\ \lambda > 0, \tag{48}$$

то для любого $\alpha \in (0,1)$ оператор A является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ при $t \in \Xi_\theta$, где $\theta = \min\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

□ Зафиксируем $\alpha \in (0,1)$ и $\theta_0 = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2}$. Тогда $\alpha\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right) < \frac{\pi}{2}$ и, таким образом, $\Xi_{\alpha(\pi/2+\theta_0)} \subset \varrho(A)$. Выбирая β такое, что $\alpha\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right) < \beta < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{C}{\mathrm{Re}\lambda} = \frac{C}{|\lambda|\cos\varphi} < \frac{C}{|\lambda|\cos\beta}, \qquad \lambda \in \Xi_{\alpha(\pi/2+\theta)}\,,$$

где $\varphi = \arg\lambda$, и, следовательно, выполняется (47).

Пример 1. При $0 < \alpha < 1$ рассмотрим задачу типа Коши с линейным ограниченным оператором A

$$D^\alpha_{0+}u(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,,$$
$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0+}u(t) = u_0\,.$$

Ее решением является функция $u(t) = T(t)u_0 = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)u_0$. Покажем, что резольвента ограниченного оператора A удовлетворяет оценке (39). Действительно,

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| = \left\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\right\| = \left\|\lambda^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda^\alpha}\right)^n\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{|\lambda|^\alpha - \|A\|} \le \frac{C|\lambda|^{1-\alpha}}{|\lambda - \omega^{1/\alpha}|}\,, \qquad \omega = \|A\|, \;\; \mathrm{Re}\,\lambda > \omega^{1/\alpha}\,.$$

Пример 2. При $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in [0,\pi)$ рассмотрим задачу

$$D^\alpha_{0+}u(x,t) = -e^{i\theta}u_x(x,t)\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0\,,$$
$$D^{\alpha-1}_{0+}u(x,0) = f(x)\,, \quad u(0,t) = 0\,.$$

Положим $X = L^p(0,1)$, $A_\theta = -e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial x}$ и $D(A_\theta)$ состоит из всех измеримых на $(0,1)$ функций $f(x)$ таких, что $f(0) = 0$. Оператор A_0 генерирует сжимающую C_0-полугруппу и

$$\|R(\lambda, A_0)\| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}\,, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0\,. \tag{49}$$

Тогда, используя следствие 2, получим, что A_0 является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ при $t \in \Xi_{\theta_0}$, где $\theta_0 = \min\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

При $\theta \in (0,\pi)$ из (49) имеем

$$\|R(\lambda, A_\theta)\| = \|R(\lambda, e^{i\theta}A_0)\| = \|R(e^{-i\theta}\lambda, A_0)\| \le \frac{1}{|\lambda|\cos(\varphi-\theta)}\,, \quad \lambda \in \Xi_{\pi/2-\theta}\,,$$

где $\varphi = \arg\lambda$. Следовательно, $\Xi_{\pi/2-\theta} \subset \rho(A_0)$ и

$$\|R(\lambda, A_\theta)\| \leq \frac{M(\varepsilon)}{|\lambda|}\,, \quad \lambda \in \Xi_{\pi/2-\theta-\varepsilon}\,.$$

Откуда заключаем, что A_θ является генератором аналитического разрешающего оператора при $t \in \Xi_\psi$, где $\psi = \min\left\{\dfrac{\pi/2-\theta}{\alpha} - \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, если $|\theta| < (1-\alpha)\dfrac{\pi}{2}$.

В дальнейших исследованиях нами будет использована неотрицательная функция (см. [13, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left(tz - \tau z^\nu\right)\, dz\,, & t \geqslant 0\,, \\ 0, \quad t < 0\,, \end{cases} \tag{50}$$

где $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $0 < \nu < 1$, и ветвь функции z^ν выбрана так, что $\mathrm{Re}\ z^\nu > 0$ при $\mathrm{Re}\ z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (50) обеспечивается множителем $\exp\left(-\tau z^\nu\right)$.

Заметим также, что функция $f_{\tau,\nu}(t)$ при $t > 0$ может быть выражена через функцию Райта (см. [1, с. 54])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}\phi\left(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}\right), \qquad \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\ \Gamma(ak+b)}\,,$$

или через более общую функцию типа Райта (см. [3, гл. 1])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1} e^{1,0}_{1,\nu}\left(-\tau t^{-\nu}\right)\,,\ e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)\ \Gamma(\delta-\beta k)}\,,\ \alpha > \max\{0;\beta\}\,,\ \mu, z \in C. \tag{51}$$

Теорема 10. *Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha/\beta$, $\omega \geq 0$. Если $A \in \mathcal{G}^\beta(M,\omega)$ и при этом $M(t) = Ct^{\beta-1}$ $(C > 0)$, то $A \in \mathcal{G}^\alpha(M_1,\omega_1)$ с функцией $M_1(t) = C_1 t^{\alpha-1} \in L^1(R_+)$ и $\omega_1 > \omega^{1/\gamma}$. В этом случае имеет место следующее представление*

$$T_\alpha(t)u_0 = \int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(t) T_\beta(\tau) u_0\ d\tau\,, \tag{52}$$

где функция $f_{\tau,\gamma}(t)$ определяется равенством (50).

Доказательство теоремы приводится в [14].

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ задачи (1), (2) обладает следующими свойствами:*

1) $T_\alpha(t)$ допускает аналитическое продолжение в сектор $\Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}}$,

2) если $\omega = 0$, то $\|T_\alpha(t)\| \leq C|t|^{\alpha-1}$, где $t \in \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}-\varepsilon}$, $C = C(\gamma,\varepsilon)$,

3) если $\omega > 0$, то $\|T_\alpha(t)\| \le C|t|^{\alpha-1}e^{\delta\ \mathrm{Re}\ t}$, где $t \in \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\ \pi/2\}-\varepsilon}$, $\delta = \delta(\gamma,\varepsilon)$, $C = C(\delta,\gamma,\varepsilon)$.

□ Пусть

$$\|T_\beta(t)\| \le M(t)e^{\omega t}, \quad t > 0 \tag{53}$$

и $\Xi = \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}}$. Функция под знаком интеграла в (52) является аналитической при $t \in \Xi$ и $1/(1-\gamma) > 1$ для $0 < \gamma < 1$. Следовательно, интеграл в (52) абсолютно и равномерно сходится на компактных подмножествах сектора Ξ. Отсюда следует, что функция $T_\alpha(t)$, заданная формулой (52), является аналитической функцией в Ξ, что доказывает 1).

Обозначим через C_n положительные константы, не зависящие от t. Пусть $t \in \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}-\varepsilon}$. Тогда (52) и (53) совместно дают оценку

$$\|T_\alpha(t)\| \le \int_0^\infty |f_{\tau,\gamma}(t)|\,\|T_\beta(\tau)\|\ d\tau \le \int_0^\infty |f_{\tau,\gamma}(t)|M(\tau)e^{\omega\tau}d\tau \le$$

$$\le C_2\int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(|t|)\ \tau^{\beta-1}d\tau + C_2\int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(|t|)\ e^{\omega\tau}\ d\tau\,.$$

Учитывая равенства (см. [3, формулы (2.2.3), (2.2.31)])

$$\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(|t|)\ \tau^{\beta-1}\ d\tau = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu\beta)}\ |t|^{\nu\beta-1}, \qquad \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(|t|)\ e^{\omega\tau}\ d\tau = |t|^{\nu-1}\ E_{\nu,\nu}\left(\omega|t|^\nu\right),$$

получаем

$$\|T_\alpha(t)\| \le C_2\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\ |t|^{\alpha-1} + C_2|t|^{\gamma-1}\ E_{\gamma,\gamma}(\omega|t|^\gamma)\,. \tag{54}$$

При $\omega = 0$ из (54) получим оценку

$$\|T_\alpha(t)\| \le C_3\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\ |t|^{\alpha-1} + |t|^{\gamma-1}\right) \le C_4|t|^{\alpha-1},$$

которая и доказывает 2).

При $\omega > 0$ из (54) с учетом (12) следует

$$\|T_\alpha(t)\| \le C_4|t|^{\alpha-1}e^{\omega_0|t|} \le C_4|t|^{\alpha-1}e^{\delta\ \mathrm{Re}\ t}, \quad \omega_0 > \omega^{1/\gamma},$$

что и доказывает свойство 3). ■

Следствие 3. *Пусть функция $M(t)$ такая, что*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}M(t)\ dt \le \frac{1}{\nu^\alpha} \qquad \nu > 0. \tag{55}$$

Если $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, то $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ при любом $\alpha \in (0,1)$.

□ Если $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, то по теореме 4 $(0,\infty) \subseteq \varrho(A)$. Таким образом, учитывая представление (17) и условие (55), получим оценку

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| \le \int_0^\infty e^{-\lambda t}M(t)\ dt \le \frac{1}{\lambda^\alpha}\ , \quad \lambda > 0\,,$$

из которой, в силу теоремы Хилле-Иосиды, следует, что оператор A является генератором сильно непрерывной C_0-полугруппы. Тогда, по теореме 6, $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ для любого $\alpha \in (0,1)$. ■.

Следствие 4. *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ с мажорантой $M(t)$ такой, что*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t} M(t) \le \frac{K}{\nu^\alpha}\,, \quad K > 0\,.$$

Тогда $T_\alpha(t)$ является аналитическим разрешающим оператором.

□ В силу леммы 1, имеют место включение $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ и представление (6)

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\ dt\,.$$

Поскольку

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| \le \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\ dt \right\| \le \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\ \lambda t} M(t)\ dt \le \frac{K}{\mathrm{Re}\ \lambda^\alpha}\,, \quad \lambda > 0\,,$$

то по следствию 2 $T_\alpha(t)$ является аналитическим разрешающим оператором.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equation / Math. Studies / Elsevier, 2006.
3. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2005.
4. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1989. – 25;8. – С.1359-1368.
5. Bajlekova E. Fractional evolution equations in banach spaces / Ph. D. Thesis / Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
6. Clement Ph., Gripenberg G., Londen S.-O. Regularity properties of solutions of fractional evolution equation. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998)/ Lecture Notes in Pure and Appl. Math. – 215 / New York: Dekker, 2001. – P.235-246.
7. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными // ДАН СССР. – 1992. – 326;4. – С.597-600.
8. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. физ., матем. – 2001. – №2. – С.74-77.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.: Наука, 1966.
10. Goldstein J. Semigroups and second order differential equations // J. Functional Analysis. – 1969. – 4. – P.50-70.
11. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications / Basel, 1993.
12. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / М.: Изд-во иностраной литературы, 1962.
13. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967.

14. Авад Х.К., Глушак А.В. О возмущении абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Римана-Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 2010. – 46;6. – С.859-873.

ABOUT SOLVABILITY OF CAUCHY-TYPE PROBLEM FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

A.V. Glushak, T.A. Manaenkova

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru, Manaenkova@bsu.edu.ru

Abstract. The criterion of well-posed solvability of Cauchy-type problem for abstract differential equations with fractional Riemann-Liouville derivative is found.

Key words: differential equation with fractional derivative, abstract Cauchy-type problem, criterion of solvability.

УДК 511.3

О СРЕДНЕМ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА

С.А. Гриценко, Н.Н. Мотькина

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Gritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе доказан теорема, которая является вариантом теоремы Чудакова относительно бинарной задачи Гольдбаха с простыми числами специального вида.

Ключевые слова: аддитивные задачи, бинарная проблема Гольдбаха, теорема Чудакова, простые числа специального вида.

1. Введение. В 1742 г. в письме к Л. Эйлеру Х. Гольдбах высказал гипотезу, что каждое нечетное число, большее семи, может быть представлено в виде суммы трех нечетных простых чисел. В ответном письме Л. Эйлер предположил, что всякое четное число, большее четырех, есть сумма двух нечетных простых чисел. Эти задачи получили названия соответственно *тернарная* и *бинарная проблемы Гольдбаха*.

В 1937 г. И.М. Виноградов полностью решил тернарную проблему Гольдбаха. Утверждение бинарной проблемы Гольдбаха остается до сих пор недоказанным. В 1938 г. Н.Г. Чудаков [1] доказал следующую теорему, решив тем самым бинарную проблему Гольдбаха «в среднем».

Теорема 1. *Пусть $K(X)$ равно числу тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых. Тогда*

$$K(X) \leqslant C_D \frac{X}{\log^D X}\,, \quad 6 \leqslant X < \infty\,,$$

где D – произвольное фиксированное положительное число, C_D — положительная константа, зависящая только от D.

В этой работе изучается вопрос о среднем числа решений бинарной проблемы Гольдбаха в простых числах специального вида

$$a < \{\eta p_i\} < b\,, \quad i = 1, 2\,,$$

где η – произвольное иррациональное алгебраическое число степени n, a и b – произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0, 1]$. Настоящая публикация является продолжением исследований авторов аддитивных задач с простыми числами специального вида, начатого в [2-4]. Отличие состоит в том, что в работах [2-4] η – квадратичная иррациональность. В данной статье представлено краткое изложение доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $K(X)$ – число тех четных чисел между 6 и X, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых специального вида $a < \{\eta p_i\} < b, i = 1, 2, b - a > 1/2$. Тогда при любом фиксированном $D > 0$*

$$K(X) = O(X \log^{-D} X)\,.$$

2. Схема доказательства Теоремы 2. 1. Пусть $v_j = 2j$, где $j = 1, 2, \ldots, N$, $X/2 < v_j \leqslant X$. Определим множество

$$\mathcal{K} = \{v_j \mid v_j \neq p_1 + p_2,\ a < \{\eta p_i\} < b,\ i = 1, 2\}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 S_0^2(y) T(y) dy\,,$$

где

$$S_0(y) = \sum_{\substack{p \leqslant X \\ a < \{\eta p\} < b}} e^{2\pi i y p}, \quad T(y) = \sum_{\substack{j \leqslant N \\ v_j \in \mathcal{K}}} e^{-2\pi i y v_j}.$$

Введем характеристическую функцию $\psi_0(x)$ интервала (a, b) и продолжим ее с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$S_0(y) = \sum_{p \leqslant X} \psi_0(\eta p) e^{2\pi i y p}.$$

В формулировке леммы о «стаканчиках» И.М. Виноградова (см.[5], с. 22) выберем $r = [\log N]$, $\Delta = \log^{-1,5C} N$, $C > 0$ и, кроме того, выберем $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ и переобозначим числа α и β и функцию ψ из формулировки этой леммы, соответственно, как α_1, β_1 и ψ_1. Далее, положив в формулировке той же леммы $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, переобозначим, как и в предыдущем случае, α, β и ψ на α_2, β_2 и ψ_2. Определим

$$J_k = \int_0^1 \left(\sum_{p \leqslant X} \psi_k(\eta p) e^{2\pi i y p} \right)^2 T(y) dy\,, \quad k = 1, 2.$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует, что $J_1 \leqslant I \leqslant J_2$. Для J_1 и J_2 выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы. Разложив предварительно «сглаженную» функцию $\psi_k(x)$ в ряд Фурье, перейдем к суммам

$$\sum_{|m_1| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_2) \int_0^1 S(y + m_1\eta) S(y + m_2\eta) T(y) dy + O(X^{3/2 - \log \pi} N^{1/2})\,,$$

где

$$S(y) = \sum_{p \leq X} e^{2\pi i y p}.$$

2. При $m_1 = m_2 = m$ рассмотрим сумму

$$I_1 = \sum_{|m|\leqslant r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} e^{2\pi i m\eta v_j} \sum_{p_1\leqslant X}\sum_{p_2\leqslant X}\int_0^1 e^{2\pi i y(p_1+p_2-v_j)}dy\,.$$

Для этой суммы получим представление

$$I_1 = \sum_{|m|\leqslant r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} e^{2\pi i m\eta v_j} I_{2,1}(X,j)\,,$$

где $I_{2,1}(X,j)$ – число решений уравнения $p_1+p_2=v_j$ в простых числах p_1,p_2. Поскольку при $m\neq 0$ ([6], с. 16)

$$c_k(m) = i\frac{e^{-2\pi i m\beta_k}-e^{-2\pi i m\alpha_k}}{2\pi m}\left(\frac{e^{\pi i m\Delta/r}-e^{-\pi i m\Delta/r}}{2\pi i m\Delta/r}\right)^r\,,$$

то для $0<|m|<\Delta^{-1/2}$

$$c_k^2(m) = e^{-2\pi i m(a+b)}\frac{\sin^2\pi m(b-a)}{\pi^2m^2}\left(1+O(\Delta^{1/2})\right)\,.$$

Тогда

$$I_1 = \sum_{\substack{j\leqslant N\\ v_j\in\mathcal{K}}} I_{2,1}(X,j)(\sigma(v_j,a,b)+O(\Delta^{1/2})),$$

где

$$\sigma(v_j,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta v_j-(a+b))}\frac{\sin^2\pi m(b-a)}{\pi^2m^2}\,.$$

Известно [6, с. 224], что

$$I_{2,1}(X,j)\sim\sum_{k+m=v_j}\frac{1}{\log k\log m}\cdot\prod_{p\nmid v_j}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p|v_j}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\gg\frac{X}{\log^2 X}\,.$$

Ранее, нами изучено поведение ряда $\sigma(v_j,a,b)$ [7] и для него получено равенство

$$\sigma(v_j,a,b) = (b-a)^2+\{\eta v_j-a-b\}^2-\{\eta v_j-a-b\}-$$

$$-0,5(\{\eta v_j-2a\}^2-\{\eta v_j-2a\}+\{\eta v_j-2b\}^2-\{\eta v_j-2b\}).$$

При фиксированной разности $b-a$ построим графики (рис. 1, 2), где $t=\eta v_j-a-b$. Если $b-a>1/2$, то сумма ряда $\sigma(v_j,a,b)>0$.

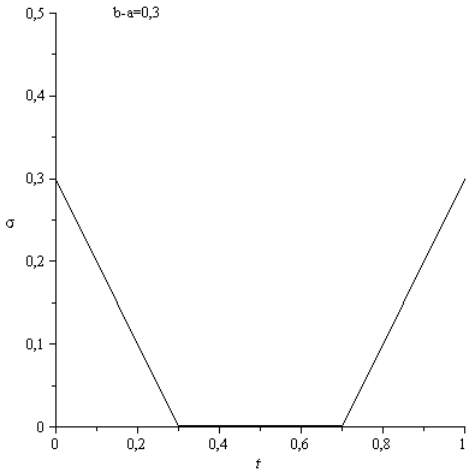


Рис. 1. $0 \leqslant b-a \leqslant 1/2$.

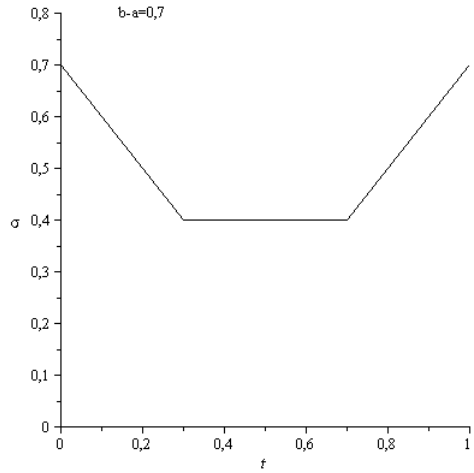


Рис. 2. $1/2 < b-a \leqslant 1$.

3. Если $m_1 \neq m_2$, то положим, для определенности, что $m_1 < m_2$. Сделаем замену $t = y + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1-1/\tau)$, где $\tau = X\log^{-B} X$, $B > 2C+8$. Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 – «большие» дуги (множество точек t, находящихся близко к рациональным числам с малыми знаменателями $1 \leqslant q \leqslant \log^A X$, $A > 2C+8$) и E_2 – «малые» дуги. На «малых» дугах известна оценка для $|S(t)|$. На «больших» дугах получаем оценку для $|S(t+m\eta)|$. Пользуясь неравенством Коши, находим

$$(\int_{E_1} + \int_{E_2})|S(t)||S(t+(m_2-m_1)\eta)||T(t-m_1\eta)|dt \ll$$

$$\ll \sqrt{\pi(X)\pi(N)}(\max_{t\in E_1}|S(t+m\eta)| + \max_{t\in E_2}|S(t)|) \ll X^2\log^{-C} X\,.$$

4. При выборе $A = D+12$, $B = 2D+14$, $C = D+2$ получаем требуемую асимптотическую формулу.

Литература

1. Чудаков Н.Г. О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых // Изв. АН СССР, Серия математич. – 1938. – №1. – С.25-40.
2. Мотькина Н.Н. Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2009. – 52;6. – С.413-417.
3. Мотькина Н.Н. Задача Хуа Ло-кена с простыми числами специального вида // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2009. – 52;7. – С.497-500.
4. Мотькина Н.Н. О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – № 5(76);18. – С.83-87.
5. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм / М.: Наука, 1983.
6. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983.
7. Мотькина Н.Н. О некоторых особых рядах / Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 17-21 окт. 2011 г.) / Белгород: ИПК НИУ БелГУ. – 2011. – С.44-45.

ABOUT AVERAGE NUMBER OF SOLUTIONS OF BINARY GOLDBACH's PROBLEM

S.A. Gritsenko, N.N. Mot'kina

Abstract. The Tchudakoff's type theorem concerned the Goldbach binary problem with given primes is proved.

Keywords: additive problems, binary problem of Goldbach, Tchudakoff's theorem, primes of special type.

УДК 511.512

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения с квадратичными формами. При доказательстве используется оценка для суммы сумм Клостермана.

Ключевые слова: аддитивные задачи, число решений, асимптотическая формула, суммы Клостермана.

1. Введение. В 1927 г. А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачу получения асимптотической формулы для числа решений диофантового уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n. \tag{1}$$

Эта задача получила название аддитивной проблемы делителей Ингама.

В 1931 году Т. Эстерман [1] для числа решений $J(n)$ уравнения (1) круговым методом вывел асимптотическую формулу

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)\,,$$

где $P_2(t)$ – многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$.

Оценка остаточного члена этой формулы уточнялась многими авторами.

Так в 1979 году Д.И. Исмоилов, развивая метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. Практически одновременно с Исмоиловым другим методом ту же оценку остатка получил Д.Р. Хиз-Браун.

В 2006 году Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [2] вывели новую оценку для $R(n)$: $R(n) \ll n^{3/4}\ln^4(n)$.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [3], использую оценку суммы сумм Клостермана, доказали, что $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$.

В математической литературе известны многочисленные аналоги данной задачи. Нас заинтересовал один из таких аналогов. Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_i(\bar{m}) = \frac{1}{2}\bar{m}^t A_i \bar{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i, $\det A_i = -\delta_F$, $i = 1, 2$. Пусть

$$I(n,h) = \sum_{Q_1(\bar{m})-Q_2(\bar{k})=h} e^{-(Q_1(\bar{m})+Q_2(\bar{k}))/n}\,. \tag{2}$$

Ставится вопрос о получении асимптотической формулы для $I(n,h)$. Данная задача рассматривалась в статье [4], в которой выведена асимптотическая формула для числа решений уравнения в общем случае. В настоящей работе изучается один частный случай, для которого удается улучшить оценку остатка.

Теорема. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $\delta_F = -p$, $p \geq 3$ – простое число, $n \in N$, h – натуральное число, такое, что $h \equiv 0 \pmod p$, $h \leqslant n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n,h) = \frac{2\pi^2 n}{p} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q,l,\overline{0}) G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{7/12+\varepsilon}), \tag{3}$$

где $G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i = 1,2)$ *– двойные суммы Гаусса и сумма ряда положительна.*

Доказательство проводится круговым методом с применением оценок А.Вейля для суммы Клостермана и Х.Иванца для суммы сумм Клостермана.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (Равенства для сумм Гаусса). *Пусть $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, $d \equiv 1 \pmod 4$, $\delta_F = -p$ – дискриминант поля F.*
1) Если $(q,p) = 1$, то $G_1(q,l,\bar{m}) = \exp(-2\pi i l^* p^* Q_1'(\bar{m})/q) G_1(q,l,\overline{0})$, причем

$$G_1(q,l,\overline{0}) = \begin{cases} q\left(\dfrac{-p}{q_1}\right)(-1)^{(1+p)\alpha/4} & \text{, если } q = 2^{\alpha} q_1, (q_1,2) = 1, \\ q\left(\dfrac{-p}{q}\right) & \text{, если } (q,2) = 1. \end{cases}$$

2) Если $(q,p) = p$, то $G_1(q,l,\bar{m}) = \varepsilon(p) q \sqrt{p} \chi(Q_1'(\bar{m}); p, 0) \left(\dfrac{a_1}{p}\right)\left(\dfrac{l}{p}\right) \exp(-2\pi i l^* Q_1'(\bar{m})/pq)$, где

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & \text{если } p \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

a_1 – коэффициент при m_1^2 квадратичной формы $Q_1'(\bar{m}) = \frac{1}{2}\bar{m}^t p A_1^{-1} \bar{m}$.

Доказательство см. [5].

Лемма 2 (Оценка суммы сумм Клостермана). *Пусть T, U, V, p, ε – положительные действительные числа, a_u и b_v – последовательности комплексных чисел, $S(u,v,q)$ – сумма Клостермана. Тогда*

$$\left| \sum_{U \leqslant u \leqslant 2U} a_u \sum_{V \leqslant v \leqslant 2V} b_v \sum_{\substack{q \leqslant \sqrt{\frac{uv}{UV}} T, \\ q \equiv 0 \pmod p}} \frac{1}{q} S(u,v,q) \right| \leqslant c T^{\varepsilon} \left(\frac{1}{p} (UV)^{1/2} + (UVT)^{1/6} \right) \times$$

$$\times\left(\sum_{U\leqslant u\leqslant 2U}|a_u|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{V\leqslant v\leqslant 2V}|b_v|^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство см. в [7, с. 234].

3. Схема доказательства теоремы.

1. Получение главного члена асимптотической формулы не отличается от общего случая, рассмотренного в работе [4].

2. Более подробно остановимся на оценке остатков. Рассмотрим один из них. Пусть θ – сколь угодно малое положительное число.

$$R=\sum_{q\leq N}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]-1}\Phi_1\Phi_2e^{-2\pi ihx}dx\,,$$

где

$$\Phi_1=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{n^{-1}-2\pi ix}\sum_{\substack{\bar m\in\mathbb{Z}^2\\ \bar m\neq\overline{0}}}\exp\Big(-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\bar m)}{n^{-1}-2\pi ix}\Big)G_1(q,l,\bar m)\,,$$

$$\Phi_2=\frac{2\pi}{q^2\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{n^{-1}+2\pi ix}\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}}\exp\Big(-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2'(\overline{k})}{n^{-1}+2\pi ix}\Big)G_2(q,-l,\overline{k})\,.$$

Функции Φ_1 и Φ_2 содержат суммы Гаусса. Вычислим произведение соответствующих сумм Гаусса, используя равенства из леммы 1. Имеем

$$G_1(q,l,\bar m)G_2(q,-l,\overline{k})=\varepsilon_2(q,p,a_1,a_2,\bar m,\overline{k})q^2e^{-2\pi il^*d_1(Q_1'(\bar m)-Q_2'(\overline{k}))/q}\,,$$

где

$$\varepsilon_2(q,p,a_1,a_2,\overline{m},\overline{k})=\begin{cases}1\,, & \text{если } (q,p)=1, 2\not| q\,,\\ (-1)^{\frac{(1+p)\alpha}{2}}, & \text{если } (q,p)=1, 2^\alpha||q,\\ p\Big(\dfrac{a_1}{p}\Big)\Big(\dfrac{a_2}{p}\Big)\chi(Q_1'(\bar m)-Q_2'(\overline{k});p,0), & \text{если } (q,p)=p\end{cases}$$

и

$$d_1=\begin{cases}p^*, & \text{если } (q,p)=1,\\ 1/p, & \text{если } (q,p)=p.\end{cases}$$

Разобьем сумму, определяющую R, на две суммы:

$$R=\sum_{q\leq n^{1/2-\theta}}\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]-1}+\sum_{n^{1/2-\theta}<q\leq N}\int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]-1}=\sum R1+\sum R2.$$

Так как $q \leqslant n^{1/2-\theta}$, $0 \leqslant x \leqslant [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O\Big(e^{-cn^{2\theta}}\Big),\ \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O\Big(e^{-cn^{2\theta}}\Big).$$

Тогда

$$\sum\nolimits_{R1} \ll n^{3/2-\theta+3\varepsilon} e^{-cn^{2\theta}} \sum_{q\le n^{1/2-\theta}} q^{-5/2} \ll n^{7/12+\varepsilon}\ .$$

3. Перейдем к оценке $\sum_{R2}$.

$$\sum\nolimits_{R2} = \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \sum_{n^{1/2-\theta}<q\le N} \varepsilon_2(q,p,a_1,a_2,\overline{m},\overline{k}) q^{-1} S(-h,-d_1(Q_1'(\overline{m})-Q_2'(\overline{k})),q) f(q),$$

где

$$f(q) = q^{-1} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \exp\left(-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\overline{m})}{n^{-1}-2\pi ix}\right) \exp\left(-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2'(\overline{k})}{n^{-1}+2\pi ix}\right) \frac{e^{-2\pi ihx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\ .$$

$$f(q) = O(e^{-c(Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))}n/q), \quad f_q'(q) = O((Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))e^{-c(Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))}n/q^2)\,,$$

где c – постоянная.

Сумму по q перепишем в виде: $\sum\limits_q = \sum_{q\not\equiv 0 \pmod p} + \sum_{q\equiv 0 \pmod p} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$.

1) Пусть $q \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда $|\varepsilon_2(q_1,p,a_1,a_2,\overline{m},\overline{k})| = 1$, $d_1 = p^*$. По условию $p \mid h$, обозначим через $h_1 = h/p$, h_1 – целое число, $v_1 = Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k})$. Тогда

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{\substack{i=1\\ i=p}} \left| \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{n^{1/2-\theta}<q\le N\\ q\equiv 0 \pmod i}} q^{-1} S(-h_1,-v_1,q) f(q) \right|.$$

К каждой из сумм по q применим преобразование Абеля. Положим в лемме 2, что $u = -h_1, v = -v_1, |a_u| = 1, |b_v| = e^{-cv_1}n^{1/2+\varepsilon}, U = V = n^{\varepsilon}, T = N$ и p равно одному из чисел $1, p$. В результате получаем

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} f(N) \sum_{\substack{q\le N\\ q\equiv 0 \pmod i}} q^{-1} S(-h_1,-v_1,q) \ll n^{7/12+\varepsilon}\ .$$

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} f_q'(q) \sum_{\substack{t\le q\\ t\equiv 0 \pmod i}} q_1^{-1} S(-h_1,-v_1,t) \ll q^{-11/6+\varepsilon} n^{1+\varepsilon}\ .$$

Проинтегрировав последнюю оценку по q в пределах $[n^{1/2-\theta};\infty)$, в итоге получим $\sum\nolimits_1 = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

2) Пусть $q \equiv 0 \pmod p$. Тогда $|\varepsilon_2(q_1, p, a_1, a_2, \bar{m}, \overline{k})| = p$ и не зависит от q, $d_1 = p^{-1}$. Обозначим через $h_1 = h$, $v_1 = (Q_1'(\bar{m}) - Q_2'(\overline{k}))/p$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum\nolimits_2 \ll \left| \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} p \sum_{\substack{n^{1/2-\theta}<q\le N\\ q\equiv 0 \pmod p}} q^{-1} S(-h_1, -v_1, q) f(q) \right|.$$

К суммам по q применим преобразование Абеля и для получения оценок используем Лемму 2. Все рассуждения аналогичны тем, что проводились для случая 1). В результате можно утверждать, что $\sum_2 = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

Таким образом, нами показано, что $\sum_{R2} = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

Литература

1. Esterman T. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. reine und ang. Math. – 1931. – №164. – P.173-182.
2. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об аддитивной проблеме делителей Ингама // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2006. – №5. – С.32-35.
3. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. An additive divisor problem // J. London Math. Soc. – 1982. – 26(2). – P.1-14.
4. Куртова Л.Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, Математика. – 2007. – №(57). – С.107-122.
5. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. – 2003. – 4;2. – С.53-67.
6. Deshouillers J.-M., Iwaniec, H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – 70. – P.219-288.

ABOUT THE NUMBER OF SOLUTION OF AN EQUATION WITH SQUARES

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of the solution number of the equation with squares is obtained. It is done by circular method with using the estimate for sum of Kloosterman's sums.

Key words: additive problems of number theory, number of solution, asymptotic formula, Kloosterman's sums.

УДК 517.9

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ [6)]

Л.Н. Ляхов, О.И. Попова

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail:
lyakhov@box.vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru

Аннотация. Приведен вывод формулы связи преобразования Радона радиальных функций и преобразования Радона-Киприянова K_γ функции одной переменной. Получена формула K_γ-преобразования радиальной в $\mathbb{R}^n$ функции в виде $K_{\gamma+n-1}$-преобразования функции одной переменной. Получена формула обращения преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной. Результаты обобщают и уточняют результаты, полученные ранее одним из авторов.

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радона-Киприянова, радиальные функции.

1. Преобразование Радона как частный случай преобразования Радона-Киприянова

В качестве введения в тему исследований рассмотрим вопрос о том, как преобразование Радона центрально симметричной функции сводится к преобразованию Радона-Киприянова функции одной переменной. Преобразования Радона $R[f]$ (см. [3]) и Радона-Киприянова $K_\gamma[f]$ (введено в [4]) функции f определяются соответственно формулами,

$$R[f](\Theta;p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\delta(p-\langle x,\Theta\rangle)\,dx = \int\limits_{\Gamma} f(x)\;d\Gamma,$$

$$K_\gamma[f](\Theta;p) = K_\gamma[f](p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\,\Pi^\nu_{x_1}\delta(p-\langle x,\Theta\rangle))\,x_1^\gamma\,dx\,, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}\,, \quad \gamma>0\,. \qquad (1)$$

где $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^n_+=(0,+\infty)\times\mathbb{R}_{n-1}$, $\langle x,\Theta\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,\Theta_i$, — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, $p=\langle x,\Theta\rangle$ — уравнение плоскости Γ с нормальным вектором Θ $(|\Theta|=1)$, находящейся на расстоянии $|p|$ от начала координат, $\delta(P)$ — δ-функция сосредоточенная на $(n-1)-$мерной поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}^n$, а в последнем равенстве символ $\Pi^\nu_{x_1}$ обозначает действие оператора Пуассона порядка ν по переменной x_1 (определение этого оператора приведено далее).

Известно, что преобразование Радона имеет смысл только для функций многих переменных и это преобразование радиальных функций представляет собой функцию

[6] В этой работе обобщены и частично уточнены некоторые из результатов, анонсированные ранее в [1] и [2].

одной переменной, например (см. [3], стр. 28),

$$R[e^{-|x|^2}](\Theta;p) = \pi^{\frac{n-1}{2}}\, e^{-p^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Независимость правой части равенства (2) от вектора нормали Θ (при $|\Theta| = 1$) к плоскости Γ, очевидно, есть следствие центральной симметрии, поскольку преобразуемая функция не зависит от угловых координат точки. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Преобразование Радона радиальной функции f, интегрируемой в $\mathbb{R}^n$, совпадает (с точностью до константы $|S_1(n)|$, равной площади единичной сферы в $\mathbb{R}^n$) с преобразованием Радона-Киприянова индекса $\gamma = n-1$ той же функции, рассматриваемой как функции одной (а именно радиальной) переменной:*

$$R[f(|x|)](\Theta;p) = R[f(|x|)](p) = |S_1(n)| K_{n-1}[f(r)](p). \tag{3}$$

□ Доказательство заключается в следующем. Преобразование координат вращением, при котором направляющий вектор оси x_1 перейдет в единичный вектор Θ, приводит к следующему представлению преобразования Радона радиальной (в $\mathbb{R}^n$) функции f:

$$R[f](\Theta;p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, \delta(p - \langle x, \Theta\rangle)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, \delta(p - x_1)\, dx.$$

Из этой формулы уже следует, что преобразование Радона радиальной функции не зависит от единичного вектора нормали Θ к плоскости Γ. Поэтому далее левую часть этого равенства будем записывать в виде $R[f](p)$. Сферическое преобразование координат удобно ввести по формулам

$$\begin{array}{ll} x_1 = & r\,\cos\,\varphi_1, \\ x_2 = & r\,\sin\,\varphi_1\,\cos\,\varphi_2\,, \\ \dots & \dots \\ x_{n-1} = & r\,\sin\,\varphi_1\,\sin\,\varphi_2 \dots \sin\,\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = & r\,\sin\,\varphi_1\,\sin\,\varphi_2 \dots \sin\,\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}, \end{array}$$

что приводит к выражению

$$R[f](p) = \int\limits_0^\infty f(r)\, r^{n-1}\, dr\, \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \delta(p - r\,\cos\,\varphi_1\rangle)\, \sin^{n-2}\,\varphi_1\, d\varphi_1 \int\limits_0^\pi \sin^{n-3}\,\varphi_2\, d\varphi_2\, \dots \int\limits_0^\pi \sin\,\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}\,.$$

Поделим и умножим левую часть этого равенства на

$$\int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\,\varphi_1\, d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Выделив из полученного выражения площадь единичной сферы $|S_1(n)|$ в $\mathbb{R}^n$, получим

$$R[f](p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\,\varphi\; f(r)\,\delta(p - r\,\cos\varphi)\; d\varphi\; r^{n-1} dr. \qquad (4)$$

Здесь, сокращая запись, воспользуемся определением оператора Пуассона (см. [5], [6]) порядка $\nu = (\gamma - 1)/2$, действующего по переменной r следующим образом

$$\Pi_r^\nu f(r,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(r\cos\alpha\,,\,t)\;\sin^{\gamma-1}\alpha\; d\alpha\,.$$

Тогда

$$R[f](p) = |S_1(n)| \int\limits_0^\infty f(r)\;\Pi_r^\nu \delta(x-r)\;r^{n-1}\,dr, \quad \nu = \frac{n-1}{2}\;, \quad n \geq 2. \qquad (5)$$

Определение преобразования Радона-Киприянова (1) мы запишем применив его формально к функции одной переменной:

$$K_\gamma[f](\Theta;p) = K_\gamma[f](p) = \int\limits_0^\infty f(x)\,\Pi_x^\nu \delta(p-x)\,x^\gamma\,dx, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}\;, \quad \gamma > 0.$$

Теперь, сравнивая правую часть этого равенства с правой частью равенства (5) (или, что тоже самое, (4)), получим формулу (3), которая связывает преобразования Радона радиальной функции с преобразованием Радона-Киприянова четной функции одной переменной, когда $\gamma = n-1$ — натуральное число. ■

Следует отметить, что в работе [4] (и в [7], [8]) не предполагалось применять K_γ-преобразование к функциям одной переменной, хотя никаких принципиальных трудностей введения такого преобразования не было, но было ясно, что появится некоторая специфика и даже простота в определениях и формулах, и это надо рассматривать отдельно. Необходимость изучения K_γ-преобразований функций одной переменной связана не только с исследованием преобразования Радона радиальных функций, но и с решением задачи о носителе K_γ-преобразования (см. [9]). В следующем пункте проведены необходимые исследования и уточнена указанные выше формулы (3) или (4) и (5) (см. Теорему 3 и ее следствие).

Сначала приведем пример вычисления преобразования Радона радиальной функции через преобразование Радона-Киприянова функции одной переменной. Снова вернемся к (4), где совершим антиполярное преобразование координат

$$z_1 = r\;\cos\,\alpha, \quad z_2 = r\;\sin\,\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad r^{n-1}\,\sin^{n-2}\,\alpha\,dr = z_2^{n-2}\;dz_1\,dz_2.$$

Имеем

$$R[f](\Theta;p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left((n-1)/2\right)\Gamma\left(1/2\right)} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2}\,dz_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)\;\delta(p-z_1)\,dz_1 =$$

$$= |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left((n-1)/2\right)\Gamma\left(1/2\right)} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2} \, f\Big(\sqrt{p^2+z_2^2}\Big) \, dz_2 \, . \qquad (6)$$

Отметим, что формулы (3), (4), (5) и (6) эквивалентны и формула (6) получена из определения преобразования Радона-Киприянова (1) заменой функции $f = f(x)$, $x \in R_1$ на функцию вращения

$$\tilde{f} = f(z_1, z_2) = f\Big(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Big).$$

Этот подход легко применить для вычисления преобразования Радона радиальной функции. В частности если

$$f(x) = e^{-|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \, ,$$

то

$$R[f](\Theta; p) = |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2} \, e^{-z_1^2-z_2^2} \, \delta(p-z_1) \, dz_1 \, dz_2 =$$

$$= |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \, e^{-p^2} \int\limits_0^{+\infty} z_2^{n-2} \, e^{-z_2^2} \, dz_2.$$

Последний удвоенный интеграл представляет собой Г-функцию Эйлера от аргумента $(n-1)/2$ и, следовательно,

$$R[f](\Theta; p) = |S_1(n)| \, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \, e^{-p^2} \, \cdot \, \frac{1}{2} \, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \pi^{\frac{n-1}{2}} \, e^{-p^2}.$$

Таким образом получили формулу (2).

Надо отметить, что приведенная схема вычислений классического преобразования Радона радиальных функций не только сокращает рассуждения. Важнее то, что эта схема применима к более общему преобразованию (Радона-Киприянова), а это дает возможность получить новые формулы, которые не известны из классической теории. В работе [1] показано, что для индекса $\gamma \in (0, 2]$ вычисление преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной, сводится к вычислению дробного интеграла от $f_1(t) = C \, f(\sqrt{x})$. Это позволило применить методы обращения интегралов дробного порядка для получения формул обращения преобразования Киприянова-Радона. В настоящей работе подобный результат получен в общем случае $\gamma > 0$ и другим путем.

2. Преобразование Радона-Киприянова радиальных функций

Через $\mathbb{R}^n_+$ будем обозначать евклидово полупространство точек $\mathbb{R}^n$, определенное неравенством $x_1 > 0$, и пусть γ фиксированное положительное число, а функция $f =$

$f(|x|)$ — радиальная функция, абсолютно интегрируемая с весом x_1^γ, $\langle x, \xi\rangle = p$ — уравнение гиперплоскости, лежащей на расстоянии p от начала координат, с единичным вектором нормали ξ.

Преобразование Радона-Киприянова радиальных функций определяется следующим соотношением:

$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{R_n^+} f(|x|)\Pi_{x_1}^\nu \delta(p - \langle x, \xi\rangle) x_1^\gamma dx =$$

$$= C(\gamma) \int\limits_{R_n^+} f(|x|) \int\limits_0^\pi \delta(p - x_1 \cos\alpha \xi_1 - \langle x', \xi'\rangle) \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha\, x_1^\gamma dx,$$

где $x' = (x_2, .., x_n), \xi' = (\xi_2, .., \xi_n)$, а $C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ — константа, нормирующая оператор Пуассона.

Далее используем процедуру вращения. Для этого сделаем замену переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \cos\alpha = z_1 \\ x_1 \sin\alpha = z_2, \end{array} \right| , \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad z_1 \in (-\infty, +\infty), \quad z_2 \in (0, +\infty),$$

$$z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad |z| = |x| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2}\ .$$

В результате, находим

$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(|z|)\delta(p - z_1\xi_1 - \langle x', \xi'\rangle) z_2^{\gamma-1} dz.$$

Введем обозначение $\overline{\xi} = (\xi_1, 0, \xi')$ для вектора, лежащего в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Тогда

$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(|z|)\delta(p - \langle z, \overline{\xi}\rangle) z_2^{\gamma-1} dz.$$

Скалярное произведение инвариантно относительно вращений. В данном случае вращение необходимо провести в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Такое вращение не изменит координаты z_2 и, следовательно, веса z_2^γ под знаком интеграла в полученном равенстве. Поворот совершим вокруг оси z_2 так, чтобы направление оси z_1 совпало с направлением вектора $\tilde{\xi}$. Новые координаты вектора $\overline{\xi}$ обозначим $\tilde{\xi} = (|\xi|, 0, 0, .., 0)$. Ясно, что $|\tilde{\xi}| = |\overline{\xi}| = |\xi| = 1$. Имеем

$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(|z|)\delta(p - z_1) z_2^{\gamma-1} dz.$$

Теперь произведем сферическое преобразование координат (как и раньше, первую координату положим равной $z_1 = r\cos\alpha_1$,). Тогда

$$K_\gamma[f](\xi;p) = K_\gamma[f](p) = C(\gamma)\int\limits_0^{+\infty} f(r)r^{n+\gamma-1}dr \int\limits_{S_1(n+1)} \delta(p-r\cos\alpha_1)\ \sin^{\gamma-1}\alpha_1\ \cos^{\gamma-1}\alpha_2\ dS,$$

где dS — элемент поверхности единичной сферы в евклидовом пространстве размерности $n+1$:

$$dS = sin^{n-1}\alpha_1\, d\alpha_1\ \sin^{n-2}\alpha_2\, d\alpha_2\ \ldots \sin\alpha_{n-1}\, d\alpha_{n-1}\ d\alpha_n.$$

Следовательно

$$K_\gamma[f](p)=C(\gamma)\int\limits_0^{+\infty} f(r)r^{n+\gamma-1}dr \int\limits_0^{\pi} \delta(p-r\cos\alpha_1)\ \sin^{n+\gamma-2}\alpha_1 d\alpha_1 \int\limits_0^{\pi} \cos^{\gamma-1}\alpha_2\ \sin^{n-2}\alpha_2\, d\alpha_2\ \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-3}\alpha_3 d\alpha_3\ \ldots \int\limits_0^{\pi} d\alpha_n\,.$$

Это выражение умножим и разделим на

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{n+\gamma-2}\ \varphi_1\ d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\gamma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2}\right)}\ .$$

Теперь можно воспользоваться формулой «площади весовой сферы» (см [6], формула (1.2.5))

$$|S_1(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} \prod_{j=1}^{m} \Theta_j^{\gamma_j} dS = \frac{\pi^{\frac{n-m}{2}}}{2^{m-1}} \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}\ ,$$

где надо положить $m=1$, $\gamma_1=\gamma$. Тогда

$$K_\gamma[f](p) = |S_1(n)|_\gamma \int\limits_0^{+\infty} f(r)\Pi_r^\nu(p-r)r^{n+\gamma-1}dr\,, \quad \nu = \frac{n+\gamma-1}{2}\ .$$

Здесь, справа, снова видим «одномерное» преобразование Радона-Киприянова, но уже с новым индексом. Итак, получен следующий результат.

Теорема 2. *Преобразование Радона-Киприянова индекса γ радиальных функций не зависит от вектора нормали к плоскости интегрирования ξ и представляет собой одномерное преобразование Радона-Киприянова индекса $n+\gamma-1$, умноженное на площадь весовой полусферы $|S_1^+(n)|_\gamma$:*

$$K_\gamma[f](p) = |S_1^+(n)|_\gamma\ K_{\gamma+n-1}[f](p).$$

Эту формулу интересно сравнить с формулой «преобразование Радона радиальной функции» — с формулой (3). Ясно, что $2\,|S_1^+(n)|_\gamma\big|_{\gamma=0} = |S_1(n)|$. Но тогда

$$K_0[f] = |S_1(n)|\; K_{n-1}[f](p) = R[f].$$

Вообще говоря, преобразованире K_0 формулой (1) не определено. Полученное равенство справедливо лишь для функций радиальных в евклидовом пространстве размерности $n \geq 2$.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что в теории преобразования Радона-Киприянова, а также для приложений данной теории необходимы знания свойств преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной. Некоторые из них приведены в следующем разделе.

3. Преобразование Радона-Киприянова функций одной переменной. Связь с преобразованиями Фурье, Ганкеля и операторами преобразования Пуассона-Сонина

Пусть $f = f(x)$ абсолютно интегрируемая по $(0,\infty)$ с весом x^γ функция, число γ положительно и фиксировано. Через $\tilde{f} = \tilde{f}(z)$ будем обозначать функцию

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_1, z_2) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right).$$

Преобразование Радона-Киприянова (1) функции одной переменной $f = f(x)$ легко трансформируется по схеме получения равенства (6) в следующее интегральное выражение

$$K_\gamma[f](p) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\{z_1=p\}^+} \tilde{f}(z)\, z_2^{\gamma-1}\, d\Gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{p_1^2 + z_2^2}\right)\, z_2^{\gamma-1}\, dz_2, \tag{7}$$

где $\{z_1 = p\}^+$ — полупрямая в $\mathbb{R}^2_+ = \{z = (z_1, z_3),\ z_2 > 0\}$, заданная уравнением $z_1 = p$.

Очень важной в теории преобразований Радона-Киприянова является формула связи с преобразованиями Фурье и Фурье-Бесселя (см. [4], [7], [8]). В нашем случае роль прямого и обратного преобразований Фурье-Бесселя должно выполнить прямое и обратное преобразования Ганкеля (см. [5]), соответственно

$$H_\gamma[f](\xi) = F_B[f](\xi) = \int\limits_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(r\xi)\, f(x)\; x^\gamma\, dx,$$

$$H_\gamma^{-1}[f](x) = \left[2^{\gamma-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1} H_\gamma[f](x).$$

Ядром этих преобразований Ганкеля служит так называемая j-функция Бесселя j_ν , связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}\ J_\nu(t).$$

Хорошо известно представление j-функций Бесселя в виде интеграла Пуассона ([5])

$$j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \Pi^\gamma \exp[-ix].$$

Отсюда получим следующее представление преобразования Ганкеля:

$$H_\gamma[u](\xi) = C(\gamma)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\ e^{-ix\xi\cos\alpha}\ \sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,f(x)\ x^\gamma\,dx\,,\quad C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\ .$$

Антиполярное преобразование координат

$$z_1 = x\ \cos\alpha,\quad z_2 = x\ \sin\alpha,\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\quad x\,dx\,d\alpha = dz_1dz_2$$

приводит к выражению

$$H_\gamma[f](\xi) = C(\gamma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz_1\xi}\ dz_1\int\limits_0^{+\infty}\ f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)\ z_2^{\gamma-1}\,dz_2\,.$$

Заменив z_1 на p и воспользовавшись определением (7), получим

$$H_\gamma[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi}\ K_\gamma[f](p)\ dp = F\left[\,K_\gamma[f](p)\right](\xi),$$

где через F обозначено преобразование Фурье. Эта формула устанавливает связь между преобразованиями Ганкеля, Фурье и одномерным преобразованием Радона-Киприянова. Применение обратного преобразования Фурье дает формулу

$$K_\gamma[f](p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi}\ H_\gamma[f](\xi)\ d\xi. \tag{8}$$

Обозначим через $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R})$ подпространство пространства $C^\infty_0(\mathbb{R})$, состоящее из четных функций, а через $S_{ev}(\mathbb{R})$ — подпространство Л.Шварца, также состоящее из четных функций. Через Z_{ev} обозначим образ пространства $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R})$ при cos-преобразовании Фурье F_c. Приведем следующий известный результат (см. [10]) относительно cos-преобразования Фурье и относительно преобразования Ганкеля:

Лемма 1. *Операторы F_c и H_γ изоморфно отображают пространства $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R})$ на Z_{ev} и $S_{ev}(\mathbb{R})$ на себя.*

Теперь рассмотрим операторы преобразования Пуассона и Сонина, представленные посредством преобразований Ганкеля и cos-преобразованием Фурье следующим образом[7)]

$$P_\gamma = H_\gamma^{-1}\, F_c = \left[2^{\gamma-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1} H_\gamma\, F_c,$$

$$S_\gamma = F_c^{-1}\, H_\gamma = (2\pi)^{-1} F_c\, H_\gamma.$$

Известны следующие свойства операторов преобразования P_γ и S_γ (см. [10]).

Лемма 2. *Операторы P_γ и S_γ отображают пространства $C^\infty_{0,ev}(\mathbb{R}_1)$ и S_{ev} изоморфно на себя.*

Лемма 3. *Для любой функции $f \in S_{ev}$ операторы P_γ и S_γ являются взаимно обратными :*

$$S_\gamma\, P_\gamma\, f = P_\gamma\, S_\gamma\, f = f\,.$$

Для преобразования Радона-Киприянова функции одной переменной справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *На функциях из пространства $S_{ev}(R_1)$ K_γ-преобразование (1) представляет собой оператор преобразования Пуассона-Сонина S_γ, при этом*

$$P_\gamma\, K_\gamma[f] = f\,, \qquad K_\gamma\, P_\gamma[f] = f\,.$$

□ Если $f \in S_{ev}$, то справедливо равенство (8). Законность выполнения всех операций следует из Леммы 1. Учитывая, что $H_\gamma[f](\xi)$ — четная функция, получим $K_\gamma[f](p) = F_c^{-1}\, H_\gamma[f]$, что в соответствии с определением оператора S_γ дает равенство

$$K_\gamma[f](p) = S_\gamma[f](p).$$

Применение Леммы 3 завершает доказательство. ■

Следствие 1 (О преобразовании Радона радиальных функций). *Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и $f = f(|x|)$, то ее преобразование Радона выражается через преобразование Радона-Киприянова и оператор преобразования Пуассона-Сонина по формулам*

$$R[f](\xi; p) = R[f](p) = K_{n-1}[f](p) = S_{n-1}[f](p)\,.$$

При этом $P_{n-1}\, R[f] = f\,.$

[7]Оператор Пуассона $\Pi^{\frac{\gamma-1}{2}}$ и оператор преобразования Пуассона P_γ в этой работе суть различные операторы.

4. Применение дробных производных

Ясно, что формулы, полученные в Теореме 3, являются формулами обращения K_γ-преобразования. При этом роль обращающего оператора выполняет оператор Пуассона[8)]. Здесь мы получим формулы обращения, основанные на применении дробных производных (ср. с результатами работ [1] и [2]).

Общие формулы обращения RK-преобразования получены в работах [7], [8]. Интерес к обращению одномерного K_γ-преобразования отчасти связан с тем, что во-первых эти формулы имеют очень простой вид, а во-вторых с тем, что в частном случае, когда весовой показатель γ целый, эти формулы окажутся обращающими преобразование Радона радиальных функций, а это имеет значение при решении практических задач и задач компьютерной томографии.

Пусть $f \in S_{ev}$. Согласно теореме 3

$$f(x) = P_\gamma K_\gamma[f] = H_\gamma^{-1}\, 2F_c\, K_\gamma[f]\,.$$

Константу, нормирующую обратное преобразование Ганкеля, обозначим через $C_1(\gamma)$. Итак

$$f(x) = C_1(\gamma) \int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\xi^\gamma\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p}\, K_\gamma[f](p)\, dp\,, \quad C_1(\gamma) = \left[2^{\gamma-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1}. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$\Phi(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p}\, K_\gamma[f](p)\, dp\,.$$

Поскольку $K_\gamma[f](p)$ — четная функция[9)], то и ее преобразование Фурье (а это cos-преобразование) — четная функция. Нашей следующей целью является распространение интегрирования по ξ в (9) с полуоси на всю действительную ось. Поступим следующим образом

$$M = \int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\,|\xi|^\gamma\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^\gamma\, d\xi + \int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^\gamma\, d\xi\right).$$

Во втором слагаемом заменим ξ на $-\xi$. Тогда

$$M = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^\gamma\, d\xi + \int\limits_{-\infty}^{0} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(-x\,\xi)\,\Phi(-\xi)\;|\xi|^\gamma\, d\xi\right).$$

---

[8] В теории обратных задач пара операторов P_γ и S_γ называются «операторы преобразования». Эти операторы преобразуют сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с индексом γ во вторую производную и наоборот.

[9] $K_\gamma[f](-\xi;-p) = K_\gamma[f](\xi;p)$, см. [4], [8]

Учитывая четность подынтегрального выражения во втором слагаемом,

$$M = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\;|\xi|^{\gamma}\,d\xi.$$

Теперь равенство (9) принимает вид

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\,\xi)\,\Phi(\xi)\,.\,|\xi|^{\gamma}\,d\xi$$

Заменив функцию Бесселя соответствующим интегралом Пуассона, получим

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)\,C(\gamma)}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\pi} e^{-ix\,\xi\,\cos\alpha}\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p}\,K_{\gamma}[f](p)\,dp\,|\xi|^{\gamma}\,d\xi.$$

Выделим прямое и обратное преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)\,C(\gamma)\,2\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi} F^{-1}_{\xi\to x\,\cos\alpha}\,[\,|\xi|^{\gamma}\,F_{p\to\xi}\,K_{\gamma}[f]\,]\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,. \tag{11}$$

Здесь оператор Пуассона применен к классическому псевдодифференциальному оператору $F^{-1}|\xi|^{\gamma}F[u]$ с символом $|\xi|^{\gamma}$. Пусть $0<\alpha<1$ и $A{=}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, каждое из выражений

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x){=}A\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,,\quad (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x){=}{-}A\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,,$$

называется дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha{\in}\,(0,1)$, соответственно левосторонней и правосторонней (см. [11]). Если же $\alpha\geq 1$ и не является целым, то

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathcal{D}^{\{\alpha\}}_{a+}f\,,\quad \mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathcal{D}^{\{\alpha\}}_{b-}f\,.$$

Мы пользуемся стандартными обозначениями: $[\alpha]$ — целая часть числа α, $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α, т. е. $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$.

Далее полагаем $a=-\infty$, $b=+\infty$. В этом случае для дробных производных Римана-Лиувилля (соответственно левосторонней и правосторонней) используем обозначения $\mathcal{D}^{\alpha}_{+}$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{-}$. Для этих производных справедливо следующее представление в образах Фурье (см. [11], стр. 114):

$$F[\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}\varphi] = (\mp i\xi)^{\alpha}F[\varphi](\xi),$$

где $\alpha > 0$, $(\pm ix)^\alpha = |x|^\alpha e^{\pm\frac{i\alpha\pi}{2}\operatorname{sign} x}$. Отсюда вытекают формулы для средней величины дробной производной Римана-Лиувилля

$$\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right)\varphi(x) = F^{-1}\left[\cos\frac{\alpha\pi}{2}|\xi|^\alpha F[\varphi](\xi)\right](x).$$

Введем обозначение

$$\mathfrak{D}^\alpha\varphi(x) = F^{-1}\left[|\xi|^\alpha F[\varphi](\xi)\right](x) = \frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right)\varphi(x). \tag{12}$$

Отметим, что дробные производные Римана-Лиувилля представляются в виде производных Маршо:

$$\mathcal{D}_\pm^\alpha\varphi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt\,.$$

Откуда

$$\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right)\varphi(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\varphi(x)-\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t^{1+\alpha}}dt\,.$$

Это равенство с точностью до константы $[\cos\frac{\alpha\pi}{2}]^{-1}$ представляет собой производную Грюнвальда-Летникова-Рисса функции ϕ (см. [11], стр. 280). Из (12) вытекает полугрупповое свойство: $\mathfrak{D}^\alpha\mathfrak{D}^\beta = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta}$. В частности, если $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, то $\mathfrak{D}^\alpha\varphi(x) = \left(\mathfrak{D}^{\{\alpha\}}\frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\right)\varphi(x)$.

Следуя [12] (стр. 30), введем оператор

$$(\Lambda^\alpha f)(p) = \begin{cases} \dfrac{d^\alpha}{dp^\alpha}f(p), & \alpha-\text{ четное;} \\[2ex] G\,\dfrac{d^\alpha}{dp^\alpha}f(p), & \alpha-\text{ нечетное;} \\[2ex] \mathfrak{D}^\alpha f(x), & \alpha-\text{ дробное число,} \end{cases}$$

где G – преобразование Гильберта:

$$(Gf)(t) = \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(p)}{t-p}\,dp\,,$$

а $\mathfrak{D}^\alpha$ — оператор (12).

Теорема 4. *Пусть Λ_p^α — оператор (12), γ — фиксированное положительное число. Для $f\in S_{ev}$ имеет место следующая формула обращения*

$$f(x) = A(\gamma)\,\Pi_x^\gamma(\Lambda_p^\gamma K_\gamma[f])(p)|_{p=x}\ . \tag{13}$$

При этом в случае целого γ

$$A(\gamma) = \frac{(-i)^{-\gamma}\,\pi}{2^{\gamma-1}\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\ ,$$

а в случае дробного γ

$$A(\gamma) = \frac{\pi}{2^{\gamma-1}\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\ .$$

□ Необходимо рассмотреть три случая, когда γ четное, нечетное или дробное число.

Если $\gamma = 2m$ — четное, то утверждение теоремы следует из того, что выражение $(-i|\xi|)^{2m} = (-i\xi)^{2m}$ представляет собой символ оператора $\frac{d^{2m}}{dp^{2m}}$ (разумеется в образах Фурье).

Если же $\gamma = 2m+1$ — нечетное, то утверждение теоремы следует из того, что

$$|\xi|^{2m+1} = \mathrm{sign}(\xi)\,\xi^{2m+1}\,,$$

а $\mathrm{sign}(s)$ — символ представления в образах Фурье преобразования Гильберта (см. например [12], стр. 31, формула (40)) и мы приходим к интегродифференцированию, осуществляемому суперпозицией оператора Гильберта и производной целого порядка $2m+1$: $G\,\frac{d^{2m+1}}{dp^{2m+1}}$. Вычисление соответствующей константы не составляет каких-либо трудностей, таким образом для целых значений γ получим (13) с оператором Λ при четных или нечетных значениях γ.

Пусть γ — дробное. В этом случае утверждение теоремы вытекает из определения дробной производной $\mathfrak{D}^\alpha$ (12). ■

Отметим, что второе равенство в (12) дает возможность заменить в формуле (13) производную $\mathfrak{D}^\alpha$ средней величиной дробной производной Римана-Лиувиля. Формулы обращения K_γ-преобразования через производной Маршо или Грюнвальда-Летникова-Рисса выписываются довольно просто.

Теперь покажем, что при целом γ дифференцирование в формуле обращения в Теореме 1 может быть заменено дифференцированием, осуществляемым сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

Теорема 5. *Пусть f радиальная функция, определенная в $\mathbb{R}^n$ и принадлежащая пространству Шварца основных функций $S(\mathbb{R}^n)$. Для преобразования Радона функции f имеет место формула обращения преобразования Радона радиальных функций*

$$f(r) = \frac{\pi\,C_1(n-1)}{i^{n-1}}\,\Pi_r^{n-1}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}K_{n-1}[f](p)\right]\Bigg|_{p=r}\,. \tag{14}$$

При нечетном n эта формула примет вид

$$f(r) = \frac{\pi\,C_1(n-1)}{i^{n-1}}\,B^{(n-1)/2}\Pi_r^{n-1}K_{n-1}[f](r)\,. \tag{15}$$

При четном n

$$f(r) = \frac{\pi\, C_1(n-1)}{i^{n-1}}\, B^{(n-2)/2} \Pi_r^{n-1} \frac{d}{dr} K_{n-1}[f](r)\,. \tag{16}$$

□ Как известно, преобразование Радона $R[f]$ радиальной функции оказывается преобразованием Радона-Киприянова функции $K_\gamma[f]$ одной переменной при $\gamma = 1$. Таким образом, полагая в (13) $\gamma = n-1$, получим формулу обращения преобразования Радона радиальных функций

$$f(r) = \frac{\pi\, C_1(n-1)}{i^{n-1}}\, \Pi_r^{n-1} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} K_{n-1}[f](p) \right] \Bigg|_{p=r}\,.$$

Тем самым формула (14) доказана.

Если размерность n евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ нечетное число, то исходя из формулы (см. [17], формула (1.1))

$$B^m \Pi^\gamma = \Pi^\gamma \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\ ,$$

где B — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}\ ,$$

из (15) получим

$$f(x) = A(\gamma)\, B^{\gamma/2} \Pi_x^\gamma K_\gamma[f])(r)\,.$$

При четной размерности пространства n из (14) получим

$$f(r) = \frac{\pi\, C_1(n-1)}{i^{n-1}}\, B^{(n-2)/2} \Pi_r^{n-1} \frac{d}{dr} K_{n-1}[f](r)\,. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Ляхов Л.Н. RK_γ-преобразование с $\gamma \in (0,2]$ весовых сферических функций. Соотношения Асгейрсона // Доклады РАН. – 2011. – 439;№5. – С.589-592.
2. Ляхов Л.Н. О преобразованиях Радона и Радона-Киприянова сферически симметричных функций // Доклады РАН. – 2008. – 419;№3. – С.315-319.
3. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / М.: ГИФМЛ, 1962. – 656 с.
4. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // Доклады РАН. – 1998. – 360;№2. – С.157-160.
5. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические задачи / М.:Наука, 1997. – 199 с.
6. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом / Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад.,1997. – 144 с.
7. Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Радона-Киприянова // Доклады РАН. – 2004. – 399;N5. – С.597-600.
8. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона. // ТР.МИАН. 2005. Т.248. С.153-163.

9. Гоц Е.Г. Преобразование Киприянова-Радона основных функций. Теорема о носителе // Труды участников школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо / Ростов-на-Дону: Ростовское математическое общество, 2006. – С.185-186.
10. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // СМЖ. – 1980. – XXI; №1. – С.86-97.
11. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
12. Хелгасон С. Преобразование Радона / М.: Мир, 1983. – 150 с.
13. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / М.: Наука, 1974. – 808 с.
14. Ляхов Л.Н. Об одном классе сферических функций и сингулярнvх псевдодифференциальнvх операторов // Доклады РАН. – 1983. – 272;№4. – С.781-784.
15. Ляхов Л.Н. О рядах по весовым сферическим функциям // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математ. физики: Сб.научн. тр./ Новосибирск: СО АН СССР, 1984. – С.102-109.
16. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21;№6. – С.1020-1032.
17. Киприянов И.А., Кононенко В.И. О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1969. – 5;№8. – С.1470-1483.

INVERSION OF RADON-KIPRIYANOV's TRANSFORM OF RADIAL FUNCTIONS

L.N. Lyakhov, O.I. Popova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: lyakhov@box.vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru

Abstract. It is done the deduction of the formula connected the Radon transformation of radial functions
and the Radon-Kipriyanov K_γ transformation of one-variable functions. It is obtained the formula of K_γ-transformation of radial functions in $\mathbb{R}^n$. It is done in the form of $K_{\gamma+n-1}$-transformation of the one-variable function. The formula of inverse Radon-Kipriyanov transformation of one-variable functions is found. The results extend and refine previous ones obtained by one of the authors.

Key words: Radon transform, Radon-Kipriyanov transform, radial functions.

УДК 517.983

ФУНКЦИЯ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ [10)]

Т.А. Манаенкова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, e-mail: Manaenkova@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача о вычислении функции Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля. Приводятся условия ее корректной разрешимости.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с дробной производной, функция Коши.

Пусть A — линейный замкнутый оператор, плотно определенный в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. При $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-1} u(t) = u_{n-1}\,, \quad \lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-k} u(t) = 0\,, \quad k = 2, ..., n\,. \tag{2}$$

где $D_{0+}^{\alpha} u(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(I_{0+}^{n-\alpha} u\right)(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, $I_{0+}^{\beta} u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s)\, ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ (см. [1, с. 41], [2, с. 69]), $u_{n-1} \in D(A)$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Для задачи (1), (2) мы приведем условия ее корректной разрешимости. Разрешающий оператор этой задачи мы назовем функцией Коши. С ее помощью будет построено решение задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Определение 1. *Решением задачи (1), (2) называется функция $u(t)$ такая, что имеют место включения $u(t) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$, $I_{0+}^{k-\alpha} u(t) \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$ для $k = 0, 1, ..., n-1$, $I_{0+}^{n-\alpha} u(t) \in C^n(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$, и удовлетворяющая (1), (2).*

Определение 2. *Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если при любых $u_{n-1} \in D(A)$ существует единственное решение $u(t; u_{n-1})$ задачи (1), (2) и если $u_{n-1,m} \in D(A)$, $u_{n-1,m} \to 0$ при $m \to \infty$ влечет $u(t; u_{n-1,m}) \to 0$ при $m \to \infty$, равномерно по t на любом компактном интервале из $(0, \infty)$.*

[10]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

Применим к уравнению (1) оператор I^{α}_{0+}. Учитывая равенство (см. [1, с. 50], [2, с. 74])

$$I^{\alpha}_{0+}D^{\alpha}_{0+}u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha-k-1}_{0+}u(0)}{\Gamma(\alpha-k)}\, t^{\alpha-k-1} \tag{3}$$

и граничные условия (2), можно утверждать, что задача (1), (2) равномерно корректна только тогда, когда следующее интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, u_{n-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\,\alpha-1}\, Au(s)\, ds\,, \qquad t>0\,, \tag{4}$$

равномерно корректно в смысле Определения 3, которое мы приводим далее.

Определение 3. *Интегральное уравнение (4) называется равномерно корректным, если для каждого $u_{n-1} \in D(A)$ существует единственное решение $u(t;u_{n-1}) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$ этого уравнения и если $u_{n-1,k} \in D(A)$, $u_{n-1,k} \to 0$ при $k \to \infty$ влечет сходимость $u(t;u_{n-1,k}) \to 0$ равномерно по t на любом компактном интервале из $(0,\infty)$.*

Пусть $\mathcal{B}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. Определим разрешающий оператор задачи (1), (2).

Определение 4. *Операторная функция $K_\alpha(t) \in \mathcal{B}(X)$ называется разрешающим оператором для задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:*

(i) $K_\alpha(t)$ сильно непрерывна при $t>0$ и $D^{\alpha-1}_{0+}K_\alpha(0) = I$,

(ii) $K_\alpha(t)$ коммутирует с A, то есть, $K_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ и $AK_\alpha(t)u_{n-1} = K_\alpha(t)Au_{n-1}$ для любого $u_{n-1} \in D(A)$ и $t>0$,

(iii) $K_\alpha(t)u_{n-1}$ является решением задачи (1), (2) для любого $u_{n-1} \in D(A)$ и $t>0$.

Определение 5. *Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$, если задача (1), (2) имеет разрешающий оператор $K_\alpha(t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|K_\alpha(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}\,, \quad t>0\,, \tag{5}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ и функция $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ и $K_\alpha(t)$ – соответствующий разрешающий оператор. При $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ определим преобразование Лапласа для разрешающего оператора

$$\widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}K_\alpha(t)u_{n-1}\, dt\,, \quad u_{n-1} \in X\,.$$

Учитывая оценку (5), можно утверждать, что $\widehat{K}_\alpha(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$. Используя свойства (ii) и (iii) Определения 4 и тождество [см. 2, с. 284] для преобразования Лапласа дробных производных

$$L[D^{\alpha}_{0+}u](\lambda) = \lambda^\alpha L[u](\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1}D^{\alpha-k}_{0+}u(0)\,, \tag{6}$$

после преобразования Лапласа, из (1), (2) получим следующие соотношения:

$$\lambda^\alpha \widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1} - u_{n-1} = A\widehat{K}_\alpha(\lambda)u_{n-1}\,, \quad u_{n-1} \in X\,;$$

$$\lambda^\alpha \widehat{K}_\alpha(\lambda) u_{n-1} - u_{n-1} = \widehat{K}_\alpha(\lambda) A u_{n-1}\,, \quad u_{n-1} \in D(A)\,.$$

Лемма. *Пусть $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$, тогда оператор $(\lambda^\alpha I - A)$ обратим и $\widehat{K}_\alpha(\lambda) = R(\lambda^\alpha, A)$, то есть множество $\{\lambda^\alpha : Re\ \lambda > \omega\}$ включено в $\rho(A)$ и*

$$R(\lambda^\alpha, A) u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_\alpha(t) u_{n-1}\, dt\,, \quad u_{n-1} \in X\,. \tag{7}$$

Доказательство приводимых далее теорем 1-6 аналогично доказательству соответствующих теорем из [3] и мы его опускаем.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, тогда $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ и оператор $D_{0+}^{\alpha-1} K_\alpha(t)$ непрерывен в равномерной операторной топологии только тогда, когда $A \in \mathcal{B}(X)$.*

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ для некоторого $\alpha > 2$ и*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t} M(t) dt \ \le\ \frac{C_1}{\nu^\alpha}\,, \qquad \nu > 0\,, \quad C_1 > 0\,. \tag{8}$$

Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.

Теорема 3. *Пусть $0 < \alpha \le 2$. В этом случае $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ только тогда, когда $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ и*

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda-\omega)^n}{n!} \left\| \frac{d^n R(\lambda^\alpha, A)}{d\lambda^n} \right\| \le C_2\,, \quad \lambda > \omega\,,\ C_2 > 0\,. \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha \le 2$. Тогда $A \in \mathcal{H}^\alpha(M,\omega)$ только тогда, когда $(\omega^\alpha, \infty) \subset \varrho(A)$ и существует сильно непрерывная операторная функция $K(t)$, удовлетворящая неравенству $\|K(t)\| \leqslant M(t) e^{\omega t}$, $t > 0$, $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A) u_{n-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t) u_{n-1}\, dt, \quad u_{n-1} \in X\,. \tag{10}$$

В этом случае $K_\alpha(t) = K(t)$.

Теорема 5. *Если A является генератором сильно непрерывной C_0-полугруппы, то $A \in \mathcal{H}^\alpha(M, \omega^{1/\alpha})$ для каждого $\alpha \in (0,1)$ с некоторой функцией $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Теорема 6. *Пусть $\alpha > 0$. Если $K_\alpha(t)$ – разрешающий оператор (1), (2), то*

$$A u_{n-1} = \Gamma(\alpha+1) \lim_{t \to 0+} \frac{D_{0+}^{\alpha-1} K_\alpha(t) u_{n-1} - u_{n-1}}{t^\alpha} \tag{11}$$

для тех $u_{n-1} \in X$, для которых этот предел существует.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу при $\alpha > 0$ и нулевых начальных условиях

$$D_{0+}^\alpha u(t) = A u(t) + f(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{12}$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-k}u(t) = 0\,, \quad k = 1, 2, ..., n\,. \tag{13}$$

Теорема 7. *Пусть $A \in \mathcal{H}^{\alpha}(M,\omega)$, функция $M(t)$ такая, что для $t \in [0,1]$*

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} M(\tau)\, d\tau \le C_2,$$

а функция $f(t) \in C\left((0,\infty), X\right)$ абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в $D(A)$, $Af(t) \in C\left((0,\infty), X\right)$ и также абсолютно интегрируема в нуле. Тогда функция

$$u(t) = \int_0^t K_{\alpha}(t-s) f(s)\; ds\,, \tag{14}$$

является решением задачи (12), (13).

□

При $t > 0$ имеем

$$D_{0+}^{\alpha} u\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\; d\tau \int_0^{\tau} K_{\alpha}\,(\tau-\xi)\, f\,(\xi)\;\; d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \int_{\xi}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}\,(\tau-\xi)\, f\,(\xi)\;\; d\tau\; d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}(x) f(\xi)\; dx\; d\xi.$$

Поскольку под знаком интеграла по ξ находится непрерывная по $t-\xi$ функция, то

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}\,(x)\, f\,(\xi)\;\; dx\; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_0^t \frac{d}{dt} \int\limits_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}\,(x)\, f\,(\xi)\;\; dx\; d\xi =$$

$$= \lim_{s\to +0} D_{0+}^{\alpha-1} K_{\alpha}(s) f(t)\; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}\,(x)\, f\,(\xi)\;\; dx\; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int\limits_0^t \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}\,(x)\, f\,(\xi)\;\; dx\; d\xi =$$

$$= f\,(t) + \lim_{s\to +0} D_{0+}^{\alpha-2} K_{\alpha}(s) f(t)\; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_{\alpha}\,(x)\, f\,(\xi)\;\; dx\; d\xi = ... =$$

$$= f(t) + \int_0^t D_{0+}^{\alpha} K_\alpha(t-\xi) f(\xi)\ d\xi = f(t) + \int_0^t K_\alpha(t-\xi) Af(\xi)\ d\xi = f(t) + Au(t)\ .$$

Следовательно, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (12).

Проверим далее, что функция $u(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям (13). Рассмотрим сначала $D_{0+}^{\alpha-n}u(t)$. Имеем

$$\lim_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n}u(t) = \lim_{t\to+0} I_{0+}^{n-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{t\to+0} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\ d\xi\,.$$

Поскольку для $K_\alpha(t)$ справедлива оценка (5), то для $t \in [0,1]$

$$\left\| \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\ d\xi \right\| \leqslant \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau \int_0^\tau M(\tau-\xi) \|f(\xi)\|\ d\xi =$$

$$= \int_0^t \|f(\xi)\|\ d\xi \int_0^{t-\xi} (t-\xi-\eta)^{n-\alpha-1} M(\eta)\ d\eta \le C_2 \int_0^t \|f(\xi)\|\ d\xi\,.$$

Следовательно $\lim\limits_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n}u(t) = 0$.

Далее, рассмотрим образ $D^{\alpha-n+k}u(t)$ при $k=1$

$$D_{0+}^{\alpha-n+1}u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\ d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\ d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x) f(\xi)\ dx +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t f(\xi)\ d\xi \frac{d}{dt} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{n-\alpha-1} K_\alpha(x)\ dx =$$

$$= \lim_{s\to+0} D_{0+}^{\alpha-n} K_\alpha(s) f(\xi) + \int_0^t D_{0+}^{\alpha-n+1} K_\alpha(t-\xi)\ f(\xi)\ d\xi\,.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$ и учитывая условия (2), получим

$$\lim_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n+1}u(t) = 0.$$

Продолжая далее аналогичные рассуждения для любого $k < n$ на основе того, что $\lim\limits_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-n+(k-1)}u(t) = 0$, дойдем до случая $k = n-1$

$$D_{0+}^{\alpha-1}u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\ d\tau \int_0^\tau K_\alpha(\tau-\xi) f(\xi)\ d\xi =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \lim_{s\to+0} D_{0+}^{\alpha-k} K_\alpha(s) f(\xi) + \int_0^t D_{0+}^{\alpha-1} K_\alpha(t-\xi) f(\xi)\ d\xi.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$ и учитывая условия (2), получим

$$\lim_{t\to+0} D_{0+}^{\alpha-1} u\,(t) = 0\,.$$

Следовательно, функция $u(t)$, заданная формулой (14), удовлетворяет нулевым начальным условиям (13). ■

Пример. Заметим, что:

1) при $0 < \alpha < 1$, $K_\alpha(t) = T_\alpha(t)$, где $T_\alpha(t)$ – разрешающий оператор рассмотренной в [3] задачи

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,,$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+}^{\alpha-1} u(t) = u_0\,;$$

2) если $\alpha = 1$, то $K_1(t)$ – C_0-полугруппа и A – ее генератор;

3) если $\alpha = 2$, то $K_2(t)$ – синус оператор-функция и A – генератор соответствующей косинус оператор-функция;

4) если оператор A ограничен и $\alpha > 2$, то $K_\alpha(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)$.

В заключение заметим, что неоднородное дифференциальное уравнение порядка $1+\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с регуляризованной дробной производной и позитивным оператором A было исследовано в [4] методом сумм Да Прато и Гривара.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / Math. Studies / Elsevier, 2006.
3. Глушак А.В., Манаенкова Т.А. О разрешимости задачи типа Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – №17(136). – Вып.28. – С.28-45.
4. Clement Ph., Gripenberg G., Londen S.-O. Regularity properties of solutions of fractional evolution equation. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998) // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 215 / New York: Dekker, 2001. – P.235-246.

CAUCHY's FUNCTION FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

T.A. Manaenkova

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Manaenkova@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of calculation of Cauchy's function for abstract differential equation with fractional Riemann-Liouville derivative is under consideration. Conditions of its well-posed solvability are found.

Key words: differential equation with fractional derivative, Cauchy's function.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ В ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ [11)]

А.М. Мейрманов, Р.Н. Зимин, О.В. Гальцева, О.А. Гальцев

Белгородский государственный университет,
ул.Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: reshat85@mail.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящена получению новых корректных математических моделей, моделирующих процесс диффузии в пороупругой среде посредством усреднения и метода двухмасштабной сходимости Нгуетсенга.

Ключевые слова: усреднение, метод двухмасштабной сходимости.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^3$ ограниченная связная область с липшицевой границей S, полученная периодическим повторением элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y\,, \quad Y = (0,1)\times(0,1)\times(0,1), \quad \varepsilon Y = (0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon),$$

и $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ – липшицева граница между множествами Y_f и Y_s. Область Y_f будем считать симметричной относительно поворотов на $\pi/2$ (рис 1.).

Через $\overline{\Omega}^{\,\varepsilon}_f$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}^{\,\varepsilon}_s$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega^\varepsilon_f \cup \Omega^\varepsilon_s \cup \Gamma^\varepsilon,$$

где $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^{\,\varepsilon}_f \cap \partial\Omega^{\,\varepsilon}_s$ периодическое повторение границы $\varepsilon\gamma$.

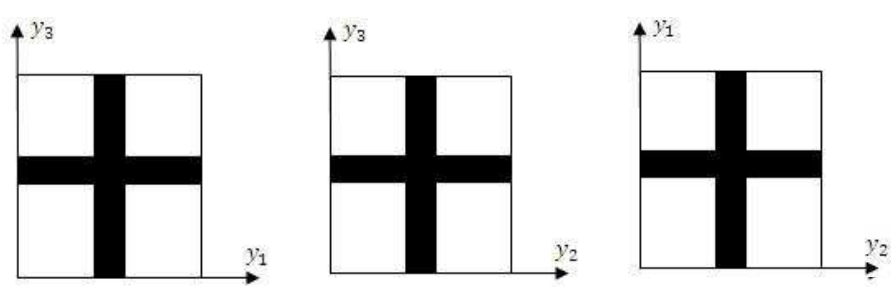


Рис. 1. Геометрия элементарной ячейки.

[11]Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской Федерации, соглашение №14.A18.21.0357

Мы рассмотрим две модели диффузии в пороупругой среде, состоящие из системы уравнений Стокса, которые описывают движение несжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве и системы уравнений Ламе, описывающих колебания несжимаемого твердого скелета. Рассматриваемая система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости. Задача замыкается начальными и краевыми условиями. При этом считается, что плотность жидкости зависит от концентрации примеси.

Модель $\mathbb{PE}_1$.

$$\nabla\cdot\left(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-p^{\varepsilon}\mathbb{I}\right)+\rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0\,;\tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{\varepsilon}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0\,;\tag{2}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla c^{\varepsilon}=D_0\triangle c^{\varepsilon},\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}\,,\quad t>0\,.\tag{3}$$

Система уравнений дополняется следующими условиями:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0\quad\text{при}\quad \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega,\tag{4}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0\quad\text{при}\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\tag{5}$$

$$\int_{\Omega}p^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}=0\,,\tag{6}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{n}}=0\ \text{ при }\ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon}\cup S\,,\quad t>0\,,\tag{7}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x}),\ \text{при}\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}\,,\tag{8}$$

где $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=(w_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),w_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),w_3^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t))$ – перемещение сплошной среды, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - давление в сплошной среде, $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ – концентрация примеси, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})$ – симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^{\varepsilon})=\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\delta c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,,$$

μ_0 – безразмерная вязкость жидкости, λ_0 – безразмерная постоянная Ламэ, δ – положительная постоянная, $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ^{ε}, D_0 – коэффициент диффузии.

Уравнение (3) понимается в смысле следующего интегрального равенства

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}\left(c^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}-(\nabla c^{\varepsilon})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\psi-D_0\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)dxdt=-\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

Модель $\mathbb{PE}_2$.

$$\nabla\cdot\left(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-p^{\varepsilon}\mathbb{I}\right)+\rho(\varphi(c^{\varepsilon}))\boldsymbol{F}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\ \ t>0\,;\tag{9}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{\varepsilon}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\ \ t>0\,;\tag{10}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t}=\nabla\cdot\left(D_0\nabla c^{\varepsilon}-\varphi(c^{\varepsilon})\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\quad \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}\,,\ t>0\,,\tag{11}$$

где функция $\varphi(c^{\varepsilon})\in\mathbb{C}^2(-\infty,\infty)$ такая, что

$$\varphi(c^{\varepsilon})=\begin{cases}-1/2 & ,\ c^{\varepsilon}<-1/2\,;\\ c^{\varepsilon} & ,\ 0\le c^{\varepsilon}\le 1\,;\\ 3/2 & ,\ c^{\varepsilon}>3/2\,.\end{cases}$$

Задача замыкается следующими условиями:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0\quad\text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega\,,\ \ t>0\,;\tag{12}$$

$$\int_{\Omega}p^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}=0\,,\ \ t>0\,;\tag{13}$$

$$D_0\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{n}}-\varphi(c^{\varepsilon})\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}=0\ \ \text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon},\ \ t>0\,,\tag{14}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0\quad\text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega\,,\tag{15}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x})\ \text{при}\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}\,.\tag{16}$$

Уравнение (11) понимается в смысле теории распределения, то есть в смысле следующего интегрального равенства

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}\left(c^{\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+\varphi(c^{\varepsilon})\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla\psi-D_0\nabla c^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)dxdt=\ -\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}c_0(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)dx\,,$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$.

2. Основной результат

Определение 1. *Тройка $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),\,p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),\,c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\}$ называется обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_1$ в области $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, если*

1) $p^{\varepsilon}\in L^2(\Omega_T)$, $\ \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\in W_2^{1,1}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s^{\varepsilon}\times(0,T))$,
$c^{\varepsilon}\in L_{\infty}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))\ \bigcap\ W_2^{1,0}(\Omega_f^{\varepsilon}\times(0,T))$;

2) почти всюду в области Ω_T выполнено уравнение (2) и условие (6);

3) функции $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$, p^{ε} и c^{ε} удовлетворяют интегральным равенствам

$$\int_{\Omega_T}\left(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})-p^{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\right)dxdt$$
$$=\int_{\Omega_T}\rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt\tag{1}$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$, *равной нулю на границе* S *и при* $t=T$, *а также*

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left(c^\varepsilon \, \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla c^\varepsilon \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \psi - D_0 \nabla c^\varepsilon \cdot \nabla \psi \right) dxdt = -\int_{\Omega_f^\varepsilon} c_0(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x},0) dx \qquad (2)$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, *равной нулю при* $t=T$.

Здесь используется обозначение: $A:B \equiv \mathrm{tr}(AB^T)$, где A и B – квадратные матрицы.

Определение 2. *Тройка* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\, p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\, c^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)\}$ *называется обобщенным решением модели* $\mathbb{PE}_2$ *в области* $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, *если*

1) $p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T)$, $\boldsymbol{w}^\varepsilon \in W_2^{1,1}(\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)) \bigcap W_2^{1,0}(\Omega_s^\varepsilon \times (0,T))$,
$c^\varepsilon \in L_\infty(\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)) \bigcap W_2^{1,0}(\Omega_f^\varepsilon \times (0,T))$;

2) почти всюду в области Ω_T *выполнено уравнение (10) и условие (13);*

3) функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, p^ε *и* c^ε *удовлетворяют интегральным уравнениям*

$$\int_{\Omega_T} \left(\chi^\varepsilon \mu_0 \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi}) + (1-\chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi}) - p^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \right) dxdt$$
$$= \int_{\Omega_T} \rho(\varphi(c^\varepsilon)) \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dxdt \qquad (3)$$

для произвольной гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)$, *равной нулю на границе* S *и при* $t=T$ *и*

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left(c^\varepsilon \, \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varphi(c^\varepsilon) \, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \psi - D_0 \nabla c^\varepsilon \cdot \nabla \psi \right) dxdt = -\int_{\Omega_f^\varepsilon} c_0(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x},0) dx \qquad (4)$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, *равной нулю при* $t=T$.

Разрешимость модели $\mathbb{PE}_1$.

Теорема 1. *Пусть*

$$0 \leqslant c_0(\boldsymbol{x}) \leqslant 1\,,$$
$$\int_{\Omega_T} \left(|\boldsymbol{F}|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} \right|^2 \right) dxdt \leqslant F^2\,, \qquad |\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)| \leqslant F\,.$$

Тогда модель $\mathbb{PE}_1$ *имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \lambda_0 \int_\Omega (1-\chi^\varepsilon) \, |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)|^2 \, dx +$$
$$\int_{\Omega_T} \left(\mu_0 \chi^\varepsilon \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) \right|^2 + |p^\varepsilon|^2 \right) dxdt \leqslant MF^2\,, \qquad (5)$$

$$0 \leqslant c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) \leqslant 1\,, \tag{6}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla c^{\varepsilon}|^2 dxdt \leqslant MF^2\,, \tag{7}$$

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega \chi^{\varepsilon} \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 dx + \int_{\Omega_T} (1-\chi^{\varepsilon}) \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 dxdt \leqslant MF^2\,, \tag{8}$$

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_1) - \nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t_2)|^2 dx \leqslant C|t_1-t_2|^{1/2}\,, \tag{9}$$

где функция $\boldsymbol{v}^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t)$ *описана ниже.*

Доказательство разрешимости приведено в ([7]).

Разрешимость модели $\mathbb{PE}_2$.

Теорема 1. *Пусть*

$$0 \leqslant c_0(\boldsymbol{x}) \leqslant 1\,,$$

$$\int_{\Omega_T} |\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}|^2 dxdt \leqslant F^2\,, \quad \max_{\Omega_T} |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)| \leqslant F\,.$$

Тогда модель $\mathbb{PE}_2$ *имеет хотя бы одно обобщенное решение и для него справедливы оценки:*

$$\max_{0<t<T} \lambda_0 \int_\Omega (1-\chi^{\varepsilon}) |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})|^2 dx + \int_{\Omega_T} \left(\mu_0 \chi^{\varepsilon} \left|\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right|^2 + |p^{\varepsilon}|^2\right) dxdt \leqslant MF^2\,, \tag{10}$$

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega_f^\varepsilon} |c^{\varepsilon}|^2 dx + D_0 \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla c^{\varepsilon}|^2 dxdt \leqslant MF^2. \tag{11}$$

Легко заметить, что вектор-функция $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}$ имеет различную гладкость в областях Ω_f^ε и Ω_s^ε. Поэтому мы воспользуемся известными теоремами о продолжении (см. [1]- [3]):

Существует линейный оператор

$$\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon} : W_2^1(\Omega_f^\varepsilon) \to W_2^1(\Omega), \quad \boldsymbol{v}^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\right),$$

такой, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{12}$$

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)|^2\, dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right|^2 dx\,,$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2 dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left|\mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\big)\right|^2 dx\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{13}$$

где C_0 не зависит от ε и $t \in (0,T)$.

Для усреднения необходимо рассматривать функции в фиксированной области, но концентрация примеси c^ε определена только в области Ω_f^ε, которая зависит от малого параметра ε. Поэтому концентрацию примесей c^ε также продолжаем из Ω_f^ε в Ω (см. [1]):

$$\tilde{c}^\varepsilon = \tilde{\mathbb{E}}_{\Omega_f^\varepsilon}(c^\varepsilon), \tag{14}$$

такой, что

$$c^\varepsilon = \tilde{c}^\varepsilon\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \quad t \in (0,T)\,, \tag{15}$$

и

$$\int_\Omega |\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)|^2 dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |c^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)|^2 dx,$$
$$\int_\Omega |\nabla\, \tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)|^2 dx \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla\, c^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)|^2 dx\,, \quad t \in (0,T)\,, \tag{16}$$

где C_0 не зависит ε и $t \in (0,T)$.

Под усреднением мы будем понимать предельный переход в интегральных тождествах (1), (2), (3) и (4) при $\varepsilon \to 0$. Для этого воспользуемся понятием двухмасштабной сходимости ([5]). Напомним, что последовательность $\{u^{\varepsilon_k}\}$ ограниченная в $L_2(\Omega)$ сходится двухмасштабно к 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

$$\int_\Omega u^{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x})\varphi\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right) dx \to \iint\limits_{\Omega\, Y} U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) dy dx$$

для любой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. В частности, это верно для $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \varphi_0(\boldsymbol{y}) \cdot h(\boldsymbol{x})$, где $\varphi_0 \in L_2(Y)$ и $h \in L_\infty(\Omega)$.

Усреднение модели $\mathbb{PE}_1$. Верна следующая

Теорема 3. *Пусть тройка $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, c^\varepsilon\}$ является обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_1$. Тогда*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\widetilde{c}^\varepsilon$ и $\nabla\widetilde{c}^\varepsilon$ сходятся слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\nabla\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\boldsymbol{w}/\partial t)$, $\nabla\boldsymbol{v} = \nabla(\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\boldsymbol{w}/\partial t))$, p, c и ∇c соответственно;

2) Предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0\,, \tag{17}$$

усредненных уравнений баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m\delta c\boldsymbol{F} = 0\,, \tag{18}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau\,,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbb{B}\boldsymbol{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D_0 \mathbb{B} \nabla c)\,, \tag{19}$$

дополненных граничными

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S, \quad t \in (0, T)\,,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \quad t \in (0, T)\,,$$

и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,,$$

$$c(\boldsymbol{x}, 0) = m\, c_0(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,;$$

3) тензор 4-го ранга $\mathfrak{N}_1$ – симметричный и положительно определенный. Матрица $\mathbb{B}$ – симметричная и положительно определенная.

Усреднение модели $\mathbb{PE}_2$.

Теорема 4. *Пусть тройка $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon, c^\varepsilon\}$ является обобщенным решением модели $\mathbb{PE}_2$. Тогда*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{\nabla \boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{p^\varepsilon\}$, $\widetilde{c}^\varepsilon$ и $\nabla \widetilde{c}^\varepsilon$ сходятся слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\nabla \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \boldsymbol{w}/\partial t)$, $\nabla \boldsymbol{v} = \nabla(\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \boldsymbol{w}/\partial t))$, p, c и ∇c соответственно;

2) Предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0\,, \tag{20}$$

усредненных уравнений баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m\delta\varphi(c)\boldsymbol{F} = 0\,, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau\,,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_0 \mathbb{B} \nabla c) - \nabla \cdot (\varphi(c)\mathbb{B}\boldsymbol{v}) \tag{22}$$

дополненных граничными

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in S\,,\quad t\in(0,T)\,,$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}}=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in S\,,\quad t\in(0,T)\,, \tag{23}$$

и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=0\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,,$$

$$c(\boldsymbol{x},0)=m\,c_0(\boldsymbol{x})\,,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\,; \tag{24}$$

3) тензор 4-го ранга $\mathfrak{N}_1$ – симметричный и положительно определенный. Матрица $\mathbb{B}$ – симметричная и положительно определенная.

Так же верна следующая

Лемма 1. *Матрица $\mathbb{B}$ путем ортогонального преобразования координат приводима к виду $\mathbb{B}=\lambda\mathbb{I}$.*

Тогда, с учетом данной леммы усредненное конвективное уравнение диффузии (37) примет вид

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\lambda\nabla\left(\varphi(c)\right)\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\nabla\cdot\left(D_0\nabla c\right), \tag{25}$$

дополненное граничными и начальными условиями (23) и (24).

Для указанной задачи, согласно ([4]), справедлив принцип максимума.

Учитывая все вышесказанное система (37)-(33) примет вид

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbb{P}}+m\delta c\boldsymbol{F}=0\,, \tag{26}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0\,, \tag{27}$$

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\lambda\nabla c\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\nabla\cdot\left(D_0\nabla c\right). \tag{28}$$

3. Доказательство Теоремы 3

Сначала перепишем интегральные уравнения (1) и (2) для продолженных функций

$$\int_0^T\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big(-\tilde c^{\,\varepsilon}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla\,\tilde c^{\,\varepsilon}+D_0\,\nabla\,\tilde c^{\,\varepsilon}\cdot\nabla\,\psi\Big)dxdt=$$
$$\int_\Omega\chi^\varepsilon\,c_0(\boldsymbol{x})\,\psi(\boldsymbol{x},0)\,dx\,, \tag{1}$$

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\chi^\varepsilon\mu_0\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^{\,\varepsilon})+(1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\,\varepsilon})-p^{\,\varepsilon}\mathbb{I}\right):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\phi})dxdt=$$
$$\int_0^T\int_\Omega\chi^\varepsilon\delta\,\tilde c^{\,\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\phi}\,dxdt\,, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\big(\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\big)$ и $\tilde{c}^\varepsilon = \tilde{\mathbb{E}}_{\Omega_f^\varepsilon}(c^\varepsilon)$.

Также запишем уравнение неразрывности (2) в виде интегрального уравнения

$$\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{w}^\varepsilon \cdot \nabla \xi \, dxdt = 0\,, \tag{3}$$

для произвольной гладкой функции ξ.

Согласно оценкам (5)-(9), имеем

$$c,\, p,\, \nabla c, \quad \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \quad \nabla \boldsymbol{v} \in L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$C,\, P,\, \nabla_y C,\, \boldsymbol{V}, \quad \nabla_y \boldsymbol{V} \in L_2\big((0,T); L_2(\Omega \times Y)\big)\,.$$

Поэтому, с точностью до подпоследовательностей,

$$\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup c(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)\,,$$

$$\tilde{c}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \to c(\boldsymbol{x},t) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$\nabla \tilde{c}^\varepsilon \to \nabla c + \nabla_y C \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup p(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)\,,$$

$$p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \to P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

$$\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon\big) \to \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}\big) + \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}\big) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \rightharpoonup \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } L_2\big((0,T); \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big),$$

$$\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{v}^\varepsilon\big) \to \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{v}\big) + \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{V}\big) \text{ двухмасштабно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t),$$

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) \to \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \text{ сильно в } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Лемма 2. *Предельные функции удовлетворяют в области Ω при $t > 0$ системе макроскопических уравнений*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0\,, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m\delta c\, \boldsymbol{F} = 0\,, \tag{5}$$

$$\widehat{\mathbb{P}} = \mu_0\Big(m\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}) + \Big\langle \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right)\Big\rangle_{Y_f}\Big) + \lambda_0\big((1-m)\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\big) - p\,\mathbb{I}\,,$$

$$m\,\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\big(m\,\nabla c + \langle \nabla_y C\rangle_{Y_f}\big) = D_0\,\nabla\cdot\big(m\,\nabla c + \langle \nabla_y C\rangle_{Y_f}\big). \tag{6}$$

Для доказательства леммы перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (1) с пробной функцией $\psi = \psi(\boldsymbol{x}, t)$, в (2) с пробной функцией $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$, и в (3) с пробной функцией $\xi = \xi(\boldsymbol{x}, t)$.

Лемма 3. *Предельные функции удовлетворяют, в области Y для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $t > 0$, системе микроскопических уравнений*

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{W} = 0\,, \tag{7}$$

$$\nabla_y \cdot \tilde{\mathbb{P}} = 0\,, \tag{8}$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \chi(\boldsymbol{y}) \Big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right) \Big) + \lambda_0 \big(1 - \chi(\boldsymbol{y})\big) \big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}) \big) - P\,\mathbb{I}\,,$$

$$\nabla_y \cdot \Big(\chi(\boldsymbol{y}) \big(\nabla\, c + \nabla_y C \big) \Big) = 0\,. \tag{9}$$

Для доказательства леммы перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном равенстве (1) с пробной функцией $\psi = \varepsilon \psi_0(\boldsymbol{x}, t) \psi_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, в (2) – с пробной функцией $\boldsymbol{\phi} = \varepsilon \boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, и в (4) – с пробной функцией $\xi = \varepsilon \xi_0(\boldsymbol{x}, t) \xi_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$.

Лемма 4. *1-периодические решения $\{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t),\ P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\}$ периодической начально-краевой задачи (7), (8), дополненной начальным условием*

$$\chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0) = 0\,, \tag{10}$$

имеет вид

$$\boldsymbol{W} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t - \tau) Z_{ij}(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau\,,$$

$$P = \chi(\boldsymbol{y}) \sum_{i,j=1}^{3} P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) Z_{ij}(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t - \tau) Z_{ij}(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau\,,$$

где

$$\mathbb{Z}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) - \lambda_0 \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{3} Z_{ij}(\boldsymbol{x}, t) \mathbb{J}^{(ij)},$$

и $\{\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t),\ P^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t)\}$, $\{\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\ P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\}$, $i, j = 1, 2, 3$ являются решениями периодических задач

$$\left.\begin{aligned} \nabla_y \cdot \Big(\chi\, \mu_0\, \mathbb{D}\left(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}\right) + \lambda_0\, (1 - \chi) \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}) - P^{(ij)}\, \mathbb{I} \Big) = 0, \\ \nabla_y \cdot \boldsymbol{W}^{(ij)} = 0, \\ \chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, 0) = \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}); \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\Big(\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)})+\mathbb{J}^{(ij)}-P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\Big)=0,\\ \nabla_y\cdot\,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}=0,\quad\int_Y\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})dy=0,\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

в области Y. Здесь

$$\mathbb{J}^{ij}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i),$$

где $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ вектора декартова базиса.

Простые вычисления показывают, что

$$\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})=\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\int_0^t\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t-\tau):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau\,,\tag{13}$$

где

$$\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y})=\mu_0\sum_{i,j=1}^3\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\tag{14}$$

и

$$\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)=\sum_{i,j=1}^3\left(\mu_0\,\mathbb{D}\left(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\right)-\lambda_0\,\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)\right)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}.\tag{15}$$

Из равенств (13) – (15) следует, что

$$\mathbb{D}\left(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\right)=\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}):\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right)+\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\big)+$$
$$\int_0^t\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau):\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau\,.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_1=\mu_0\,m\sum_{i,j=1}^3\mathbb{J}^{(ij)}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_f}\,,\\ \mathfrak{N}_2=\lambda_0\,(1-m)\sum_{i,j=1}^3\mathbb{J}^{(ij)}\otimes\mathbb{J}^{(ij)}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_s}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0)\rangle_{Y_f}\,,\\ \mathfrak{N}_3(t)=\mu_0\left\langle\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\right\rangle_{Y_f}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)\rangle_{Y_s}\,.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Лемма 5. *1-периодическое решение $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ периодической начально-краевой задачи (9) имеет вид*

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\sum_{i=1}^3C^{(i)}(\boldsymbol{y})\frac{\partial c}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t),$$

где $C^{(i)}(\boldsymbol{y})$, $i=1,2,3$ является решением краевой задачи

$$\nabla_y\cdot\big(\chi(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{e}_i+\nabla_yC^{(i)})\big)=0\tag{17}$$

в области Y.

Задача (17) является уравнением Лапласа в области Y_f, дополненное краевым условием

$$(\boldsymbol{e}_i + \nabla_y C^{(i)}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

на границе γ, где $\boldsymbol{n}$ вектор нормали к γ. Тогда

$$m\,\nabla\, c + \langle \nabla_y\, C\rangle_{Y_f} = \mathbb{B}^{(c)} \nabla\, c = \left(m\mathbb{I} + \big(\sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y C^{(i)}(\boldsymbol{y})\rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{e}_i \big) \right) \nabla\, c\,,$$

и

$$\mathbb{B}^{(c)} = m\mathbb{I} + \big(\sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y C^{(i)}(\boldsymbol{y})\rangle_{Y_f} \otimes \boldsymbol{e}_i \big) = m\mathbb{I} + \mathbb{B}_0\,. \tag{18}$$

4. Доказательства утверждений

Доказательство Теоремы 4 аналогично доказательству Теоремы 3.

Доказательство Леммы 1. Матрица $\mathbb{B}$ – симметричная и положительно определенная. Действительно, умножим уравнение (17) на $C^{(j)}(\boldsymbol{y})$ и проинтегрируем по области Y_f

$$\int_{Y_f} (\nabla C^{(i)} \cdot \nabla C^{(j)} + \boldsymbol{e}_i \cdot \nabla C^{(j)}) dy = 0\,. \tag{1}$$

Пусть $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta} \in R^3$. Рассмотрим следующее выражение

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = D_0 m \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + D_0 \sum_{i=1}^{3} \int_{Y_f} \nabla C^{(i)} \xi_i \cdot \boldsymbol{\eta} dy = D_0 \int_Y \chi(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\xi \cdot \boldsymbol{\eta}) dy\,, \tag{2}$$

где

$$\varphi_\xi = \sum_{i=1}^{3} C^{(i)} \xi_i\,, \quad \varphi_\eta = \sum_{j=1}^{3} C^{(j)} \eta_j\,.$$

Умножим (1) на $D_0 \eta_j \xi_i$ и просуммируем по индексам i и j. В итоге, получим

$$\int_Y \chi(\nabla \varphi_\xi \cdot \nabla \varphi_\eta + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \varphi_\eta) dy = 0. \tag{3}$$

Прибавим теперь к выражению (2) равенство (3). Имеем

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = D_0 \int_Y \chi(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\xi \cdot \boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\xi \cdot \nabla \varphi_\eta + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \varphi_\eta) dy$$

или

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = D_0 \int_Y \chi(\boldsymbol{\xi} + \nabla \varphi_\xi) \cdot (\boldsymbol{\eta} + \nabla \varphi_\eta) dy\,.$$

Очевидно, что $(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\eta} = (\mathbb{B}\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{\xi}$, что, в свою очередь, и означает симметричность матрицы $\mathbb{B}$, и

$$(\mathbb{B}\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\xi} = D_0\int_Y \chi(\boldsymbol{\xi}+\nabla\varphi_\xi)^2 dy \geqslant 0\,.$$

Более того

$$I(\boldsymbol{\xi}) = D_0\int_Y \chi(\boldsymbol{\xi}+\nabla\varphi_\xi)^2 dy \geqslant \alpha_0 > 0$$

для $|\boldsymbol{\xi}| = 1$.

В самом деле, пусть последовательность $\{\boldsymbol{\xi}^n\}$ такая, что $I(\boldsymbol{\xi}) \to 0$ при $n \mapsto \infty$. Можно считать, что $\boldsymbol{\xi}^n \to \boldsymbol{\xi}^0$ при $n \mapsto \infty$. Тогда, в силу непрерывности $I(\boldsymbol{\xi})$, следует, что

$$I(\boldsymbol{\xi}^0) = 0,$$

то есть

$$\boldsymbol{\xi}^0 + \nabla\varphi_\xi^0 = 0$$

или

$$\varphi_\xi^0 = -\boldsymbol{\xi}^0\cdot\boldsymbol{y} + \mathrm{const}\,. \tag{4}$$

Функция $\varphi_\xi^0 = C^{(1)}\xi_1^0 + C^{(2)}\xi_2^0 + C^{(3)}\xi_3^0$ является 1-периодической по $\boldsymbol{y}$, так как функции $C^{(i)}(\boldsymbol{y})$ – 1-периодические по $\boldsymbol{y}$.

Так как поровое пространство является связным, то (4) имеет смысл только для $\boldsymbol{\xi}^0 = 0$, но $|\boldsymbol{\xi}^0| = 1$. Получили противоречие.

Пусть $\mathbb{T}_2$ – поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси y_3, направленной по вектору $\boldsymbol{e}_3$, такой что $\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1$. Здесь $\{\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_3\}$ декартов базис. Если $\boldsymbol{z} = \mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\in Y$, то $\mathbb{T}_2 : Y_f \to Y_f$ и $\chi(\boldsymbol{y}) = \chi(\boldsymbol{z})$, так как поровое пространство симметрично относительно поворотов на $\pi/2$ относительно любой оси координат.

Функция $\widetilde{C}^{(2)}(\boldsymbol{z}) = C^{(2)}(\boldsymbol{y})$ является решением следующей периодической начально-краевой задачи

$$\nabla_z\cdot\big(\chi(\boldsymbol{z})(\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + \mathbb{T}_2\cdot\mathbb{T}_2^*\cdot\nabla_z\widetilde{C}^{(2)})\big) = \nabla_z\cdot\big(\chi(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e}_1 + \nabla_z\widetilde{C}^{(2)})\big) = 0 \tag{5}$$

в единичном кубе $Z = Y$.

Задача (5) совпадает с задачей (17) и, в силу единственности решения задачи (17), имеем

$$C^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \widetilde{C}^{(2)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\mathbb{T}_2\cdot\boldsymbol{y})\,. \tag{6}$$

Аналогично получаем

$$C^{(3)}(\boldsymbol{y}) = \widetilde{C}^{(3)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\boldsymbol{z}) = C^{(1)}(\mathbb{T}_3\cdot\boldsymbol{y}), \tag{7}$$

где $\mathbb{T}_3$ поворот вокруг оси y_2, такой что $\mathbb{T}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$.

Для нахождения матрицы $\mathbb{B}_0$ положим, что

$$\boldsymbol{a}_1 = \langle\nabla_y C^{(1)}(\boldsymbol{y})\rangle_{Y_f}\,,$$

и вычислим

$$\boldsymbol{a}_2 = \langle \nabla_y C^{(2)}(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_2^* \langle \nabla_z C^{(1)}(\boldsymbol{z}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{a}_1 \,,$$

и

$$\boldsymbol{a}_3 = \langle \nabla_y C^{(3)}(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_3^* \langle \nabla_z C^{(1)}(\boldsymbol{z}) \rangle_{Y_f} = \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{a}_1 \,.$$

Пусть $\boldsymbol{a}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$. Тогда

$$\boldsymbol{a}_2 = \alpha_1 \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_3 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_2 - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \,,$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \alpha_1 \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_3 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_3 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 - \alpha_3 \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Здесь мы воспользовались очевидными свойствами преобразований $\mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}_3$:

$$\mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \;\; \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, \;\; \mathbb{T}_2^* \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \,,$$

и

$$\mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3, \;\; \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2, \;\; \mathbb{T}_3^* \cdot \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Учитывая введенные выше обозначения, матрица $\mathbb{B}_0$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_0 = \boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \\ \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \alpha_1 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \alpha_1 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \\ \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 - \alpha_3 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 = \\ \alpha_1 (\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3) \,, \end{aligned}$$

где $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ силу симметричности матрицы $\mathbb{B}_0$.

Литература

1. Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G. and Percivale D. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. – 1992. – 18. – P.481-496.
2. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21.– P.1394-1414.
3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – P.31-75.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического вида / М.: Мир, 1967. – 736 с.
5. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.
6. Мейрманов А.М., Зимин Р.Н., Гальцева О.В., Гальцев О.А. Корректная разрешимость задачи о нелинейной диффузии в несжимаемой пороупругой среде на микроскопическом уровне / Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – 5№124;26.

MATHEMATICAL MODELS OF DIFFUSION IN POROUS ELASTIC MEDIA

A.M. Meirmanov R.N. Zimin, O.V. Galtseva, O.A. Galtsev

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: reshat85@mail.ru

Abstract. The paper is devoted to obtaining of some new correct mathematical models of diffusion process in porous media. They are derived on the basis of the averaging and Nguetseng's method of two-scale convergence.

Key words: homogenization, two-scale convergence.

УДК 517.958, 517.986.7

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛАРДА С ВЯЗКОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ОСИ

Х.Г. Умаров

Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: umarov50@mail.ru

Аннотация. Для одномерного уравнения в частных производных, моделирующего эволюцию распределения концентрации одной из двух компонент бинарной вязкой смеси, исследуется разрешимость задачи Коши посредством сведения ее к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве.

Ключевые слова: уравнение Кана–Хилларда с вязкостью, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Введение. Уравнение Кана-Хилларда с вязкостью (см., например, [1] и приведенную там библиографию) возникает при моделировании динамики кристаллизации в многокомпонентных сплавах с учетом вязкости:

$$v_t = -(bv_{xx} + \mathcal{P}(v) - av_t\ )_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > 0,$$

где a, b — известные положительные параметры, $\mathcal{P}(\cdot)$ — заданная достаточно гладкая функция. В приложениях часто $\mathcal{P}(s) = s - s^3$, поэтому в качестве модельного рассмотрим нелинейное уравнение

$$v_t = \left(v^3 - v\ - bv_{xx} + av_t\right)_{xx}, \quad x \in R^1, \quad t > 0\,. \tag{1}$$

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешенным относительно производной по временной переменной t.

Будем предполагать, что начальная функция φ задачи Коши, определяемая как

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R^1, \tag{2}$$

и искомое классическое решение $v = v(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times \overline{R}^1_+$, $\overline{R}^1_+ = [0, +\infty[$ уравнения (1) для всех значений временной переменной $t \in \overline{R}^1_+$, по пространственной переменной $x \in R^1$, принадлежат банахову пространству $C[-\infty, +\infty] \equiv C[R^1]$ непрерывных функций $\psi = \psi(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$, и норма которого определяется по формуле $\|\psi(x)\|_{C[R^1]} = \sup_{x\in R^1} |\psi(x)|$.

В пространстве $C[R^1]$ дифференциальный оператор d^2/dx^2, с областью определения $\mathcal{D}\left(d^2/dx^2\right) = \{\psi(x) \in C[R^1]\colon \psi'(x), \ \ \psi''(x) \in C[R^1]\}$, порождает сжимающую сильно

непрерывную полугруппу $U\left(t; d^2/dx^2\right)$, $t \geq 0$, класса C_0, представляющуюся сингулярным интегралом [2, с. 681-682], [3, с. 58]:

$$U\left(t; \frac{d^2}{dx^2}\right)\ \psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) \psi(\xi)\, d\xi\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3}$$

Положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора d^2/dx^2 и для резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-1}$, где $\lambda > 0$, I — тождественный оператор, справедлива [2, с. 681] оценка

$$\lambda \left\| \left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \right\| \leq 1 \tag{4}$$

и представление [2, с. 682, с. 664] степеней резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dx^2\right)^{-k}$, $k = 1, 2, \cdots$ через полугруппу $U\left(t; d^2/dx^2\right)$:

$$\left(\lambda I - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} s^{k-1} \exp(-\lambda s)\, U\left(s; \frac{d^2}{dx^2}\right) ds\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{5}$$

Наша цель — найти временной промежуток существования классического решения $v = v(x,t)$ задачи Коши для уравнения (1) в пространстве $C[R^1]$ и оценить норму решения $v = v(x,t)$ на этом промежутке.

Задача Коши для уравнения Кана-Хилларда. Представим уравнение (1) в виде

$$\left(I - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v_t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I\right) v + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^3\,, \tag{6}$$

и, воспользовавшись наличием в точке $\lambda = 1$ резольвенты дифференциального оператора ad^2/dx^2, $a > 0$ в банаховом пространстве $C[R^1]$, применим к обеим частям уравнения (6) линейный ограниченный оператор $\left(I - ad^2/dx^2\right)^{-1}$. Тогда получим эквивалентное (6) уравнение [4, с. 35], которое можно записать в виде абстрактного полулинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$V_t = \mathcal{A}V + F(V)\,, \quad t > 0\,, \tag{7}$$

где $V = V(t) : t > v(x,t)$ — искомая абстрактная функция, определенная для $t \geq 0$ и со значениями в банаховом пространстве $C[R^1]$; $\mathcal{A}$ — операторный коэффициент:

$$\mathcal{A} = -\left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \frac{d^2}{dx^2}\left(b\frac{d^2}{dx^2} + I\right);$$

$F(\cdot)$ — заданный нелинейный оператор, действующий в $C[R^1]$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ определен на функциях $\psi(x) \in C[R^1]$, для которых существуют производные $d^k\psi(x)/dx^k$, $k = \overline{1,4}$, принадлежащие пространству $C[R^1]$, и его можно продолжить до оператора

$$A + B\,, \quad A = \frac{b}{a}\frac{d^2}{dx^2}\,, \quad B = \frac{a+b}{a^2}\left[I - \left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right],$$

с областью определения $\mathcal{D}(A+B)=\mathcal{D}\left(d^2/dx^2\right)$.

Нелинейный оператор $F(\cdot)$ из правой части уравнения (7) представляется в виде

$$F(\psi)=\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{F}(\psi)=-\frac{a}{a+b}B\mathcal{F}(\psi),$$

где $\mathcal{F}$ — оператор суперпозиции, действующий в пространстве $C[R^1]$:

$$\mathcal{F}(\psi)=f(\psi(x)),\quad \psi(x)\in C\left[R^1\right],$$

здесь $f(s)=s^3$.

Отметим, что:

1) так как функции $f(s)$ и $f_s(s)$ непрерывны, то [5, с. 406] оператор суперпозиции $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируем и его производная в точке $\psi_0(x)\in C[R^1]$ определяется равенством $\mathcal{F}'(\psi_0)$=3 $\psi_0^2(x)$;

2) из непрерывной дифференцируемости нелинейного оператора $\mathcal{F}$ и ограниченности линейного оператора B следует [7, с. 200] непрерывная дифференцируемость нелинейного оператора F в пространстве $C[R^1]$ и формула $F'(\psi_0)=-aB\mathcal{F}'(\psi_0)/(a+b)$.

Таким образом, приходим к абстрактному полулинейному дифференциальному уравнению обобщающему уравнение (7) в банаховом пространстве $C[R^1]$:

$$V_t=(A+B)V+F(V),\quad t>0. \tag{8}$$

Начальное условие (2) в $C[R^1]$ перепишется в виде

$$V|_{t=0}=\Phi, \tag{9}$$

где $\Phi=\varphi(x)$ — элемент пространства $C[R^1]$.

Оператор

$$A=\frac{b}{a}\frac{d^2}{dx^2},\quad \mathcal{D}(A)=\mathcal{D}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right),$$

является производящим оператором сжимающей полугруппы $U(t;A)$ класса C_0, для которой справедливо представление

$$U(t;A)=U\left(t;\frac{b}{a}\frac{d^2}{dx^2}\right)=U\left(\frac{b}{a}t;\frac{d^2}{dx^2}\right). \tag{10}$$

Возмущающий оператор

$$B=\frac{a+b}{a^2}\,I-\frac{a+b}{a^2}\left(I-a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1},\quad \mathcal{D}(B)=C\left[R^1\right],$$

линеен и ограничен на всём пространстве, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной группы класса C_0:

$$U(t;B)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\,B^k,$$

для которой справедливы представление

$$U(t;B) = \exp\left(\frac{a+b}{a^2}\,t\right) U\left(-\frac{a+b}{a^2}\,t; \left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{a+b}{a^2}\,t\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (a+b)^k t^k}{k! a^{2k}} \left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-k} \tag{11}$$

и оценка нормы

$$\|U(t;B)\| \le \exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k t^k}{k! a^{2k}} \left\| \left(I - a\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} \right\|^k .$$

Следовательно, применяя оценку (4) нормы резольвенты дифференциального оператора d^2/dx^2, выводим оценку нормы полугруппы порождаемой оператором B:

$$\|U(t;B)\| \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right), \quad t \ge 0.$$

Для произвольного элемента $\psi = \psi\ (x)$ пространства $C[R^1]$, используя соотношения (5), продолжим преобразование степенного ряда в (11):

$$U(t;B)\,\psi = \exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right) \left[\psi + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (a+b)^k t^k}{(k-1)! k! a^{2k}} \int_0^{+\infty} s^{k-1} \exp(-s)\, U\left(as; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi ds\right].$$

Откуда получаем представление полугруппы $U(t;B)$ через полугруппу (3):

$$U(t;B)\,\psi = \exp\left(\frac{a+b}{a^2}\,t\right) \times$$

$$\times \left[\psi - \frac{\sqrt{(a+b)\,t}}{a} \int_0^{+\infty} \exp(-s)\, J_1\left(2\,\frac{\sqrt{(a+b)\,st}}{a}\right) U\left(as; \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}}\right], \tag{12}$$

в котором

$$J_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} (z/2)^{2k+1}$$

— функции Бесселя.

Из полученных представлений (10) и (12) соответственно полугрупп $U(t;A)$ и $U(t;B)$ через полугруппу (3), порождаемую оператором d^2/dx^2, следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора A полугруппы $U(t;A)$ класса C_0 линейным ограниченным оператором B, оператор $A+B$ с областью определения $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$ также порождает [2, с. 672] полугруппу $U(t;A+B)$ класса C_0. При этом возмущённая полугруппа определяется для произвольного элемента ψ банахова пространства разложением в ряд:

$$U(t;A+B)\,\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t)\,\psi\,, \quad t \ge 0\,,$$

где

$$U_0(t)\psi = U(t;A)\psi \quad \text{и} \quad U_k(t)\psi = \int_0^t U(t-s;A)\,BU_{k-1}(s)\,\psi ds\,, \quad k=1,2,\dots\ ,$$

причём ряд абсолютно сходится, равномерно по t в любом конечном интервале положительной полуоси.

В рассматриваемом случае, возмущающий линейный ограниченный оператор B коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором A:

$$BU(t;A)\psi = U(t;A)\,B\psi\,,$$

так как этим свойством обладает резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ и полугруппа $U(t;A)$, для любого производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы класса C_0. Отсюда следует, что для произвольного элемента ψ пространства $C[R^1]$ выполняются равенства

$$U_k(t)\psi = \frac{t^k}{k!}B^kU(t;A)\psi = \frac{t^k}{k!}U(t;A)\,B^k\psi\,, \quad k=1,2,\dots\,,$$

и, значит, справедливо представление

$$U(t;A+B)\psi = U(t;A)\,U(t;B)\,\psi = U(t;B)\,U(t;A)\,\psi =$$

$$= \exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[U\left(\frac{b}{a}t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\ -\right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{(a+b)\,t}}{a}\int_0^{+\infty}\exp(-s)\,J_1\left(2\frac{\sqrt{(a+b)\,st}}{a}\right)U\left(as+\frac{b}{a}t;\frac{d^2}{dx^2}\right)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right] \quad (13)$$

и оценка нормы

$$\|U(t;A+B)\| \le \|U(t;A)\|\,\|U(t;B)\| \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right), \quad t\ge 0\,. \quad (14)$$

Итак, в абстрактном уравнении (8) коэффициент $A+B$ является производящим оператором полугруппы (13) класса C_0, а функция $F(\cdot)$ есть непрерывно дифференцируемое отображение из $C[R^1]$ в $C[R^1]$.

Из непрерывной дифференцируемости отображения $F(\cdot)$ следует, что для любого числа $r>0$ и для всех функций $\psi_i = \psi_i\ (x)$, принадлежащих замкнутому шару радиуса r с центром в нуле пространства $C[R^1]$, $\|\psi_i\|_{C[R^1]} \le r$, $i=1,2$, существует постоянная

$$L_r = \sup_{\|\psi\|_{C[R^1]}\le r}\left\|-\frac{a}{a+b}B\mathcal{F}'(\psi)\right\|_{C[R^1]} = \frac{6}{a}\,r^2$$

для которой

$$\|F(\psi_2)-F(\psi_1)\|_{C[R^1]} \le L_r\|\psi_2-\psi_1\|_{C[R^1]}\ ,$$

т.е. $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому [5, с. 469], [5, с. 185] для любого элемента Φ пространства $C[R^1]$ существует промежуток $[0, t^{**}[\, \subseteq \overline{R}^1_+$ такой, что задача Коши (8), (9) имеет единственное обобщенное решение $V = V(t)$, $t \in [0, t^{**}[$, т.е. единственное непрерывное решение интегрального уравнения

$$V(t) = U(t; A+B)\,\Phi + \int_0^t U(t-\tau; A+B)\,F(V(\tau))d\tau\,. \tag{15}$$

При этом если $t^{**} < +\infty$, то

$$\max_{t\to t^{**}} \|V(t)\|_{C[R^1]} = \infty\,.$$

Это обобщенное решение $V = V(t)$ является единственной неподвижной точкой нелинейного интегрального оператора

$$(HV)(t) = U(t; A+B)\,\Phi + \int_0^t U(t-\tau; A+B)\,F(V(\tau))d\tau\,, \quad t \in [0, t^*]\,, \quad t^* < t^{**}, \tag{16}$$

например, в шаре $S_r(0)$ радиуса $r = 2\exp(2(a+b)/a^2)\,\|\Phi\|_{C[R^1]}$ с центром в нуле банахова пространства $C([0,t^*]\,; C[R^1])$ абстрактных функций $V(t)$, определенных на $[0,t^*]$ со значениями в $C[R^1]$, норма которых в этом пространстве определяется формулой $\|V\|_C = \max_{t\in[0,t^*]} \|V(t)\|_{C[R^1]}$. Тот факт, что нелинейный оператор (15) является оператором сжатия в шаре $S_r(0)$, устанавливается за счет «малости» отрезка $[0,t^*]$:

$$t^* = \min\left\{1; \frac{a}{64\|\Phi\|^2_{C[R^1]}} \exp\left(-6\frac{a+b}{a^2}\right)\right\}. \tag{17}$$

Действительно, для функции $V(t) \in S_r(0)$, $t \in [0,t^*]$, оценивая норму (16), получим

$$\|(HV)(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\|\Phi\|_{C[R^1]} + t^*\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\frac{6}{a}r^3 \le$$

$$\le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\|\Phi\|_{C[R^1]} + t^*\exp\left(8\frac{a+b}{a^2}\right)\frac{48}{a}\|\Phi\|^3_{C[R^1]} \le r\,.$$

Далее, для V_1, $V_2 \in S_r(0)$ имеем

$$\|(HV_2)(t) - (HV_1)(t)\|_{C[R^1]} = \left\|\int_0^t U(t-\tau; A+B)\,[F(V_2(\tau)) - F(V_1(\tau))]d\tau\right\|_{C[R^1]} \le$$

$$\le t^*\frac{6}{a}\,r^2\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}\right)\|V_2 - V_1\|_C \le \frac{3}{8}\,\|V_2 - V_1\|_C\,.$$

Итак, если выполнено условие (17), то нелинейный оператор (16) переводит шар $S_r(0)$ в себя и является на $S_r(0)$ сжимающим отображением, а поэтому интегральное уравнение (15) имеет в $S_r(0)$ единственное решение $V(t)$, $t \in [0,t^*]$, которое будет

обобщенным уравнением задачи Коши (8), (9). Это решение может быть получено как предел последовательности

$$V_0(t) = U(t; A+B)\,\Phi\,,$$

$$V_i(t) = V_0(t) + \int_0^t U(t-\tau; A+B)\,F(V_{i-1}(\tau))d\tau\,, \quad i = 1, 2, \cdots, \quad t \in [0, t^*]\,,$$

сходящейся в пространстве $C([0,t^*]; C[R^1])$ к обобщенному решению задачи Коши (8), (9) при $i \to +\infty$. Принимая $V(t^*)$ за новое начальное данное обобщенное решение с отрезка $[0,t^*]$ продолжается до $V(t)$, $t \in [0, t^*+\delta] \subseteq [0, t^{**}[$, где величина δ зависит только от нормы начального данного Φ и параметров a, b уравнения Кана-Хилларда с вязкостью (1).

Используя оценку (14) полугруппы $U(t; A+B)$, из интегрального уравнения (15) выводим интегральное неравенство[12]

$$\|V(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\|\Phi\|_{C[R^1]} + \frac{2}{a}\int_0^t \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(t-\tau)\right]\|V(\tau)\|^3_{C[R^1]}d\tau\,.$$

Откуда следует [9, с. 13] оценка нормы

$$\|V(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\|\Phi\|_{C[R^1]}\times$$

$$\times\left\{\left[1+\frac{a}{a+b}\|\Phi\|^2_{C[R^1]}\right] - \frac{a}{a+b}\|\Phi\|^2_{C[R^1]}\exp\left(4\frac{a+b}{a^2}t\right)\right\}^{-1/2} \tag{18}$$

на отрезке $[0, t_*] \subseteq [0, t^{**}[$, где

$$t_* = \sup\left\{t \in [0, t^{**}[\ : \frac{a}{a+b}\|\Phi\|^2_{C[R^1]}\left[\exp\left(4\frac{a+b}{a^2}t\right) - 1\right] < 1\right\}\,. \tag{19}$$

Таким образом, на отрезке $[0, t_*]$, на котором

$$t_* < \frac{a^2}{4(a+b)}\ln\left(1 + \frac{a+b}{a\|\Phi\|^2_{C[R^1]}}\right)$$

существует обобщенное решение задачи Коши (8), (9) для которого справедлива оценка нормы (18) при $t \in [0, t_*]$. Это обобщенное решение $V(t)$, $t \in [0, t_*]$, будет классическим решением [5, с. 127], [5, с. 462] задачи Коши (8), (9), если оно непрерывно дифференцируемо в полуинтервале $]0, t_*]$.

Если начальное данное Φ принадлежит области определения оператора $A+B$, то первое слагаемое в правой части (15) есть решение однородного уравнения, соответствующего (8), и, значит, оно имеет непрерывную производную при $t \ge 0$.

[12] Для элементов банахова пространства $C[R^1]$ справедлива оценка $\|\psi\varphi\|_{C[R^1]} \leqslant \|\psi\|_{C[R^1]}\|\varphi\|_{C[R^1]}$, в силу чего, с ним можно работать как с алгеброй [8, с. 120].

Воспользуемся теперь непрерывной дифференцируемостью нелинейного оператора $F(\cdot)$ из правой части уравнения (8). Для обобщенного решения $V(t)$, $t \in [0, t_*]$ значение производной Фреше $F'(V(t)) = -aB\mathcal{F}'(V(t))/(a+b)$, $t \in [0, t_*]$, есть семейство линейных ограниченных операторов действующих из $C[R^1]$ в $C[R^1]$, причем

$$\|F'(V(t))\| \leq L_* = \frac{6}{a} V_*^2, \quad t \in [0, t_*], \tag{20}$$

где

$$V_* = \sup_{x \in R^1, t \in [0, t_*]} |v(x, t)|.$$

По определению производной Фреше, обозначая

$$H_h(t) = V(t+h) - V(t), \quad t \in [0, t_*],$$

имеем

$$\begin{aligned} F(V(t+h)) - F(V(t)) &= F(V(t) + H_h(t)) - F(V(t)) \\ &= F'(V(t)) H_h(t) + \omega(V(t), H_h(t)), \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\|H_h(t)\|_{C[R^1]} \to 0} \frac{\|\omega(V(t), H_h(t))\|_{C[R^1]}}{\|H_h(t)\|_{C[R^1]}} = 0, \quad t \in [0, t_*].$$

Так как обобщенное решение $V(t)$ непрерывно в каждой точке t отрезка $[0, t_*]$, то

$$H_h(t) \to 0 \ \text{ при } \ h \to 0, \quad t \in [0, t_*],$$

следовательно, для достаточно малого $h > 0$, существует постоянная $\Omega > 0$ такая, что

$$\|\omega(V(t), H_h(t))\|_{C[R^1]} \leq \Omega \|H_h(t)\|_{C[R^1]}, \tag{21}$$

для всех $t \in [0, t_*]$.

Пусть t — произвольная фиксированная точка полуинтервала $]0, t_*]$. Для того чтобы установить дифференцируемость обобщенного решения $V(t)$, $t \in [0, t_*]$ в точке t, покажем существование предела

$$\frac{1}{h} H_h(t) = \frac{1}{h} [V(t+h) - V(t)] \ \text{ при } \ h \to 0, \ t \in]0, t_*].$$

Предполагая $t \in]0, t_*]$, имеем

$$H_h(t) = U(t; A+B)[U(h; A+B)\Phi - \Phi] + \int_0^h U(t+h-\tau; A+B) F(V(\tau))\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t U(t-\tau; A+B) \omega(V(\tau), H_h(\tau))\, d\tau + \int_0^t U(t-\tau; A+B) F'(V(\tau)) H_h(\tau)\, d\tau.$$

Откуда, оценивая норму $H_h(t)$, получаем интегральное неравенство

$$\|H_h(t)\|_{C[R^1]} \leq \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left\{\|U(h;A+B)\Phi-\Phi\|_{C[R^1]}+\right.$$

$$+\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau+\int_0^t\|\omega(V(\tau),H_h(\omega))\|_{C[R^1]}d\tau+$$

$$\left.+\int_0^t\|F'(V(\tau))H_h(\tau)\|_{C[R^1]}d\tau\right\}.$$

Полагая $h>0$ достаточно малым и учитывая оценки (20), (21), из последнего неравенства выводим

$$\|H_h(t)\|_{C[R^1]} \leq \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left\{\|U(h;A+B)\Phi-\Phi\|_{C[R^1]}+\right.$$

$$\left.+\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau+\left(\Omega+\frac{6}{a}V_*^2\right)\int_0^t\|H_h(\tau)\|_{C[R^1]}d\tau\right\}.$$

Откуда следует [9, с. 7] оценка нормы

$$\left\|\frac{1}{h}[V(t+h)-V(t)]\right\|_{C[R^1]} \leq$$

$$\leq \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left\{\left\|\frac{1}{h}[U(h;A+B)\Phi-\Phi]\right\|_{C[R^1]}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h}\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau\right\}\times$$

$$\times\left\{1+\left(\Omega+\frac{6}{a}V_*^2\right)\int_0^t \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}s\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{\left(\Omega+\frac{6}{a}V_*^2\right)\frac{a^2}{2(a+b)}\left[\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)-\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}s\right)\right]\right\}ds\right\}. \quad (22)$$

В силу принадлежности элемента $\Phi\in\mathcal{D}(A+B)$, имеем

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}[U(h;A+B)\Phi-\Phi]\right\|_{C[R^1]}=\|(A+B)\Phi\|_{C[R^1]}\leq$$

$$\leq\frac{b}{a}\sup_{x\in R^1}|\varphi''(x)|+2\frac{a+b}{a^2}\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|,$$

а из непрерывности абстрактной функции $F(V(t))$, $t\in[0,t_*]$ вытекает предельное равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \exp\left[2\frac{a+b}{a^2}(h-\tau)\right]\|F(V(\tau))\|_{C[R^1]}d\tau=\|F(\Phi)\|_{C[R^1]}\leq\frac{2}{a}\sup_{x\in R^1}\left|\varphi^3(x)\right|.$$

Итак, переходя в неравенстве (22) к пределу при $h \to 0$, получим

$$\|V'(t)\|_{C[R^1]} \le \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[\|(A+B)\,\Phi\|_{C[R^1]} + \|F(\Phi)\|_{C[R^1]}\right] \times$$

$$\times\left\{1 + \left(\Omega + \frac{6}{a}V_*^2\right)\int_0^t \exp\left(2\frac{a+b}{a^2}s\right) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[\left(\Omega a + 6V_*^2\right) a\frac{\exp\left(2(a+b)t/a^2\right) - \exp\left(2(a+b)s/a^2\right)}{2\,(a+b)}\right] ds\right\}. \quad (23)$$

Следовательно, обобщенное решение $V(t)$ дифференцируемо в полуинтервале $]0, t_*]$. Более того, для его нормы справедлива оценка (23). Таким образом, имеет место

Теорема. *Пусть в задаче Коши* (1), (2) *начальное данное* $\varphi(x) \ne 0$ *принадлежит пространству* $C[R^1]$ *вместе с производными первого и второго порядка. Тогда при* $t \in [0, t_*[$, *где*

$$t_* = \frac{a^2}{4\,(a+b)}\ln\left[1 + \frac{a+b}{a}\left(\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)^{-2}\right],$$

существует единственное классическое решение $v = v(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times [0, t_*[$ *этой задачи в пространстве* $C[R^1]$, *которое может быть получено методом последовательных приближений при* $i \to +\infty$:

$$v_0(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{a+b}{a^2}t\right)\left[\sqrt{\frac{a}{bt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\frac{(x-\xi)^2}{4bt}\right)\varphi(\xi)\,d\xi -\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{(a+b)\,t}{a}}\int_0^{+\infty} J_1\left(2\frac{\sqrt{(a+b)\,st}}{a}\right)\frac{\exp(-s)\,ds}{\sqrt{(a^2s+bt)s}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\frac{(x-\xi)^2}{4\,(a^2s+bt)}\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right],$$

$$v_{i+1}(x,t) = v_0(x,t) +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\left(\frac{a+b}{a^2}(t-\tau)\right)\left\{\sqrt{\frac{a}{b\,(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{a\,(x-\xi)^2}{4b\,(t-\tau)}\right)w_i(\xi,\tau)\,d\xi -\right.$$

$$-\sqrt{\frac{(a+b)\,(t-\tau)}{a}}\int_0^{+\infty} J_1\left(2\frac{\sqrt{(a+b)\,s\,(t-\tau)}}{a}\right)\frac{\exp(-s)\,ds}{\sqrt{[a^2s+b\,(t-\tau)]s}}\times$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{a(x-\xi)^2}{4\,[a^2s+b\,(t-\tau)]}\right)w_i(\xi,\tau)\,d\xi\right\}d\tau,$$

где

$$w_i(\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-r)\,dr}{\sqrt{r}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\xi-\eta)^2}{4ar}\right)v_i^3(\eta,\tau)d\eta-v_i^3(\xi,\tau),$$

и для которого справедлива оценка

$$\sup_{x\in R^1}|v(x,t)|\le\exp\left(2\frac{a+b}{a^2}t\right)\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\times$$
$$\times\left\{\left[1+\frac{a}{a+b}\left(\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)^2\right]-\frac{a}{a+b}\left(\sup_{x\in R^1}|\varphi(x)|\right)^2\exp\left(4\frac{a+b}{a^2}t\right)\right\}^{-1/2}.$$

Литература

1. Gal C. Well-Posedness and Long Time Behavior of the Non-Isothermal Viscous Cahn-Hilliard Equation with Dynamic Boundary Conditions // Dynamics of PDE. – 2008. – 5;1. – P. 39–67.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. I. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.
4. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1971. – 104 с.
5. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. – 500 с.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа / М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.
7. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Appl. Math. Sci., vol. 44) / New York: Springer-Verlag, 1983. – 279 p.
8. Appell J., Zabreiko P.P. Nonlinear superposition operators (Cambridge Texts in Mathematics, № 95) / Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 320 p.
9. Dragomir S.S. Some Gronwall Type Inequalities and Applications / Melbourne: Melbourne City MC, 2002. – 193 p.

SOLVABILITY OF ONE-DIMENSIONAL CAHN-HILLIARD EQUATION WITH VISCOSITY IN SPACE OF UNIFORMLY LIMITED CONTINUOUS FUNCTIONS

Kh.G. Umarov

Chechen State University,
Sheripov Str., 32, 364907, Grozny, Russia, e-mail: umarov50@mail.ru

Abstract. For one-dimensional Cahn-Hillard equation modeling the evolution of concentration distribution of the component of binary viscous mixture, the solvability of Cauchy's problem is studied by reducing to the abstract Cauchy problem in Banach's space.

Key words: Cahn-Hilliard equation, strongly continuous semi-groups of operators.

УДК 517.968

К РЕШЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОРЯДКАМИ НУЛЕЙ

Т.М. Урбанович

Полоцкий государственный университет

ул. Блохина, 29, Новополоцк, 211440, Белоруссия, e-mail: UrbanovichTM@gmail.com

Аннотация. Исследуется сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши с произвольными особенностями нецелого порядка у коэффициентов. Получены условия разрешимости и явная формула представления решения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, ядро Коши, задача линейного сопряжения.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение на прямой

$$a\varphi + bS\varphi = f \tag{1}$$

с оператором Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}\,,$$

где коэффициенты a, b и правая часть f принадлежат классу Гельдера $H(\mathbb{R},\infty)$ на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$, причем $f(\infty) = 0$.

Напомним, что функция $\varphi(t) \in H(\mathbb{R},\infty)$ принадлежит классу Гёльдера на расширенной прямой с показателем $0 < \mu < 1$ (условию Липшица при $\mu = 1$), если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le Cd^{\mu}(t_1, t_2)\,,$$

где

$$d(t_1, t_2) = \frac{|t_1 - t_2|}{(1+|t_1|)(1+|t_2|)}\,, \quad t_j \in \mathbb{R}\,, \quad j = 1, 2\,,$$

$$d(t_1, \infty) = d(\infty, t_1) = \frac{1}{(1+|t_1|)}\,, \quad t_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Условие $\varphi(\infty) = 0$ выделяет в пространстве $H(\mathbb{R},\infty)$ подпространство, которое обозначаем $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$.

Очевидно, функции $\varphi(t) \in \overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$ этого класса ведут себя как $O(|z|^{-\varepsilon})$ при $|z| \to \infty$ с некоторым $\varepsilon > 0$ (зависящим от φ). В частности, для $\varphi(t) \in \overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$ вне окрестности точки t_0 функция $(t-t_0)^{-1}\varphi(t)$ интегрируема, поэтому сингулярный интеграл Коши

$(S\varphi)(t_0)$ понимается в смысле главного значения только по отношению к точке t_0. Хорошо известно [1, 2], что оператор S инвариантен в классе $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$.

Уравнение (1) является уравнением нормального типа, если коэффициенты $a \pm b$ обратимы в классе $H(\mathbb{R},\infty)$, т.е. они отличны от нуля всюду на $\overline{\mathbb{R}}$. Исчерпывающее исследование уравнения этого типа было впервые проведено Ф.Д. Гаховым и изложено в его монографии [1]. Оно основывается на сведении уравнения (1) к эквивалентной задаче линейного сопряжения и эффективного решения последней. Характер разрешимости этого уравнения определяется целым числом æ – индексом Коши

$$æ = \frac{1}{2\pi i}\ln G(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad G = \frac{a-b}{a+b}\,. \tag{2}$$

Именно, при $æ \geqslant 0$ уравнение всегда разрешимо в классе $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R};\infty)$, причем однородное уравнение имеет æ линейно независимых решений. При $æ < 0$ однородное уравнение имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть f удовлетворяет $-æ$ условиям ортогональности.

Исходя из конечного множества $E \subset \mathbb{R}$, обозначим $\overset{*}{H}(\mathbb{R},E;\infty)$ класс функций φ, которые принадлежат $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}\setminus U,\infty)$ вне любой окрестности U множества E, а в окрестности каждой точки $\tau \in E$ представимы в виде $\varphi_0(t)(t-\tau)^{-1}$, где $\varphi_0 \in H$ и $\varphi_0(\tau) = 0$. Тогда любое решение $\varphi \in \overset{*}{H}(\mathbb{R},E;\infty)$ уравнения (1) с правой частью $f \in \overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$ также принадлежит классу $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$.

Пусть заданы конечные множества E и F, которые не пересекаются. Метод Ф.Д. Гахова будет воспроизведен ниже в исключительном случае, когда функции $a \pm b$ допускают нули в конечном числе точек действительной прямой:

$$\begin{aligned} (a+b)(t) &= O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t \to \tau \in E\,, \\ (a-b)(t) &= O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t \to \tau \in F\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где конечные множества E и F не пересекаются.

В случае целых положительных α_τ уравнение (1) на гладком замкнутом контуре интегрирования Γ было впервые рассмотрено Ф.Д. Гаховым [3] и Л.А. Чикиным [4]. Независимо от этих работ и другим методом Д.И. Шерман [5, 6] получил аналогичные результаты в предположении, что только одна из функций $(a \pm b)(t)$ имеет нули целых порядков на контуре Γ.

В данной работе рассматривается ситуация, когда функции $a \pm b$ допускают на прямой нули произвольных неотрицательных порядков α_τ. Случай $0 < \alpha_\tau < 1$ рассмотрен в работе [7].

Условия (3) уточним следующим образом. Положим

$$A(t) = \prod_{\tau\in E}\left(\frac{t-\tau}{t+i}\right)^{\alpha_\tau}, \quad B(t) = \prod_{\tau\in F}\left(\frac{t-\tau}{t+i}\right)^{\alpha_\tau}, \tag{4}$$

где ветви соответствующих степенных множителей выбраны с разрезом вдоль отрезков $[\tau, -i]$. В частности, $A(t)$ и $B(t)$ продолжаются до функций, аналитических в полуплоскости $D_+ = \{z,\ \mathrm{Im} z > 0\}$, для этих продолжений ниже используем те же обозначения. В принятых обозначениях требуется, чтобы функции c, d в представлении

$$a + b = cA\,, \quad a - b = dB\,, \tag{5}$$

принадлежали классу $H(\mathbb{R}, \infty)$ и были обратимы в этом классе.

Заметим, что функции

$$\widetilde{A}(t) = \frac{A(t)}{|A(t)|}\,, \quad \widetilde{B}(t) = \frac{B(t)}{|B(t)|}$$

кусочно непрерывны на прямой с возможными разрывами в точках множеств E и F. Их односторонние пределы в этих точках $\tau \in E$ и $\tau \in F$ связаны, соответственно, соотношениями

$$\widetilde{A}(\tau - 0) = e^{\pi\alpha_\tau}\widetilde{A}(\tau + 0),\ \tau \in E, \quad \widetilde{B}(\tau - 0) = e^{\pi\alpha_\tau}\widetilde{B}(\tau + 0),\ \tau \in F\,. \tag{6}$$

Поэтому (5) можем представить в виде

$$(a + b)(t) = \tilde{c}(t)\prod_{\tau\in E}\left|\frac{t-\tau}{t+i}\right|^{\alpha_\tau}, \quad (a - b)(t) = \tilde{d}(t)\prod_{\tau\in F}\left|\frac{t-\tau}{t+i}\right|^{\alpha_\tau}\,,$$

где обратимые коэффициенты $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ кусочно непрерывны с характером разрыва (6) в точках E и F соответственно.

В обозначениях (2) введем каноническую функцию $X(z)$, отвечающую коэффициенту G. По определению [1, 2] это кусочно аналитическая функция, которая в полуплоскости $D_\pm = \{\pm\mathrm{Im} z > 0\}$ представима в виде

$$X(z) = X_+^0(z),\ z \in D_+; \quad X(z) = X_-^0(z)\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{æ},\ z \in D_-; \tag{7}$$

где аналитическая в $D_\pm$ функция $X_\pm$ принадлежит и обратима в классе $H(\overline{D}_\pm, \infty)$ (классы $H(\overline{D}_\pm, \infty)$ в полуплоскостях определяются совершенно аналогично случаю прямой). Кроме того, предельные значения $X^\pm$ функции X на прямой $\mathbb{R}$ связаны соотношением

$$X^+ = GX^-\,. \tag{8}$$

Следуя [1, 2], каноническую функцию X можно построить в явном виде. С этой целью, исходя из непрерывных ветвей логарифма, рассмотрим функцию

$$g(t) = \ln G(t) - æ\ln\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\,,$$

которая, очевидно, принадлежит классу $H(\mathbb{R}, \infty)$. Отвечающий ей интеграл типа Коши

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(t) - g(\infty)}{t - z}dt\,, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

принадлежит классу $\overset{\circ}{H}(\overline{D}_{\pm};\infty)$ в каждой из полуплоскостей $D^{\pm}=\{\pm\mathrm{Im}z>0\}$ и его граничные значения связаны формулой Сохоцкого-Племеля $h^{+}(t)-h^{-}(t)=g(t)-g(\infty)$. Поэтому условия (7), (8) выполнены по отношению к $X_{+}^{0}(z)=\exp[h(z)+g(\infty)],\ z\in D_{+}$, и $X_{-}^{0}(z)=\exp[h(z)],\ z\in D_{-}$.

Пусть $[x]$ и $\{x\}$ означают, соответственно, целую и дробную части вещественного числа x. Введем неотрицательные целые числа

$$m=\sum\nolimits_{\tau\in E}[\alpha_{\tau}]\,,\quad n=\sum\nolimits_{\tau\in F}[\alpha_{\tau}]\,, \tag{9}$$

и запишем

$$A=A^{0}A^{1}\,,\quad B=B^{0}B^{1}\,, \tag{10}$$

где рациональные функции A^{0}, B^{0} определяются аналогично (4) по целым частям $[\alpha_{\tau}]$ и аналогичный смысл имеют A^{1}, B^{1} по отношению к дробным частям показателей.

Решение уравнения (1) с правой частью $f\in\overset{\circ}{H}(\mathbb{R};\infty)$ будем отыскивать в классе

$$\left\{\varphi\,\Big|\,\frac{\varphi}{B^{1}}\in\overset{*}{H}(\mathbb{R},E\cup F;\infty)\right\}. \tag{11}$$

Пусть φ есть решение уравнения (1) из этого класса и

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\,,\quad z\in D_{+}\cup D_{-}\,. \tag{12}$$

Хорошо известно [1, 2], что тогда функция $\phi(z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\phi(z)}{B^{1}(z)}\in\overset{*}{H}(\overline{D}_{+},E\cup F;\infty)\,,\quad \phi(z)\in\overset{*}{H}(\overline{D}_{-},E\cup F;\infty)\,, \tag{13}$$

где классы $\overset{*}{H}(\overline{D}_{\pm},E\cup F;\infty)$ в полуплоскостях определяются совершенно аналогично случаю прямой.

По формулам Сохоцкого-Племеля

$$\varphi=\phi^{+}-\phi^{-},\quad S\varphi=\phi^{+}+\phi^{-}\,, \tag{14}$$

поэтому, с учетом (2), (8), (9), уравнение (1) можем переписать в форме краевого условия

$$A\frac{\phi^{+}}{X^{+}}-B^{0}B^{1}\frac{\phi^{-}}{X^{-}}=\frac{f}{cX^{+}}\,,$$

для функции ϕ. После деления на B^{1} отсюда следует

$$\left(\frac{A\phi}{B^{1}X}\right)^{+}-B^{0}\left(\frac{\phi}{X}\right)^{-}=g,\quad g=\frac{f}{cX^{+}B^{1}}\,.$$

Введем кусочно аналитическую функцию ψ по формулам

$$\psi(z)=\frac{A(z)\phi(z)}{B^{1}(z)X(z)},\ z\in D^{+};\quad \psi(z)=B^{0}(z)\frac{\phi(z)}{X(z)},\ z\in D^{-}\,, \tag{15}$$

где, напомним,

$$B^0(z) = \prod_{\tau\in F}\left(\frac{z-\tau}{z+i}\right)^{[\alpha_\tau]} .$$

Тогда предыдущее краевое условие можем представить в форме

$$\psi^+ - \psi^- = g\,. \tag{16}$$

Из (7), (9) и (15) выводим, что в окрестности точки $z=-i$ функция ψ имеет поведение

$$\psi(z) = O(1)(z+i)^{-(æ+n)_0} \quad \text{при} \quad z\to -i\,, \tag{17}$$

где, для целого k, под $(k)_0$ здесь и ниже понимается неотрицательное число $(k+|k|)/2$. В частности, при $æ+n<0$ функция ψ аналитична в окрестности точки $z=-i$ и ее производные до порядка $-æ-n-1$ включительно обращаются в этой точке в нуль. Удобно этот факт записывать единообразно в форме

$$\psi^{(k)}(-i) = 0,\ 0\leqslant k\leqslant (-æ-n)_0 - 1\,, \tag{18}$$

где здесь и ниже условия этого типа по пустому множеству индексов k опускаются.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(t)dt}{t-z}\,, \quad g = \frac{f}{cX^+B^1}\,.$$

Очевидно, функция ψ_0 принадлежит классу (13) и удовлетворяет краевому условию (16). Поэтому разность $\psi-\psi_0$ аналитична вне конечного множества $E\cup F\cup\{-i\}$, исчезает на бесконечности, допускает слабые особенности в точках $\tau\in E\cup F$ и возможный полюс в точке $-i$. С учетом (17) отсюда следует

$$\psi(z) = \psi_0(z) + p(z)(z+i)^{-(æ+n)_0}$$

с некоторым многочленом p степени $\deg p < (æ+n)_0$ (в случае $(æ+n)_0 = 0$ этот многочлен считается равным нулю). Кроме того, при $æ+n<0$ функция ψ должна быть подчинена условиям (18). При выполнении этих условий функция ϕ, которая восстанавливается по ψ из равенств (15), аналитична вне вещественной оси. В соответствии с (14) и (2), (8) отсюда приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты a, b уравнения (1) представлены в виде (4), (5), где c, d обратимы в классе $H(\mathbb{R};\infty)$. Пусть $f\in\overset{\circ}{H}(\mathbb{R};\infty)$ и*

$$g = \frac{f}{cX^+B^1}, \quad q(t) = (t+i)^{(æ+n)_0}\,. \tag{19}$$

Тогда любое решение φ уравнения (1) в классе (11) представимо в виде

$$\varphi = \frac{X^+B^1}{A}\left(\frac{g+Sg}{2}+\frac{p}{q}\right) + \frac{cX^+}{dB^0}\left(\frac{g-Sg}{2}-\frac{p}{q}\right)\,, \tag{20}$$

с некоторым многочленом p степени меньше $(æ+n)_0$, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)dt}{(t+i)^{k+1}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(-i) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant (-æ-n)_0 - 1\,. \tag{21}$$

Обратно, если эти условия выполнены и формула (20) определяет функцию из класса (11), то эта функция является решением уравнения (1).

Возникает задача описания условий на правую часть f уравнения (1) и многочлен p, обеспечивающих принадлежность функции (20) классу (11). Начнем со следующего вспомогательного предложения.

Лемма 1. *Пусть заданы попарно различные точки $z_1, \ldots, z_l,\ \tau_1, \ldots, \tau_s$ комплексной плоскости и неотрицательные целые числа $m_1, \ldots, m_l,\ n_1, \ldots, n_s$. Положим $M = m_1 + \ldots + m_l,\ \ N = n_1 + \ldots + n_s$ и $q(z) = (z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_l)^{m_l}$. Тогда при $M \geqslant N$ система линейных уравнений*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau_j) = \xi_j^k\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n_j - 1,\ j = 1, \ldots, s\,, \tag{22}$$

всегда разрешима в классе P многочленов степени меньше M, а при $M \leqslant N$ соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. В частности, при $N > M$ существует такое подпространство $X \subseteq \mathbb{C}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{n_s}$ размерности $N - M$, что условия

$$\sum\nolimits_{k,j} \xi_j^k \eta_j^k = 0,\ \eta \in X\,,$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной системы (22).

□ Предположим сначала, что $M = N$ и пусть многочлен $p \in P$ удовлетворяет однородной системе (22). Тогда функция p/q имеет в точках τ_j нуль порядка n_j. Поскольку, по условию, эти точки отличны от точек z_k, отсюда следует, что аналогичным свойством обладает и многочлен p. Но тогда либо его степень должна быть не меньше M, что невозможно, либо $p = 0$. Таким образом, однородная система (22) имеет только нулевое решение и следовательно, неоднородная система однозначно разрешима. Очевидно, последнее свойство справедливо и при $N \geqslant M$.

Остается рассмотреть случай $M > N$. В этом случае систему (22) можем рассматривать в подпространстве P многочленов степени меньше N, размерность которого равна N. Поэтому эта система, а вместе с ней и исходная система всегда разрешимы. ■

Рассмотрим сначала случай $f = 0$ однородного уравнения (1).

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 размерность пространства решений однородного уравнения (1) в классе (11) равна $(æ - m)_0$. Более точно, при $æ \leqslant n$ однородное уравнение в этом классе имеет только нулевое решение, а при $æ > n$ в обозначениях (19) его решениями служат функции*

$$\varphi = X^+\left(\frac{B^1}{A} - \frac{c}{dB^0}\right)\frac{p}{q}$$

с многочленами p степени меньше $(æ+n)_0$, подчиненными условиям

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau)=0,\ 0\leqslant k\leqslant[\alpha_\tau]-1,\ \tau\in E\cup F\cup\{-i\}\,, \tag{23}$$

где для единообразия положено $[\alpha_{-i}]=(-æ-n)_0$.

□ Первую часть условий (23) составляют условия (21) при $f=0$, а вторая часть этих условий обеспечивает принадлежность функции φ классу (11). Пусть P есть класс многочленов степени меньше $M=(æ+n)_0$ и $N=m+n+(-æ-n)_0$ есть суммарное число условий (23), которые выделяют подпространство $P_0\subseteq P$. Из леммы 1, где следует положить $l=1,\ z_1=-i$, при $æ+n>0$ вытекает, что размерность $\dim P_0=(M-N)_0$, т.е. $P_0=0$ при $N>M$ и $\dim P_0=M-N$ в противном случае. Остается заметить, что

$$M-N=(æ+n)_0-m-n-(-æ-n)_0=æ-m\,. \quad ■$$

Вопросу о принадлежности классу (11) функций (20) предпошлем рассмотрение граничных свойств интеграла типа Коши с дифференцируемой плотностью. Пусть $0<r_0<r_1$ и D есть полукруг $\{|z|<r_0,\ \mathrm{Im}z>0\}$. Рассмотрим в этом полукруге интеграл

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-r_1}^{r_1}\frac{\varphi(t)dt}{t^\delta(t-z)}\,, \tag{24}$$

где $0\leqslant\delta<1$, и степенная функция фиксируется ее непрерывной ветвью в одном из полукругов $\{|z|<r_0,\ \pm\mathrm{Im}z>0\}$. Хорошо известно (и этот факт неоднократно использовался выше), что при $\varphi\in H[-r_1,r_1]$ функция $z^\delta\phi(z)$ принадлежит классу $H(\overline{D})$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi\in H^n[-r_1,r_1]$, $n\geqslant1$, т.е $n-$ая производная $\varphi^{(n)}\in H[-r_1,r_1]$. Тогда при $\delta=0$ функция (24) принадлежит классу $H^n(\overline{D})$, а при $0<\delta<1$ она представима в виде*

$$\phi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^{k-\delta}}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\phi_0(z)\,, \tag{25}$$

где $\phi_0\in H^{n-1}(\overline{D})$ и $z^\delta\phi_0^{(n)}(z)\in H(\overline{D})$.

□ Пусть сначала $\delta=0$. Дифференцируя функцию (24) и интегрируя результат по частям, получим:

$$\phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-r_1}^{r_1}\frac{\varphi'(t)dt}{t-z}-\frac{\varphi(r_1)}{r_1-z}-\frac{\varphi(-r_1)}{r_1+z}\right),\quad z\in D\,.$$

Повторяя эту процедуру, приходим к равенству

$$\phi^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-r_1}^{r_1}\frac{\varphi^{(n)}(t)dt}{t-z}+\psi(z) \tag{26}$$

с некоторой функцией ψ из класса $H(\overline{D})$. Следовательно, и сама производная $\phi^{(n)}$ принадлежит этому классу.

Пусть теперь $0 < \delta < 1$. Предположим сначала, что $\varphi(t)$ совпадает с многочленом

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)\,.$$

Пусть D_1 тот из полукругов $\{|z| < r_1,\ \pm \mathrm{Im} z > 0\}$, в котором зафиксирована ветвь степенной функции z^δ. Очевидно, либо $D \subseteq D_1$, либо D и D_1 лежат в разных полуплоскостях. В первом случае, по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_L \pm \int_{-r_1}^{r_1}\right) \frac{p(t)dt}{t^\delta(t-z)} = \frac{p(z)}{z^\delta}, \quad z \in D\,,$$

где знак определяется выбором полукруга D_1 и L есть криволинейная часть его границы. Во втором случае, рассматриваемый интеграл равен нулю в D. Поэтому в обоих случаях утверждение леммы очевидно.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $\varphi^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. В этом случае можем записать

$$\varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds\,,$$

так что при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ будем иметь

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-k-1}\varphi^{(n)}(s)}{(n-k-1)!} ds = \frac{t^{n-k}}{(n-k-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n-k-1} \varphi^{(n)}(t\tau) d\tau\,.$$

Таким образом,

$$t^{k-n}\varphi^{(k)}(t) \in H[-r_1, r_1]\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1\,.$$

Следовательно, по формуле Лейбница

$$[t^{-\delta}\varphi(t)]^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{1-\delta+k-n} \varphi^{(k)}(t) \in H[-r_1, r_1]$$

с соответствующими коэффициентами $c_k \in \mathbb{R}$ и аналогично

$$[t^{-\delta}\varphi(t)]^{(n)} = t^{-\delta}\varphi^{(n)}(t) + \varphi_0(t), \quad \varphi_0 \in H[-r_1, r_1]\,.$$

Записывая теперь для производных функции (24) порядков $k = n-1$ и $k = n$ аналогичные (26) равенства, отсюда приходим к принадлежности функций $\phi^{(n-1)}(z)$ и $z^\delta \phi^{(n)}(z)$ классу $H(\overline{D})$, что завершает доказательство леммы. ■

С помощью леммы 2 легко описать условия, при которых функция ϕ имеет нуль максимально возможного порядка.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 функция $\phi(z)$ имеет нуль порядка $n - \delta$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \phi^{(k)}(0) = 0\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\,, \quad \textit{при} \quad \delta = 0\,, \\ \phi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0) = 0\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\,, \quad \textit{при} \quad \delta > 0\,, \end{gathered} \tag{27}$$

и в этом случае функция $z^{\delta-n}\phi(z) \in H(\overline{D})$.

□ При $\delta = 0$ утверждение леммы очевидно. То, что функция $z^{-n}\phi(z)$ принадлежит классу H, вытекает из равенства

$$\phi(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}\phi^{(n)}(t)dt = \frac{z^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\phi^{(n)}(z\tau)d\tau\,, \qquad (28)$$

где учтено свойство выпуклости полукруга D.

Пусть $0 < \delta < 1$. Если одно из значений $\varphi^{(k)}(0)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, отлично от нуля, то в силу представления (25) функция ϕ не может иметь нуль порядка $n-1$ в точке $z = 0$. Поэтому условия (27) необходимы. Если они выполнены, то можем написать равенство (28). Согласно лемме 2 в этом случае $\phi_*(z) = z^\delta\phi^{(n)}(z) \in H(\overline{D})$, так что и функция

$$z^{\delta-n}\phi(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{\tau^\delta}\phi_*(z\tau)d\tau$$

принадлежит классу H. ■

Обратимся к неоднородному уравнению (1).

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, коэффициенты* c, d *и функция* f *принадлежат классу* $H^{[\alpha_\tau]}$ *в окрестности точек* $\tau \in E \cup F$. *Положим для краткости* $(F)^0 = \{\tau \in F,\ \{\alpha_\tau\} > 0\}$. *Тогда условия*

$$f^{(k)}(\tau) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant [\alpha_\tau] - 1\,, \quad \tau \in (F)^0\,, \qquad (29)$$

необходимы для разрешимости уравнения (1) в классе (11). Пусть эти условия выполнены. Тогда при $æ - m \geqslant 0$ *уравнение (1) всегда разрешимо, а при* $æ - m < 0$ *для его разрешимости необходимо выполнение* $m - æ$ *линейно независимых условий на правую часть* f. *Более точно, существует такое подпространство*

$$X \subseteq \mathbb{C}^{(-æ-n)_0} \times \prod\nolimits_{\tau\in E\cup F} \mathbb{C}^{[\alpha_\tau]}$$

размерности $m - æ$, *что в обозначениях (19) условия ортогональности*

$$\frac{\eta^k}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)dt}{(t+i)^{k+1}} + \sum_{\tau\in E}\sum_{k=0}^{[\alpha_\tau]-1} \eta_\tau^k (g+Sg)^{(k)}(\tau) + \sum_{\tau\in E}\sum_{k=0}^{[\alpha_\tau]-1} \eta_\tau^k (g-Sg)^{(k)}(\tau) = 0 \qquad (30)$$

ко всем векторам $\eta = (\eta^k, \eta_\tau^k) \in X$ *необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (1) в классе (11).*

□ По предположению, коэффициенты c, d принадлежат классу $H^{[\alpha_\tau]}$ в окрестности точек $\tau \in E \cup F$. Из леммы 1 и построения канонической функции X видно, что аналогичным свойством обладает и функция X^+. Таким образом, в окрестности точек $\tau \in (E)^0$ функция g в (19) представима в виде

$$g(t) = (t-\tau)^{-\delta_\tau}\tilde{g}(t)\,, \quad \delta_\tau = \{\alpha_\tau\}\,,$$

где $\tilde{g} \in H^{[\alpha_\tau]}$, и ветвь степенной функции фиксируется с верхней или нижней полуплоскости, а в окрестности остальных точек принадлежит $H^{[\alpha_\tau]}$. Поэтому, на основании лемм 2 и 3, заключаем, что условия (29) необходимы для того чтобы функции в круглых скобках в (20) имели нуль порядка $[\alpha_\tau]$ в точках $\tau \in (F)^0$ и принадлежали классу $H^{[\alpha_\tau]-1}$ в окрестности всех точек $E \cup F$, (конечно, при $[\alpha_\tau] = 0$ под указанным классом следует понимать H). Совместно с (21) и условиями

$$\begin{aligned} &\left(\frac{g+Sg}{2} + \frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau) = 0\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant [\alpha_\tau] - 1\,,\ \tau \in E\,, \\ &\left(\frac{g-Sg}{2} - \frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau) = 0\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant [\alpha_\tau] - 1\,,\ \tau \in F\,, \end{aligned} \tag{31}$$

они необходимы и достаточны для принадлежности функции (20) классу (11). По отношению к многочленам p условия (21) и (31) можно рассматривать как неоднородную систему линейных уравнений леммы 1, правая часть

$$\xi \in \mathbb{C}^{(-æ-n)_0} \times \prod\nolimits_{\tau \in E \cup F} \mathbb{C}^{[\alpha_\tau]}$$

которой зависит от f. Соответствующая ей однородная система описывается (23). Таким образом, как и при доказательстве теоремы 1, следует воспользоваться этой леммой, где нужно положить $M = (æ + n)_0$ и $N = m + n_+(-æ - n)_0$. Поскольку $M - N = æ - m$, отсюда следуют все утверждения теоремы. При этом соотношения (30) как раз являются условиями разрешимости системы, о которой идет речь в лемме 1. ■

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. / М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения // Известия Казанского физ-матем. общества. – 1949 – 14;3. – С.75-160.
4. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Учёные записки Казанского гос. ун-та им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1953. – 113;10. – С.57-105.
5. Шерман Д.И. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1951. – 15;1. – С.75-82.
6. Шерман Д.И. О приёмах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1948. – 12;4. – С.423-452.
7. Солдатов А.П., Урбанович Т.М. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011 – №.17 (112);24. – С.165-171.

TO SOLUTION OF CHARACTERISTIC SINGULAR INTEGRAL EQUATION ON REAL AXIS IN EXCEPTIONAL CASE WITH ARBITRARY ZERO ORDERS

T.M. Urbanovich

Polotsk State University,
Blohina St., 29, Novopolotsk, 211440, Belarus, e-mail: UrbanovichTM@gmail.com

Abstract. Singular integral equation with Cauchy's kernel having arbitrary singularities of noninteger order is studied. The solvability conditions and the explicit formula of the solution representation are obtained.

Key words: characteristic singular integral equation, Cauchy's kernel, linear conjugation problem.

УДК 511

О ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Нгуен Тхи Ча

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: nguyentra.bsu@gmail.com

Аннотация. Доказано, что к заданному числу N можно подойти суммой двух квадратов простых чисел на расстояние, не большее, чем $\sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$.

Ключевые слова: простые числа, диофантовы неравенства, явная формула, плотностная теорема.

1. Введение. Пусть $N(\sigma, T)$ — число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leqslant \Re s < 1$, $0 < \Im s \leqslant T$.

Оценки вида

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T, \quad \lambda \geqslant 1, \quad c \geqslant 1\,,$$

где λ и c — константы, называются плотностными теоремами. Наилучшим современным значением λ в таких оценках является $\lambda = \frac{6}{5}$ (см. [1]). Константа c играет меньшую роль; в работе [2] доказано, что $c < 18.2$.

Со времен Римана известны формулы, связывающие суммы по простым числам с суммами по нетривиальным нулям дзета-функции. Такие формулы называются явными. Пусть $\psi(x)$ – функция Чебышева. Одной из самых известных явных формул является следующее равенство:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im\rho| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\Big(\frac{x \ln^2 x}{T}\Big)\,,$$

где $2 < T \leqslant x$, а суммирование ведется по нетривиальным нулям дзета-функции ρ.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [3],[4] разработал новую технику решения арифметических задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной. Плотностная техника особенно эффективна для решения задач о попадании простых чисел в короткие промежутки.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [5] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники.

Теорема 1. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Для любого числа $H > 0$ и числа N, удовлетворяющего условию $H > N^{1-\frac{1}{2\lambda}} \exp(\ln^{0.8} N)$, неравенство*

$$|p - N| \leqslant H \tag{1}$$

разрешимо в простых числах p.

Для числа решений $J(N,H)$ неравенства (1) справедлива оценка $J(N,H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2006 году в работе [6] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Для любого числа $H > 0$ и числа N, удовлетворяющего условию $H > N^{1-\frac{1}{2\lambda}} \exp(\ln^{0.8} N)$, неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

В настоящей статье уточняется утверждение Теоремы 2, а также формулируются две новые теоремы о диофантовых неравенствах с простыми числами. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 3. *Если $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема 4. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если*

$$H > N^{(1-\frac{1}{2\lambda})^2} \exp(\ln^{0.8} N)\,,$$

то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3.

Теорема 5. *Пусть λ – константа из плотностной теоремы. Если*

$$H > N^{(1-\frac{1}{\lambda})(1-\frac{1}{2\lambda})} \exp(\ln^{0.8} N)\,,$$

то неравенство

$$|p_1 + p_2 - N| \leqslant H$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

В настоящей статье представлено доказательство Теоремы 3, а доказательства теорем 4 и 5 автор рассчитывает опубликовать в последующих работах.

Замечание 1. В отличие от утверждений теорем 1 и 2 утверждение теоремы 3 не зависит от константы λ из плотностной теоремы.

В доказательстве теоремы 3 содержится оценка снизу для числа решений диофантова неравенства, однако эта оценка, по-видимому, не является точной.

Замечание 2. Интересно сравнить теоремы 1 и 3. В теореме 3 параметр H можно выбрать меньше, чем $\sqrt{N}$, а в теореме 1 разрешимость неравенства (1) при $H = \sqrt{N}$ не следует даже из гипотезы Римана.

Для доказательства Теоремы 3 нам потребуется несколько лемм.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1.[Явная формула] *Пусть* $2 \le T \le x$. *Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ *— нули* $\zeta(s)$ *в критической полосе.*

Доказательство см. в [7, глава 5].

Лемма 2. *Для функции* $N(\sigma, T)$ *справедлива оценка*

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T$$

при $\lambda = \frac{6}{5}$.

Доказательство см. в [1].

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что* $\zeta(s) \ne 0$ *в области*

$$\sigma \ge 1 - \frac{c_1}{\ln^{2/3} |t| (\ln \ln |t|)^{1/3}}, \text{ где } |t| \ge 10.$$

Доказательство см. в [7, глава 6].

Лемма 4. *При* $T \ge 2$ *справедливы оценки*

$$\sum_{|\gamma - T| \le 1} 1 = O(\ln T), \qquad \sum_{|\gamma - T| > 1} 1 = O(\ln^2 T).$$

Доказательство см. в [7, глава 4].

Лемма 5. *Справедливо оценка*

$$\left| \sum_{|\gamma| \le T} x^\rho \right| \ll \max_{1/2 \le \sigma < 1} x^\rho N(\sigma, T).$$

Доказательство см. в [5, глава 5].

3. Доказательство основной теоремы. Без ограничения общности считаем, что $H \le \sqrt{N}/2$.

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{N - 2N_1 < p^2 \le N - N_1} \sum_{\sqrt{N - H - p^2} \le k \le \sqrt{N + H - p^2}} \Lambda(k),$$

где $N_1 = N^{19/24} \exp(\ln^{0.8} N)$.

Достаточно получить неравенство

$$S \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}}\,. \tag{2}$$

Действительно, если на промежутках

$$[\sqrt{N-H-p^2}, \sqrt{N+H-p^2}]$$

нет простых чисел, то для S справедлива следующая оценка сверху:

$$S \ll \frac{N_1}{\sqrt{N}} \ln^2 N\,,$$

которая противоречит (2).

Воспользуемся леммой 1:

$$S = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \Big(\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2} -$$

$$- \sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-H-p^2}}^{\sqrt{N+H-p^2}} x^{\rho-1}dx + O(\frac{\sqrt{N_1}\ln^2 N}{T})\Big)\,,$$

где $T = \frac{N_1 \ln^3 N}{H}$.

Параметр T выбран с таким расчетом, чтобы остаточный член явной формулы был меньше по порядку, чем $\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}$.

Оценим сумму

$$W = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-p^2}}^{\sqrt{N+H-p^2}} \Big|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\Big| dx\,.$$

Справедливо неравенство

$$W \le \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \int_{\sqrt{N-H-n^2}}^{\sqrt{N+H-n^2}} \Big|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\Big| dx\,.$$

Поскольку из условия теоремы вытекает, что

$$N-(n+1)^2+H \le N-n^2-H\,,$$

имеем

$$W \le \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \Big|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\Big| dx\,.$$

Применим неравенство Коши:

$$W^2 \ll \sqrt{N_1} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \Big| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \Big|^2 dx\,.$$

Пусть $\delta = \frac{c_1}{\ln^{2/3} N (\ln\ln N)^{1/3}}$, где c_1 — константа из Леммы 3. Разобьем прямоугольник

$$\delta \le \Re s \le 1-\delta, \quad -T \le \Im s \le T\,,$$

по которому суммируются нули дзета–функции, на $O(\ln N)$ ширины $\frac{1}{\ln N}$ и высоты $2T$. Тогда

$$W^2 \ll \sqrt{N_1} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \Big| \sum_{\substack{|\gamma|\le T \\ \sigma\le\beta\le\sigma+1/\ln N}} x^{\rho-1} \Big|^2 dx \ln^2 N,$$

где σ — то число между δ и $1-\delta$, при котором правая часть последнего неравенства максимальна.

Далее, имеем

$$W^2 \leqslant \sqrt{N_1} \ln^2 N \Big(\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T \\ |\gamma-\gamma_1|\leqslant 1}} \sum_{|\gamma_1|\leqslant T} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} x^{2\sigma-2} dx +$$

$$+ \sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T \\ |\gamma-\gamma_1|>1}} \sum_{|\gamma_1|\leqslant T} \frac{1}{|\gamma-\gamma_1|} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} x^{2\sigma-2} dx \Big)\,.$$

В силу лемм 4 и 5 имеем:

$$W^2 \ll \ln^4 N \max_{\sigma\in[0.5,1-\delta]} N_1^{\sigma} N(\sigma,T)\,.$$

Воспользуемся леммами 2 и 3 и неравенством $T^{12/5} < N_1 \exp(-\ln^{0.8} N)$, следующим из условия теоремы:

$$W \ll \sqrt{N_1} \Big(\exp\Big(-\frac{1}{4}\ln^{0.8} N\Big) + \exp\Big(-\frac{\delta}{2}\ln^{0.8} N\Big)\Big) \ln^{2+c/2} N \ll$$

$$\ll \sqrt{N_1} \exp(-2\ln^{0.1} N)\,. \qquad (3)$$

Для S справедлива оценка

$$S \gg \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \big(\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}\big) - W\,.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \big(\sqrt{N+H-p^2} - \sqrt{N-H-p^2}\big) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln N}\,.$$

Поскольку по условию $H > \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$, теперь наше утверждение следует из неравенства (3). ■

Литература

1. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes // Invent. Math. – 1972. – 15. – P.164-170.
2. Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки. – 1994. – 55;2. – С.59-61.
3. Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах «аддитивной» и «дистрибутивной» теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 49;1. – С.3-7.
4. Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел // ДАН СССР. – 1945. – 47;1. – С.7-8.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция/ М.: Физматлит, 1994.
6. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. – 7;4. – С.26-30.
7. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983.

ON DIOFANTINE INEQUALITIES WITH PRIMES

Nguyen Thi Tra

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: nguyentra.bsu@gmail.com

Abstract. It is proved that the inequality $|p_1^2 + p_2^2 - N \leq H|$ is solvable in primes p_1 and p_2 provided $H \geq \sqrt{N}\exp(-\ln^{0.1} N)$.

Keywords: primes, diofantine inequalities, explicit formula, density theorem.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ СО СМЕШАННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА В ПРОИЗВОДНЫХ

Е.В. Чаплыгина

Орловский государственный университет,
ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026, Россия, e-mail: lena260581@yandex.ru

Аннотация. Исследуется задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в главной части и опережающе-запаздывающим аргументом в производных. Доказана теорема единственности решения задачи без ограничений на величину отклонения. Вопрос существования решения связан с разрешимостью неоднородного разностного уравнения с переменным коэффициентом.

Ключевые слова: оператор Лаврентьева-Бицадзе, задача Геллерстедта, разностное уравнение.

1. Пусть

$$A_{xy} \equiv (R_x^{\tau} H(x) + R_x^{-\tau} H(3\tau - x) - 1)(\partial/\partial x + \sqrt{-\operatorname{sgn} y}\ \partial/\partial y)\,, \qquad 0 < \tau \ \equiv \mathrm{const}\,,$$

где $H(\xi)$ – функция Хевисайда; R_x^{Θ} – оператор сдвига, $R_x^{\Theta} q(x) = q(x - \Theta)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(U(x,y)) \equiv U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y)\operatorname{sgn} y \ = A_{xy}(U(x,y))\,, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$, где $D^+ = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau,\ 0 < y < h\} = D_0^+ \bigcup D_1^+ \bigcup D_2^+$ $(0 < h \ \equiv \mathrm{const})$ и $D^- = D_0^- \bigcup D_1^- \bigcup D_2^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$\begin{aligned} &D_k^+ = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau, 0 < y < h\}\,,\\ &D_k^- = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}(k = 0,1,2)\,,\\ &I = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau, y = 0\} = I_0 \bigcup I_1 \bigcup I_2\,. \end{aligned}$$

Обозначим $D_k = D_k^+ \bigcup D_k^- \bigcup I_k$, где $I_k = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau,\ y = 0\}(k = 0,1,2)$.

Задача G. Найти в области D функцию

$$U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \backslash (\{x = \tau\} \cup \{x = 2\tau\})) \cap C^2(D \backslash (I \cup \{x = \tau\} \cup \{x = 2\tau\}))\,,$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$U(0,y) = U(3\tau, y) = 0\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{2}$$

$$U(x,h)=\varphi(x)\,,\quad 0\leqslant x\leqslant 3\tau, \tag{3}$$

$$U(x,x-x_k)=\psi_k(x)\,,\quad (k\tau+x_k)/2\leqslant x\leqslant x_k, \tag{4}$$

$$U(x,x_k-x)=\rho_k(x)\,,\quad x_k\leqslant x\leqslant (x_k+(k+1)\tau)/2, \tag{5}$$

$$k\tau<x_k<(k+1)\tau\quad (k=0,1,2);$$

условиям сопряжения $U(x,-0)=U(x,+0)=\omega(x), 0\leqslant x\leqslant 3\tau$,

$$U_y(x,-0)=U_y(x,+0)=\nu(x)\,,\quad 0<x<3\tau,\quad x\neq\tau,2\tau; \tag{6}$$

условиям согласования

$$\varphi(0)=\varphi(3\tau)=0\,,\quad \psi_k(x_k)=\rho_k(x_k)\ \ (k=0,1,2), \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$, $\rho_k(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если функции*

$$\begin{aligned}&\varphi(x)\in C[0,3\tau]\cap C^2(0,3\tau)\,,\\ &\psi_k(x)\in C[(k\tau+x_k)/2,x_k]\cap C^2((k\tau+x_k)/2,x_k)\,,\\ &\rho_k(x)\in C[x_k,(x_k+(k+1)\tau)/2]\cap C^2(x_k,(x_k+(k+1)\tau)/2)\,,\qquad k=0,1,2\end{aligned}$$

абсолютно интегрируемы на своих промежутках; $\varphi(0)=\varphi(3\tau)=0$, $\psi_k(x_k)=\rho_k(x_k)$ *и* $\psi_k'(x),\rho_k'(x)$ *при* $x\to x_k$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи G.*

2. Единственность решения задачи G следует из утверждений:

Лемма 1. *Если* $U(x,y)$ *– решение уравнения (1) в области* $D^-=D_0^-\bigcup D_1^-\bigcup D_2^-$ *из класса* $C(\bar D^-)\cap C^2(D^-)$, *обращающееся в нуль на характеристиках* $y=x-x_k$, $y=x_k-x$ $(k=0,1,2)$, *то* $\beta=\int\limits_0^{3\tau}\omega(x)\nu(x)dx\geqslant 0$.

Доказательство леммы аналогично приведенному в [1, с. 128-130].

Лемма 2. *Если* $U(x,y)$ *– решение уравнения (1) в области* D^+ *из класса* $C(\bar D^+)\cap C^2(D^+\setminus(\{x=\tau\}\cup\{x=2\tau\}))$, *обращающееся в нуль при* $x\to 0,\,3\tau$, *если* $0\leqslant y\leqslant h$, *а также при* $y\to h$, $0\leqslant x\leqslant 3\tau$, *то*

$$\beta\leqslant 0\ \text{и}\ \beta+\frac{i}{2}\,\gamma+\iint\limits_{D^+}(U_x^2(x,y)+U_y^2(x,y))dxdy=0\,,$$

где

$$\gamma=\int\limits_0^{3\tau}\omega^2(x)dx-2\int\limits_\tau^{3\tau}\omega(x)\omega(x-\tau)dx\geqslant 0\,.$$

□ Доказательство следует из тождества

$$U(x,y)[(L\ -\ A_{xy})U(x,y)] = \Big(U(x,y)U_x(x,y) + \frac{1}{2}U^2(x,y)\Big)_x\ +$$

$$+\ \Big(U(x,y)U_y(x,y) + \frac{i}{2}U^2(x,y)\Big)_y - U_x^2(x,y) - U_y^2(x,y) -$$

$$- H(x-\tau)U(x,y)[U_x(x-\tau,y) + iU_y(x-\tau,y)] -$$

$$-H(2\tau - x)U(x,y)[U_x(x+\tau,y) + iU_y(x+\tau,y)] = 0\,,$$

интегрируя которое по области $D_\varepsilon^+ = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau, \varepsilon < y < h\}$, $0 < \varepsilon \equiv \text{const}$, применяя формулу Грина [2, с.54] и условия леммы, в пределе при $\varepsilon \to 0$, в силу того, что

$$\iint\limits_{D^+} H(2\tau - x)U(x,y)U_x(x+\tau,y)dxdy = \iint\limits_{D_0^+\cup D_1^+} U(x,y)U_x(x+\tau,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1^+\cup D_2^+} U(x-\tau,y)U_x(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)U(x-\tau,y)U_x(x,y)dxdy,$$

$$\iint\limits_{D^+} H(2\tau - x)U(x,y)U_y(x+\tau,y)dxdy = \iint\limits_{D_0^+\cup D_1^+} U(x,y)U_y(x+\tau,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1^+\cup D_2^+} U(x-\tau,y)U_y(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)U(x-\tau,y)U_y(x,y)dxdy,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\partial D^+} \Big[U(x,y)U_x(x,y) + \frac{1}{2}U^2(x,y)\Big]dy - \Big[U(x,y)U_y(x,y) + \frac{i}{2}U^2(x,y)\Big]dx -$$

$$- \iint\limits_{D^+} \Big[U_x^2(x,y) + U_y^2(x,y) + H(x-\tau)\Big(U(x,y)U(x-\tau,y)\Big)_x +$$

$$+ iH(x-\tau)\Big(U(x,y)U(x-\tau,y)\Big)_y\Big]dxdy = 0\,.$$

Далее, так как

$$\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)[(U(x,y)U(x-\tau,y))_x + i(U(x,y)U(x-\tau,y))_y]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1^+ \cup D_2^+} [(U(x,y)U(x-\tau,y))_x + i(U(x,y)U(x-\tau,y))_y]dxdy =$$

$$= \int\limits_{\partial(D_1^+ \cup D_2^+)} U(x,y)U(x-\tau,y)dy - iU(x,y)U(x-\tau,y)dx = -i\int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega(x)\omega(x-\tau)dx,$$

то из предыдущего равенства получим

$$\int\limits_0^{3\tau} \Big[\omega(x)\nu(x) + \frac{i}{2}\omega^2(x)\Big]dx - i\int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega(x)\omega(x-\tau)dx + \iint\limits_{D^+} \Big(U_x^2(x,y) + U_y^2(x,y)\Big)dxdy = 0\,,$$

то есть

$$\beta + \frac{i}{2}\,\gamma + \iint\limits_{D^+} [U_x^2(x,y) + U_y^2(x,y)]dxdy = 0,$$

где

$$\gamma = \int\limits_0^{3\tau} \omega^2(x)dx - 2\int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega(x)\omega(x-\tau)dx =$$

$$= \int\limits_0^{3\tau} \omega^2(x)dx - \int\limits_{\tau}^{3\tau} (\omega^2(x) + \omega^2(x-\tau) - (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^{3\tau} \omega^2(x)dx - \int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega^2(x)dx - \int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega^2(x-\tau)dx + \int\limits_{\tau}^{3\tau} (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2dx =$$

$$= -\int\limits_{\tau}^{2\tau} \omega^2(x)dx + \int\limits_{\tau}^{3\tau} (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2dx \geqslant \int\limits_{\tau}^{2\tau} (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2dx - \int\limits_{\tau}^{2\tau} \omega^2(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{x-\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2 dx - \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2 dx - \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2 dx = 0\,,$$

поскольку $\omega(\tau) = 0$. ■

3. Пусть

$$U_k(x,y) = U(x,y)\,, \quad (x,y) \in D_k\,, \quad k = 0,1,2\,, \tag{8}$$

причем

$$\bar{U}(x,y) = (U_0(x,y), U_1(x+\tau,y), \qquad U_2(x+2\tau,y))^T, \qquad (x,y) \in D_0\,. \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) в терминах функций (8) примет вид

$$L(\bar{U}(x,y)) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-\operatorname{sgn} y}\frac{\partial}{\partial y}\Big) A\bar{U}(x,y)\,, \qquad (x,y) \in D_0\,, \tag{10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а

$$\bar{U}(x,y) = \bar{f}(x - y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3) + e^{Ax}\bar{g}(x + y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3), \qquad (x,y) \in D_0\,, \tag{11}$$

является общим решением уравнения (10), причем $\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T$, $\bar{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))^T$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции.

Матрица A имеет различные собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ и потому она приводима к диагональному виду, то есть существует невырожденная матрица T, что

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

где T^{-1} – матрица, обратная для T. Поскольку

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$e^{Ax} = e^{T\Lambda T^{-1}x} = Te^{\Lambda x}T^{-1} = \frac{e^{-x}}{2}\begin{pmatrix} 1+\operatorname{ch} x\sqrt{2} & \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} & -(1-\operatorname{ch} x\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} & 2ch\, x\sqrt{2} & \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} \\ -(1-\operatorname{ch} x\sqrt{2}) & \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} & 1+ch\, x\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому из (11), в силу (9), получаем общее решение

$$U_k(x+k\tau,y) = f(x - y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3) + g(x + y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3)\alpha_k(x)\,,$$

$$(x,y) \in D_0(k = 0,1,2)\,,$$

где

$$\alpha_0(x) = \alpha_2(x) = e^{-x}\Big(\operatorname{ch} x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2}\Big)\,, \quad \alpha_1(x) = e^{-x}\Big(\operatorname{ch} x\sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2}\Big)\,, \tag{12}$$

а $f(t), g(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, то есть

$$U_k(x,y) = f(x - k\tau - y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3) + g(x - k\tau + y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3)\alpha_k(x - k\tau)\,, \tag{13}$$

$$(x,y) \in D_k (k = 0,1,2)\,.$$

На основании (2), (8) из (13) следует

$$U_k((k+1)\tau - 0, y) = U_{k+1}((k+1)\tau + 0, y) = 0,$$

$$U'_{kx}((k+1)\tau - 0, y) \neq U'_{(k+1)x}((k+1)\tau + 0, y) = 0\,(k = 0,1), 0 \leqslant y \leqslant h\,. \tag{14}$$

Таким образом, вопрос существования решения задачи G в области $D = U_{k=0}^2 D_k$ связан с построением в D_k на основе общих решений (13) функций $U_k(x,y)$, удовлетворяющих, ввиду (2)-(7),(8),(14), условиям

$$U_k(k\tau, y) = U_k((k+1)\tau, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h\,; \tag{15}$$

$$U_k(x,h) = \varphi(x), \qquad k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau\,; \tag{16}$$

$$U_k(x, x - x_k) = \psi_k(x), \qquad \frac{k\tau + x_k}{2} \leqslant x \leqslant x_k\,; \tag{17}$$

$$U_k(x, x_k - x) = \rho_k(x), \qquad x_k \leqslant x \leqslant \frac{x_k + (k+1)\tau}{2}\,; \tag{18}$$

$$\varphi(k\tau) = \varphi((k+1)\tau) = 0, \quad \varphi'(\tau) = \varphi'(2\tau) = 0, \quad \psi_k(x_k) = \rho_k(x_k)\,, \quad k = 0,1,2; \tag{19}$$

$$U_k(x,-0) = U_k(x,+0) = \omega(x), \qquad k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau\,; \tag{20}$$

$$U_{ky}(x,-0) = U_{ky}(x,+0) = \nu(x), \qquad k\tau < x < (k+1)\tau\,; \tag{21}$$

$$\omega(k\tau) = \omega((k+1)\tau) = 0, \qquad \omega'(\tau) = \omega'(2\tau) = 0\,, \quad k = 0,1,2\,; \tag{22}$$

где

$$\varphi(x) \in C[k\tau, (k+1)\tau] \cap C^2(k\tau, (k+1)\tau)\,,$$

$$\psi_k(x) \in C[(k\tau + x_k)/2, x_k] \cap C^2((k\tau + x_k)/2, x_k)\,,$$

$$\rho_k(x) \in C[x_k, (x_k + (k+1)\tau)/2] \cap C^2(x_k, (x_k + (k+1)\tau)/2)\,,$$

абсолютно интегрируемы на своих промежутках и $\psi'_k(x), \rho'_k(x)$ при $x \to x_k$ допускают особенность интегрируемого порядка.

а) В D_k^-, используя общее решение (13), получим формулу типа Даламбера

$$U_k^-(x,y) = \omega(x-y) - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_k(x - k\tau - y)}\ \times$$

$$\times \left[\int\limits_{x_k}^{x-y} \frac{\nu(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi - k\tau)}} d\xi + \int\limits_{x_k}^{x-y} \frac{\omega'(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi - k\tau)}} d\xi\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau+y)}}\left[\int\limits_{x_k}^{x+y}\frac{\nu(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}d\xi+\int\limits_{x_k}^{x+y}\frac{\omega'(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}d\xi\right],\quad k=0,1,2\,, \tag{23}$$

представляющую решение задачи Коши для уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_k^-)\cap C^2(D_k^-)$ при условиях (20)-(22) в области D_k^-, когда $\omega(x)\in C[k\tau,(k+1)\tau]\cap C^2(k\tau,(k+1)\tau), \nu(x)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$ $(k=0,1,2)$.

Из (23) и условий (17),(18) найдем функциональные соотношения между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из D_k^- на $y=0,\ k\tau<x<(k+1)\tau$,

$$\omega'(x)=\bar{\psi}_k(x)-\nu(x),\qquad k\tau<x<x_k\,; \tag{24}$$

$$\left(\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right)'=\frac{2}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\cdot\left(\frac{\rho_k((x+x_k)/2)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\right)'+\frac{\nu(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\ ; \tag{25}$$

$$x_k<x<(k+1)\tau\,,$$

где

$$\bar{\psi}_k(x)=\frac{2\alpha_k(x-k\tau)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\cdot\left(\frac{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}{\alpha_k((x+x_k-2k\tau)/2)}(\psi_k((x+x_k)/2)-\psi_k(x_k))\right)'.$$

б) В D_k^+ с помощью (13) и условий (16),(20) получим систему для определения функций $f(t), g(t)$

$$\begin{cases} R_x^{k\tau}[f(x)+g(x)\alpha_k(x)]=\omega(x), & k\tau\leqslant x\leqslant(k+1)\tau\,,\\ R_x^{k\tau}[f(x+ih)+g(x-ih)\alpha_k(x)]=\varphi(x), & k\tau\leqslant x\leqslant(k+1)\tau\,,\end{cases}$$

то есть

$$f(x)=R_x^{-k\tau}\omega(x)-g(x)\alpha_k(x)\,,\qquad 0\leqslant x\leqslant\tau\,; \tag{26}$$

$$g(x)=\frac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)}R_x^{2ih}g(x)+\gamma(x)\,,\qquad 0\leqslant x\leqslant\tau\,, \tag{27}$$

где

$$\gamma(x)=\frac{R_x^{-k\tau}\omega(x)-R_x^{ih-k\tau}\varphi(x)}{\alpha_k(x)},\quad i=\sqrt{-1}. \tag{28}$$

Непосредственной подстановкой

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(B_x)^n\gamma(x), 0\leqslant x\leqslant\tau\,, \tag{29}$$

в разностное уравнение (27) можно проверить, что функции (29) является его решением. Здесь $B_x=\dfrac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)}R_x^{2ih}$, причем

$$(B_x)^n = (B_x)((B_x)^{n-1}), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Ряд в правой части (29) и ряды, полученные формальным дифференцированием ряда (29), равномерно сходятся соответственно на $[0,\tau]$ и $(0,\tau)$, то есть $g(x) \in C[0,\tau] \cap C^2(0,\tau)$. Это утверждение доказывается путем сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поскольку, в силу (12),

$$\left|\frac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)}\right| = \left|e^{ih}\left(\cos h\sqrt{2} - i\sin h\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} x\sqrt{2}}{\operatorname{ch} x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2}}\right)\right| < \tag{30}$$

$$< \sqrt{\cos^2 h\sqrt{2} + \sin^2 h\sqrt{2}} = 1 \text{ и } \operatorname{ch} t > \operatorname{sh} t \text{ при любых } t.$$

Единственность решения (29) уравнения (27) следует из того, что однородное уравнение

$$g(x) = \frac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)} R_x^{2ih}(g(x)) \tag{31}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Действительно, предположим, что существует решение уравнения (31) $g(x) \not\equiv 0$. Из (31) видно, что $g(0) = g(\tau) = 0$, в силу общих решений (13) и условий (2). Поскольку $g(x) \in C[0,\tau]$ и $g(x) \not\equiv 0$, то, на основании теоремы Ролля [2, с. 165-166], существует точка $x_0 \in [0,\tau]$, где $g(x)$ имеет экстремум, отличный от нуля. Поэтому из (31), с учетом (30), найдем

$$|g(x_0)| = \left|\frac{\alpha_k(x_0-ih)}{\alpha_k(x_0)}\right| R_{x_0}^{2ih}|g(x_0)| < |g(x_0)|,$$

то есть 1<1. Значит, существование решения $g(x) \not\equiv 0$ уравнения (31) невозможно в $C[0,\tau]$.

Подставляя найденные функции $f(x), g(x)$ из (26), (29) в общее решение (13), получим решение задачи Дирихле в D_k^+ $(k = 0, 1, 2)$ в операторной форме

$$U_k^+(x,y) = R_x^{k\tau - iy}(f(x)) + \alpha_k(x-k\tau)R^{k\tau+iy}(g(x)) = R_x^{-iy}(\omega(x)) +$$

$$+(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - \alpha_k(x-k\tau+iy)R_x^{-iy})\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n(\gamma(x)),$$

которое после учета (28) и дополнительных преобразований принимает вид

$$U_k^+(x,y) = (\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy}) -$$

$$-R_x^{-iy}(\alpha_k(x-k\tau-ih)R_x^{2ih}))\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} -$$

$$-(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - \alpha_k(x-k\tau+iy)R_x^{-iy})\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{+\infty} (\bar{B}_x)^n R_x^{-ih} \frac{\varphi(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} \ , \tag{32}$$

где

$$\bar{B}_x = \frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)} R_x^{2ih} \ . \tag{33}$$

Для получения интегрального представления (32), учтем [3, с.7], что любая непрерывная финитная на $k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau$ $(k=0,1,2)$ функция

$$f(x) = (f(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} f(\xi)[\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)]d\xi \, , \tag{34}$$

а

$$\delta(z) = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty} \cos\lambda_m z = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}(e^{i\lambda_m z} + e^{-i\lambda_m z}) = \frac{1}{2\tau}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_m z} \tag{35}$$

— дельта-функция Дирака [4, с.254], причем $\lambda_m = m\pi/\tau$.

Так как, в силу (33), $(\bar{B}_x)^n(e^{-i\lambda_m x}) = e^{-i\lambda_m x}(\bar{B}_x e^{-2h\lambda_m})^n$, то, в силу (30), (34), (35), равенство (32) примет форму

$$U_k^+(x,y) = \frac{1}{2\tau}(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - R_x^{-iy}(\alpha_k(x-k\tau-ih)R_x^{2ih})) \times$$

$$\times \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\omega(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)}) \frac{d\xi}{1-\bar{B}_x e^{-2\lambda_m h}} -$$

$$- \frac{1}{2\tau}(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - \alpha_k(x-k\tau+iy)R_x^{-iy}) \frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)} R_x^{2ih} \times$$

$$\times \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\varphi(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)}) \frac{e^{\lambda_m h}}{1-\bar{B}_x e^{-2h\lambda_m}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\tau} \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\omega(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)}) \ \times$$

$$\times \left(\alpha_k(x-k\tau)e^{\lambda_m(h-y)} R_x^{-i(h-y)} - \alpha_k(x-k\tau+iy-ih)e^{-\lambda_m(h-y)} R_x^{i(h-y)} \right) \times$$

$$\times \ R_x^{ih} \left(\frac{1}{e^{\lambda_m h} - \bar{B}_x e^{-\lambda_m h}} \right) d\xi -$$

$$- \frac{1}{2\tau} \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\varphi(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)}) \ \times$$

$$\times\left(\alpha_k(x-k\tau)e^{-\lambda_m y}R_x^{iy}\left(\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right)-\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)e^{\lambda_m y}R_x^{-iy}\right)\times$$

$$\times\ R_x^{2ih}\left(\frac{1}{e^{\lambda_m h}-\bar{B}_x e^{-\lambda_m h}}\right)d\xi\,,$$

то есть

$$U_k^+(x,y)=\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}\omega(\xi)G_1(x,y,\xi)d\xi\,+$$

$$+\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}\varphi(\xi)G_2(x,y,\xi)d\xi\,, \tag{36}$$

где

$$G_1(x,y,\xi)=\frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\sin\lambda_m x\left[\frac{\mathrm{ch}\lambda_m y-\mathrm{ch}\lambda_m(2h-y)a(x)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\ -\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih}\frac{\mathrm{ch}\lambda_m(2h-y)-\mathrm{ch}\lambda_m yb(x)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right]-$$

$$-\frac{2i}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\cos\lambda_m x\left[\frac{\mathrm{sh}\lambda_m y+\mathrm{sh}\lambda_m(2h-y)a(x)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(2h-y)+\mathrm{sh}\lambda_m yb(x)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right],$$

$$G_2(x,y,\xi)=\frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\sin\lambda_m x\left[\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\ \times\right.$$

$$\times\ R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(h-y)+b(x)\mathrm{sh}\lambda_m(h+y)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-$$

$$\left.-\frac{\alpha_k(x-k\tau-iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau-iy)}R_x^{2ih}\frac{\mathrm{ch}\lambda_m(h+y)-\mathrm{ch}\lambda_m(h-y)a(x)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right]-$$

$$-\frac{2i}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\cos\lambda_m x\left[\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\ \times\right.$$

$$\times R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(h-y)+b(x)\mathrm{sh}\lambda_m(h+y)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-\frac{\alpha_k(x-k\tau-iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau-iy)}\ \times$$

$$\left.\times\ R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(h+y)+a(x)\mathrm{sh}\lambda_m(h-y)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right],$$

$$a(x) = R_x^{iy}\left(\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right), \quad b(x) = R_x^{-iy}\left(\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right).$$

Равенство (36)(или (32)) показывает, что $U_k^+(x,y) \in (\bar{D}_k^+) \cap C^2(D_k^+)$ на основании свойств ядер $G_j(x,y,\xi)(j=1,2)$ и $\varphi(x), \omega(x) \in C[k\tau,(k+1)\tau] \cap^2 (k\tau,(k+1)\tau)$, удовлетворяет уравнению (1) и условиям (15), (16), (19), (20).

Функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из D_k^+ на $y=0, k\tau < x < (k+1)\tau$, найдем из (32), учитывая (21), то есть

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} = i\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} -$$

$$-2i\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n\left(\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right) + 2i\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n\left(\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right),$$

$$k\tau < x < (k+1)\,,\tau \qquad k=0,1,2$$

или

$$(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) =$$

$$= i(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) - 2i\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} + 2i\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \qquad (37)$$

$$k\tau < x < (k+1)\tau\,, \qquad k=0,1,2\,.$$

в) Вопрос существования решения задачи G в областях $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$ $(k=0,1,2)$ связан с разрешимостью системы функциональных уравнений (24), (25), (37), которые соответственно можно записать ещё в форме

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\bar{\psi}_k(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\,,$$

$$(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) =$$

$$= i(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) -$$

$$- 2i\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} + 2i\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \quad k\tau < x < x_k\,;$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} =$$

$$= \int\limits_{x_k}^{x}\frac{\rho_k'((\xi+x_k)/2)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}d\xi + \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} +$$

$$+ \int\limits_{x_k}^{x}\frac{\alpha_k'(t-k\tau)}{\alpha_k(t-k\tau)}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(t-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{t}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right)dt, \qquad (38)$$

$$\frac{\nu(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\left(\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}\bar{B}_x\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right)\right)' =$$

$$= -i\left(\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right)' -$$

$$- \frac{i}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\left(\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}\bar{B}_x\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right)\right)' +$$

$$+ \frac{2i}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\left(\frac{\varphi(x-ih)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\right)', \qquad x_k < x < (k+1)\tau\,.$$

После преобразований получим разностное уравнение

$$g(x) = j\bar{B}_x(\Phi_x(g(x))) + \gamma_k(x)\,, \qquad k\tau < x < (k+1)\tau\,, \quad x \neq x_k(k=0,1,2)\,,$$

$$j = \frac{2-i}{5}H(x_k-x) - iH(x-x_k)\,,$$

$$\gamma_k(x) = H(x_k-x)\gamma_{1k}(x) + H(x-x_k)\gamma_{2k}(x)\,,$$

$$\gamma_{1k}(x) = \frac{i+3}{10}(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\bar{\psi}_k(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) +$$

$$+ \frac{i+3}{5}\cdot\frac{1}{\alpha_k(x-k\tau)}\int\limits_{x_k}^{x}\bar{\psi}_k(\xi)d\xi - \frac{i+3}{5}\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \qquad (39)$$

$$\gamma_{2k}(x) = -(i+1)\frac{\rho_k((x+x_k)/2)}{\alpha_k(x-k\tau)} - \frac{i+1}{2}\bar{B}_x\left(\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\rho_k'((\xi+x_k)/2)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}d\xi\right) +$$

$$+ (i+1)\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)} \ ,$$

решение которого

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} j^n(\bar{B}_x(\Phi_x))^n(\gamma_k(x)) \, , \qquad k\tau < x < (k+1)\tau \, , \qquad x \neq x_k \quad (k=0,1,2),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}} \int\limits_{x_k}^{x} \frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} \ ,$$

$$\Phi_x(g(x)) = g(x) + Q_x(g(x)) \ ,$$

$$Q_x(g(x)) = H(x_k - x)Q_{1x}(g(x)) + H(x - x_k)Q_{2x}(g(x)) \ ,$$

$$Q_{1x}(g(x)) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{\alpha_k(\xi - k\tau + ih)} R_x^{-2ih} \int\limits_{x_k}^{x} \alpha_k'(t-k\tau)g(t)dt \, ,$$

$$Q_{2x}(g(x)) = \frac{1-i}{2} \cdot \int\limits_{x_k}^{x} \frac{\alpha_k'(t-k\tau)}{\alpha_k(t-k\tau)} g(t)dt \, .$$

Из (39), условий на $\varphi(x), \psi_k(x), \rho_k(x)$ следует, что

$$\nu(x) \in C^1((k\tau, x_k) \cup (x_k, (k+1)\tau)) \, ,$$

а на основании (38),

$$\omega(x) \in C[k\tau, \, (k+1)\tau] \cap C^2((k\tau, \, x_k) \cup (x_k, (k+1)\tau)) \, , \quad (k=0,1,2) \, .$$

Подставляя найденные значения $\omega(x)$ и $\nu(x)$ в $U_k^-(x,y), (x,y) \in D_k^-$ и $U_k^+(x,y)$, $(x,y) \in D_k^+$ $(k=0,1,2)$ из (23) и (36) соответственно, получим окончательный вид решений задачи G в D^- и D^+, то есть в области D.

Литература

1. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом / Орел: ОГУ, 1997.
2. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа / М.: 1988.
3. Агранович М.С. Обобщенные функции / М.: 2008.

GELLERSTEDT's PROBLEM FOR LAVRENTIEV-BITSADZE's EQUATION WITH MIXED DEVIATION OF DERIVATIVE ARGUMENT

B.V. Chaplygina

Orel State University,
Komsomolskaya Str., 95, Orel, 302026, Russia, e-mail: lena260581@yandex.ru

Abstract. Gellerstedt's problem for the equation of mixed type with Lavrentev-Bitsadze's operator and advanced-retarded argument in derivatives is investigated. The uniqueness theorem of the problem solution without constraints on the deviation value is proved. It is found that existence of solutions is connected with solvability of inhomogeneous differential equation having the variable coefficient.

Key words: Lavrentev-Bitsadze's operator, Gellerstedt's problem, differential equation.

УДК 512.572

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛЕЙБНИЦА

О.И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова,
пл. 100-летия рождения В.И. Ленина, 4, Ульяновск, 432700, Россия, e-mail: chai@pisem.net

Аннотация. В работе приведены эквивалентные условия нильпотентности многообразий алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Показано, что существует только два почти нильпотентных многообразия алгебр Лейбница.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие алгебр, нильпотентные алгебры.

Характеристика основного поля K предполагается равной нулю.

Алгебра Лейбница над полем $K-$ неассоциативная алгебра, которая определяется тождеством Лейбница

$$xyz \equiv xzy + x(yz)\,,$$

которое превращает правое умножение в дифференцирование этой алгебры. При этом заметим, что если в алгебре Лейбница выполняется тождество $x^2 \equiv 0$, то она является алгеброй Ли. Таким образом, любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

Заметим, что из тождества Лейбница следует тождество $x(yy) \equiv 0$.

Пусть V — многообразие алгебр Лейбница (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографии [1]). Обозначим через $K(X,V)$ относительно свободную алгебру данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии V содержится в его полилинейных компонентах $P_n(V)$, $n = 1, 2, ...$, где $P_n(V)$ это линейное подпространство в пространстве $K(X,V)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$. Асимптотическое поведение последовательности $c_n(V) = \dim\ P_n(V)$, $n = 1, 2, ...$, определяет рост многообразия V.

Договоримся в элементах опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $(((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\dots x_{i_n}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$.

Также будем использовать стандартное сокращение xy^k для обозначения левонормированного произведения $xy\dots y$, в котором y встречается k раз.

В работе [2] Е.И. Зельманов доказал, что любая энгелева алгебра Ли является нильпотентной. В работе [3] Ю.Ю. Фролова обобщила данный результат на случай алгебр Лейбница:

Теорема 1 ([3]). *Если характеристика основного поля равна нулю, то энгелева алгебра Лейбница является нильпотентной.*

Обозначим через A^2 метабелево многообразие алгебр Ли, которое определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0\,.$$

Приведем хорошо известные факты касательно многообразия A^2.

Предложение 1. *Для многообразия A^2 верны следующие утверждения.*

(i) Базис полилинейной компоненты $P_n(A^2)$ состоит из элементов вида

$$x_nx_ix_1...\widehat{x}_i...x_{n-1}\,, \quad i = 1\,, ..., n-1\,,$$

где знак $\widehat{\ }$ над элементом означает, что этот элемент опущен, причем для любого натурального $n \geq 2$ верно равенство $c_n(A^2) = n-1$.

(ii) Многообразие A^2 является почти нильпотентным.

(iii) Произвольное многообразие алгебр Ли V является нильпотентным тогда и только тогда, когда $A^2 \not\subseteq V$.

Обозначим через B многообразие алгебр Лейбница, которое определяется тождеством

$$x(yz) \equiv 0\,.$$

Сформулируем также хорошо известные факты о многообразии B.

Предложение 2. *Для многообразия B верны следующие утверждения.*

(i) Базис полилинейной компоненты $P_n(B)$ состоит из элементов вида

$$x_ix_1...\widehat{x}_i...x_n, \quad i = 1\,, ..., n\,,$$

причем для любого натурального n выполнено равенство $c_n(B) = n$.

(ii) Многообразие B является почти нильпотентным.

В работе [4] показано, что произвольное многообразие алгебр Лейбница V нильпотентно тогда и только тогда, когда многообразие V разрешимо и выполнено условие $B, A^2 \not\subseteq V$. В данной работе мы усилим это утверждение, а именно, откажемся от условия разрешимости.

Обозначим через Y_i оператор правого умножения на элемент y_i :
$xY_i = xy_1$, $x(Y_iY_j) = (xy_i)y_j$.

Лемма 1. *Пусть в многообразии алгебр Лейбница V для некоторого натурального n выполнено тождество*

$$xxf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0 \tag{40}$$

где f — многочлен от внутренних дифференцирований. Тогда для любого $m \geq 0$ в V будет выполнено тождество

$$xxz_1z_2...z_mf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,. \tag{41}$$

□ Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть $m = 1$. Из тождества (40) следует, что

$$xyf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + yxf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0.$$

Заменим $x \to (xx)$, а $y \to z_1$, тогда получим:

$$xxz_1f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + z_1(xx)f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,.$$

Второе слагаемое суммы является тождеством в любой алгебре Лейбница, поэтому база индукции проверена.

Предположим, что в V для некоторого k выполнено тождество

$$xxz_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,.$$

тогда следствием данного тождества будет

$$xyz_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + yxz_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0\,.$$

Опять же заменим $x \to (xx)$, а $y \to z_0$, тогда получим:

$$xxz_0z_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) + z_0(xx)z_1z_2...z_kf(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \equiv 0.$$

При этом второе слагаемое суммы является тождеством в алгебрах Лейбница. ■

Лемма 2. *Пусть V - некоторое многообразие алгебр Лейбница и пусть $B \not\subseteq V$. Тогда для некоторого числа n в V выполнено тождество $xxy^n \equiv 0$.*

□ Так как $B \not\subseteq V$, то, учитывая предложение 2, для некоторого n в V выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_n + \sum ...A_i(B_jC_k)... \equiv 0, \tag{42}$$

где не все α_i равны нулю, при этом второе слагаемое является следствием определяющего многообразие B тождества $x(yz) \equiv 0$, и A_i, B_j, C_k- некоторые непустые слова свободной алгебры Лейбница.

Пусть $\alpha_i \neq 0$. Заменим

$$x_i \to (xx), \qquad x_1, x_2, ..., \widehat{x_i}, ..., x_n \to y.$$

При такой подстановке, с учетом тождества $x(yy) \equiv 0$, которое выполняется в любой алгебре Лейбница, из тождества (42) будет следовать тождество $\alpha_i(xx)y^{n-1} \equiv 0$. Таким образом, получаем, что в многообразии V выполнено тождество $xxy^n \equiv 0$. ■

Теорема 2. *Пусть V - некоторое многообразие алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) многообразие V нильпотентно;

(ii) $B, A^2 \not\subseteq V$.

□ Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из предложений 1 и 2.

Пусть выполнено условие (ii). Так как $B \not\subseteq V$, то в многообразии V для любого $m \geq 0$ выполнено тождество $xxz_1z_2...z_my^n \equiv 0$ (леммы 1 и 2).

Так как $A^2 \not\subseteq V$, то, учитывая предложение 1, для некоторого m в V выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_m x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_{m-1} + \sum ...(A_iB_j)(C_kD_g)...+ \tag{43}$$

$$+ \sum (...(E_sE_t)... + ...(E_tE_s)...) \equiv 0,$$

где не все α_i равны нулю, при этом второе слагаемое является следствием определяющего многообразие A^2 тождества $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$, а третье слагаемое является следствием тождества $x^2 \equiv 0$, и $A_i, B_j, C_k, D_g, E_s, E_t-$ некоторые непустые слова свободной алгебры Лейбница.

Следствием тождества (43) является тождество

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_m x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_{m-1} y^n + \sum ...(A_iB_j)(C_kD_g)...y^n+ \tag{44}$$

$$+ \sum (...(E_sE_t)... + ...(E_tE_s)...)\, y^n \equiv 0,$$

где число n берется из леммы 2. Пусть $\alpha_i \neq 0$. Заменим

$$x_i \to x, \qquad x_1, x_2, ..., \widehat{x_i}, ..., x_m \to z.$$

После такой подстановки, с учетом тождеств $x(yy) \equiv 0$ и $xxz_1z_2...z_my^n \equiv 0$, из тождества (44) будет следовать тождество $zxz^{m-2}y^n \equiv 0$. Таким образом, получаем, что в многообразии V выполнено тождество $xy^t \equiv 0$ для некоторого t. Поэтому, с учетом теоремы 1, из условия (ii) следует (i). Теорема доказана.

Приведенная выше теорема позволяет получить следующее

Следствие. *В случае нулевой характеристики основного поля существуют только два почти нильпотентных многообразия: B и A^2.*

Литература

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли /М.: Наука, 1985.
2. Зельманов Е.И. Об энгелевых алгебрах Ли // Сиб. матем. журнал. – 1988. – 29;5. – С.112-117.
3. Фролова Ю.Ю. О нильпотентности энгелевой алгебры Лейбница // Вестник Московского университетата. Серия 1, Математика. Механика. – 2011. – №3. – С.63-65.
4. Череватенко О.И. Некоторые эффекты роста тождеств линейных алгебр // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Ульяновск. УлГУ, 2008.

ON NILPOTENT LEIBNITZ ALGEBRAS

O.I. Cherevatenko

Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University,
100th rozhdeniya V.I. Lenina pl., 4, Ulyanovsk, 432700, Russia, e-mail: chai@pisem.net

Abstract. Equivalent conditions of nilpotent property of Leibniz algebras manifolds over the field with zero characteristics are proposed. It is shown also that there are only two almost nilpotent manifolds of Leibniz's algebras.

Key words: Leibniz algebras, manifold of algebras, nilpotent algebras.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИФРАГИРОВАННОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОНОМ В СЛОИСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

С.В. Блажевич*, М.Н. Бекназаров*,
И.В. Колосова, А.В. Носков****

*Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: blazh@bsu.edu.ru
**Белгородский университет кооперации, экономики и права,
ул.Садовая, 116а, Белгород, 308023, Россия, e-mail: noskovbupk@mail.ru

Аннотация. Построена теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона пересекающего искусственную периодическую среду в геометрии рассеяния Лауэ. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики излучения в направлении рассеяния Брэгга. Излучение рассматривается по аналогии с излучением в кристаллической среде как результат когерентного сложения вкладов двух механизмов излучения – параметрического рентгеновское (ПРИ) и дифрагированного переходного (ДПИ). Показано, что выход ДПИ из слоистой мишени может более чем на порядок превышать выход излучения частицы в монокристаллическом радиаторе в аналогичных условиях.

Ключевые слова: излучение релятивистского электрона, переходное излучения, динамическая теория дифракции, геометрия рассеяния Лауэ.

Введение

При пересечении заряженной частицы входной поверхности кристаллической пластинки возникает переходное излучение (ПИ) [1], которое затем дифрагирует на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, образуя дифрагированное переходное излучение ДПИ [2-4]. Вместе с тем при пересечении заряженной частицей кристаллической пластинки, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, порождая параметрическое рентгеновское излучения (ПРИ) [5-7]. В схеме симметричного отражения, когда система дифрагирующих атомных плоскостей кристалла перпендикулярна (геометрия рассеяния Лауэ) или параллельна (рассеяние Брэгга) поверхности кристаллической пластинки, эти механизмы излучении в двухволновом приближение динамической теории дифракции рассматривались в работах [8-11]. В общем случае асимметричного отражения излучения от пластинки, когда дифрагирующие атомные плоскости составляют произвольный угол с поверхностью пластинки, динамические эффекты в ПРИ и ДПИ рассматривались в работах [12-15], в

которых было показано, что, меняя асимметрию отражения, можно существенно увеличить выходы излучений. Традиционно излучение релятивистской частицы в периодически слоистой структуре рассматривалось в геометрии рассеяния Брэгга для случая, когда отражающие слои параллельны входной поверхности, то есть для случая симметричного отражения. Излучение в периодической слоистой структуре обычно рассматривалось как резонансное переходное излучение [5,16]. В работе [17] излучение из искусственной периодической среды представлено в виде суммы дифрагированного переходного излучения (ДПИ) и параметрического рентгеновского излучения (ПРИ). В цитируемых работах излучение релятивистской частицы в искусственной периодической структуре рассматривалось только лишь в геометрии рассеяния Брэгга в частном случае симметричного отражения поля частицы относительно поверхности мишени, т.е. когда дифрагирующие слои располагаются параллельно поверхности мишени.

В настоящей работе рассматривается когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона в направлении рассеяния Брэгга, пересекающего искусственную периодическую структуру в геометрии рассеяния Лауэ. По аналогии с кристаллической средой когерентное излучение рассматривается как сумма ПРИ и ДПИ. На основе двухволнового приближения динамической теории дифракции [18] получены выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики излучений.

1. Амплитуда излучения

Пусть релятивистский электрон пересекает со скоростью **V** многослойную структуру (рис. 1), состоящую из периодически расположенных аморфных слоев толщиной a и b ($T = a + b$-период структуры) и имеющие соответственно диэлектрические восприимчивости χ_a и χ_b.

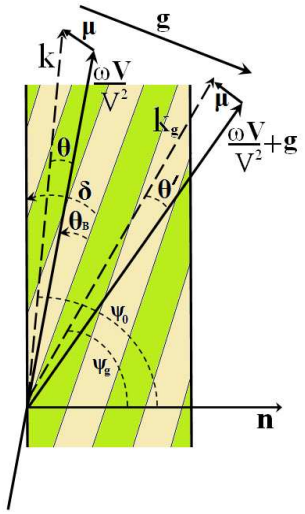


Рис. 1. Геометрия процесса излучения и система обозначений используемых величин; θ и θ' – углы излучения, θ_B – угол Брэгга, k и k_g – волновые вектора подающего и дифрагированного фотона.

Рассмотрим уравнение для Фурье-образа электромагнитного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) = \int dt\ d^3\mathbf{r}\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\exp\left(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}\right)\ . \tag{1}$$

Будем использовать двухволновое приближение динамической теории дифракции в которой падающая и дифрагированная волна рассматриваются равноправными. Так как поле релятивистской частицы можно считать практически поперечным, то падающая $\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega)$ и дифрагированная $\mathbf{E}_g(\mathbf{k},\omega)$ электромагнитные волны, определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega) &= \mathbf{E}_0^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + \mathbf{E}_0^{(2)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_0^{(2)},\\ \mathbf{E}_g(\mathbf{k},\omega) &= \mathbf{E}_g^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + \mathbf{E}_g^{(2)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{e}_1^{(2)},\end{aligned} \tag{2}$$

где векторы $\mathbf{e}_0^{(1)}$и $\mathbf{e}_0^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}$, а векторы $\mathbf{e}_1^{(1)}$и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ лежат в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_g$ (π-поляризация), а вектора $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ-поляризация). Вектор $\mathbf{g}$ аналогичен вектору обратной решетке в кристалле, он перпендикулярен слоям среды и его длина равна $g = 2\pi n/T$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$

Система уравнений для Фурье-образа электромагнитного поля в двухволновом приближение динамической теории дифракции имеет следующий вид [19]:

$$\begin{cases}(\omega^2(1+\chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2\chi_{-\mathbf{g}}C^{(s)}E_{\mathbf{g}}^{(s)} = 8\pi^2 ie\omega\theta V P^{(s)}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}),\\ \omega^2\chi_{\mathbf{g}}C^{(s)}E_0^{(s)} + (\omega^2(1+\chi_0) - k_{\mathbf{g}}^2)E_{\mathbf{g}}^{(s)} = 0,\end{cases} \tag{3}$$

где $\chi_{\mathbf{g}}$, $\chi_{-\mathbf{g}}$ – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости периодической структуры по векторам $\mathbf{g}$:

$$\chi(\omega,\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}}\chi_{\mathbf{g}}(\omega)\exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}}\left(\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)\right)\exp(i\mathbf{g}\mathbf{r})\,. \tag{4}$$

Величины $C^{(s)}$ и $P^{(s)}$ в системе (3) определены следующим образом:

$$C^{(s)} = \mathbf{e}_0^{(s)}\mathbf{e}_1^{(s)}\,,\quad C^{(1)} = 1\,,\quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B\,,$$

$$P^{(s)} = \mathbf{e}_0^{(s)}(\boldsymbol{\mu}/\mu),\quad P^{(1)} = \sin\varphi\,,\quad P^{(1)} = \cos\varphi\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega\mathbf{V}/V^2$ – составляющая импульса виртуального фотона, перпендикулярная скорости частицы $\mathbf{V}$ ($\mu = \omega\theta/V$, где $\theta<<1$ – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{V}$), θ_B – угол Брэгга, φ – азимутальный угол излучения, который отсчитывается от плоскости, образованном векторами скорости $\mathbf{V}$ и вектором $\mathbf{g}$, который перпендикулярный отражающим слоям. Длину вектора $\mathbf{g}$ также можно выразить через угол Брэгга и частоту Брэгга ω_B: $g = 2\omega_B\sin\theta_B/V$. Угол между вектором $\frac{\omega\mathbf{V}}{V^2}$ волновым вектором падающей

волны $\mathbf{k}$ обозначен θ, а угол между вектором $\frac{\omega \mathbf{V}}{V^2} + \mathbf{g}$ и волновым вектором дифрагированной волны $\mathbf{k}_g$ обозначен θ'. Система уравнений (3) при параметре $s = 1$ описывает поля σ- поляризованные, а при $s = 2$ π-поляризованные. Величины χ_0 и χ_g имеют следующий вид:

$$\chi_0(\omega) = \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b\,, \quad \chi_g(\omega) = \frac{\exp\left(-iga\right) - 1}{igT}\left(\chi_b - \chi_a\right)\,.$$

$$\chi_0' = \frac{a}{T}\chi_a' + \frac{b}{T}\chi_b',\ \chi_0'' = \frac{a}{T}\chi_a'' + \frac{b}{T}\chi_b'',$$

$$\mathrm{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}} = \frac{2\sin\left(\frac{ga}{2}\right)}{gT}\left(\chi_b' - \chi_a'\right), \quad \mathrm{Im}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}} = \frac{2\sin\left(\frac{ga}{2}\right)}{gT}\left(\chi_b'' - \chi_a''\right)\,. \tag{6}$$

Решая получаемое из системы (3) дисперсионное уравнение

$$(\omega^2(1+\chi_0) - k^2)(\omega^2(1+\chi_0) - k_g^2) - \omega^4\chi_{-g}\chi_g C^{(s)^2} = 0\,, \tag{7}$$

стандартными методами динамической теории [18], найдем k и k_g

$$k = \omega\sqrt{1+\chi_0} + \lambda_0,\ k_g = \omega\sqrt{1+\chi_0} + \lambda_g\,. \tag{8}$$

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\frac{\gamma_g}{\gamma_0}}\right), \tag{9}$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega\frac{\gamma_0}{4\gamma_g}\left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\frac{\gamma_g}{\gamma_0}}\right), \tag{10}$$

где $\beta = \alpha - \chi_0\left(1 - \gamma_g/\gamma_0\right)$, $\alpha = \omega^{-2}(k_g^2 - k^2)$, $\gamma_0 = \cos\psi_0$, $\gamma_g = \cos\psi_g$, ψ_0 – угол между волновым вектором подающей волны $\mathbf{k}$ и вектором нормали к поверхности пластинки $\mathbf{n}$, ψ_g – угол между волновым вектором $\mathbf{k}_g$ и вектором $\mathbf{n}$ (см. рис. 1). Динамические добавки λ_0 и λ_g для рентгеновских волн связаны соотношением:

$$\lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0\frac{\gamma_g}{\gamma_0}\,. \tag{11}$$

Так как динамические добавки малы $|\lambda_0| \ll \omega$, $|\lambda_g| \ll \omega$, то можно показать, что $\theta \approx \theta'$ (см. рис. 1), и поэтому в дальнейшем угол θ' будем обозначать θ.

Решение системы уравнений (3) для дифрагированного поля в периодической структуре представим в виде:

$$E_g^{(s)cr} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\frac{\omega^2\chi_g C^{(s)}}{4\frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2}\left(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}\right)\left(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}\right)}\delta\left(\lambda_g - \lambda_g^*\right) + \tag{12a}$$

$$+E_g^{(s)^{(1)}}\delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E_g^{(s)^{(2)}}\delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)})\,,$$

где $\lambda_0^* = \omega\left(\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0\right)/2$, $\lambda_g^* = \dfrac{\omega\beta}{2} + \dfrac{\gamma_g}{\gamma_0}\lambda_0^*$, $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ – лоренц-фактор частицы, $E_g^{(s)^{(1)}}$ и $E_g^{(s)^{(2)}}$ – свободные дифрагированные поля в кристалле.

Для поля в вакууме перед радиатором решение системы (3) имеет вид:

$$E_0^{(s)vac\,I} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\frac{1}{-\chi_0 - \frac{2}{\omega}\lambda_0}\delta\left(\lambda_0 - \lambda_0^*\right) = \\ = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\frac{1}{\frac{\gamma_0}{\gamma_g}\left(-\chi_0 - \frac{2}{\omega}\frac{\gamma_0}{\gamma_g}\lambda_g + \beta\frac{\gamma_0}{\gamma_g}\right)}\delta\left(\lambda_g - \lambda_g^*\right), \tag{12}$$

где используется соотношение $\delta\left(\lambda_0 - \lambda_0^*\right) = \frac{\gamma_g}{\gamma_0}\delta\left(\lambda_g - \lambda_g^*\right)$. Наоборот, дифрагированное поле в вакууме позади радиатора имеет вид:

$$E_g^{(s)vac} = E_g^{(s)Rad}\delta\left(\lambda_g + \frac{\omega\chi_0}{2}\right), \tag{12}$$

где $E_g^{(s)Rad}$ – поле когерентного излучения вблизи направления Брэгга.

Из второго уравнения системы (3) следует выражение, связывающее дифрагированное и падающее поля в среде:

$$E_0^{(s)cr} = \frac{2\omega\lambda_g}{\omega^2\chi_g C^{(s)}}E_g^{(s)cr}. \tag{13}$$

Для определения амплитуды поля $E_g^{(s)Rad}$ воспользуемся обычными граничными условиями на входной и выходной поверхностях кристаллической пластинки:

$$\int E_0^{(s)vacI}\,d\lambda_0 = \int E_0^{(s)cr}\,d\lambda_0\,, \tag{14a}$$

$$\int E_g^{(s)cr}\,d\lambda_0 = 0\,, \tag{14б}$$

$$\int E_g^{(s)cr}\exp\left(i\frac{\lambda_g}{\gamma_g}L\right)d\lambda_g = \int E_g^{(s)vac}\exp\left(i\frac{\lambda_g}{\gamma_g}L\right)d\lambda_g\,. \tag{14в}$$

Поле излучения представим в виде двух слагаемых:

$$E_g^{(s)Rad} = E_{ПРИ}^{(s)} + E_{ДПИ}^{(s)}\,, \tag{15a}$$

$$E_{ПРИ}^{(s)} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\frac{\omega^2\chi_g C^{(s)}}{8\sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\frac{\gamma_g}{\gamma_0}}}\cdot\frac{\gamma_g}{\gamma_0\lambda_0^*}\times \\ \left[\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\gamma_g/\gamma_0}\right)\left(\frac{1 - \exp\left(-i(\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})L/\gamma_g\right)}{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}\right) - \right.$$

$$-\left(\beta-\sqrt{\beta^2+4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\gamma_g/\gamma_0}\right)\left(\frac{1-\exp\left(-i(\lambda_g^*-\lambda_g^{(1)})L/\gamma_g\right)}{\lambda_g^*-\lambda_g^{(1)}}\right)\Bigg]\times$$

$$\times\exp\left[i\left(\frac{\omega\chi_0}{2}+\lambda_g^*\right)\frac{L}{\gamma_g}\right], \qquad (15б)$$

$$E_{ПРИ}^{(s)}=\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega}\frac{\gamma_g\chi_g C^{(s)}}{\gamma_0\sqrt{\beta^2+4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\gamma_g/\gamma_0}}\left(\frac{\omega}{-\omega\chi_0-2\lambda_0^*}+\frac{\omega}{2\lambda_0^*}\right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-i\frac{\lambda_g^*-\lambda_g^{(1)}}{\gamma_g}L\right)-\exp\left(-i\frac{\lambda_g^*-\lambda_g^{(2)}}{\gamma_g}L\right)\right]\exp\left[i\left(\frac{\omega\chi_0}{2}+\lambda_g^*\right)\frac{L}{\gamma_g}\right]. \qquad (15)$$

Выражения (15б) и (15в) представляют амплитуды поля излучения, аналогичные амплитудам ПРИ и ДПИ в кристалле. ДПИ возникает вследствие дифракции на периодически слоистой искусственной структуре переходного излучения, рождаемого на входной поверхности мишени.

Для дальнейшего анализа излучения, динамические добавки (9) представим в следующем виде:

$$\lambda_g^{(1,2)}=\frac{\omega\left|\chi_g'\right|C^{(s)}}{2}\left(\xi^{(s)}-\frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2}\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\xi^{(s)^2}+\varepsilon-2i\rho^{(s)}\left(\frac{(1-\varepsilon)}{2}\xi^{(s)}+\kappa^{(s)}\varepsilon\right)-\rho^{(s)^2}\left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{4}+\kappa^{(s)^2}\varepsilon\right)}\right), \qquad (16)$$

где

$$\xi^{(s)}(\omega)=\eta^{(s)}(\omega)+\frac{1-\varepsilon}{2\nu^{(s)}},$$

$$\eta^{(s)}(\omega)=\frac{\alpha}{2\left|\mathrm{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}}\right|C^{(s)}}\equiv\frac{\sin^2\theta_B}{V^2C^{(s)}}\frac{gT}{\left|\chi_b'-\chi_a'\right|\left|\sin\left(ga/2\right)\right|}\left(1-\frac{\omega(1-\theta\cos\varphi\cot\theta_B)}{\omega_B}\right),$$

$$\nu^{(s)}=\frac{C^{(s)}\mathrm{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}}}{\chi_0'}\equiv\frac{2C^{(s)}\left|\sin\left(ga/2\right)\right|}{g}\left|\frac{\chi_b'-\chi_a'}{a\chi_a'+b\chi_b'}\right|,$$

$$\rho^{(s)}=\frac{\chi_0''}{\left|\mathrm{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}}\right|C^{(s)}}\equiv\frac{a\chi_a''+b\chi_b''}{\left|\chi_b'-\chi_a'\right|C^{(s)}}\frac{g}{2\left|\sin\left(ga/2\right)\right|},$$

$$\kappa^{(s)}=\frac{\chi_g''C^{(s)}}{\chi_0''}\equiv\frac{2C^{(s)}\left|\sin\left(ga/2\right)\right|}{g}\left|\frac{\chi_b''-\chi_a''}{a\chi_a''+b\chi_b''}\right|,\qquad \varepsilon=\frac{\gamma_g}{\gamma_0}. \qquad (17)$$

Важным параметром в выражении (17) является параметр ε, определяющий степень асимметрии отражения поля относительно поверхности мишени, который представим в виде

$$\varepsilon=\frac{\sin(\delta+\theta_B)}{\sin(\delta-\theta_B)}, \qquad (18)$$

где θ_B – угол между скоростью электрона и отражающими слоями, δ – угол между поверхностью мишени и отражающими слоями. Заметим, что угол падения электрона на поверхность мишени $\delta - \theta_B$ увеличивается, если параметр ε уменьшается и наоборот (см. рис. 2).

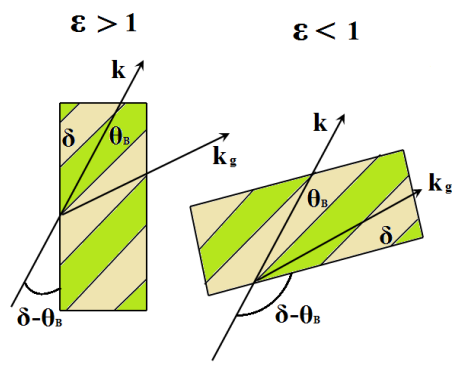


Рис. 2. Асимметричные ($\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$) отражения излучения от пластинки. Случай $\varepsilon = 1$ соответствует симметричному отражению.

2. Спектрально-угловая плотность излучений

Подставляя выражение (16) в (15б) и (15в), а затем полученные формулы – в следующее хорошо известное [19] выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения:

$$\omega \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^{2} \left| E_g^{(s)Rad} \right|^2 , \tag{19}$$

найдем формулы, описывающие вклады в спектрально-угловую плотность излучения механизмов ПРИ и ДПИ, а также формулу, представляющую результат интерференции этих механизмов излучения:

$$\omega \frac{d^2 N^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)^2} \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0')^2} R_{ПРИ}^{(s)} , \tag{20а}$$

$$R_{ПРИ}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1 + \exp\left(-2b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right) - 2\exp\left(-b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right)\cos\left(b^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \rho^{(s)^2}\Delta^{(1)^2}} \tag{20б}$$

$$\omega \frac{d^2 N_{ДПИ}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)^2} \theta^2 \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0'}\right)^2 R_{ДПИ}^{(s)} , \tag{21а}$$

$$R^{(s)}_{ДПИ} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi^2+\varepsilon}\exp\left(-b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \times$$
$$\times \left[\sin^2\left(b^{(s)}\frac{\left(\sqrt{\xi^2+\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\right) + \mathrm{sh}^2\left(b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)}+2\varepsilon\kappa^{(s)}}{2\varepsilon\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}\right)\right], \qquad (21б)$$

где

$$\Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2}+\varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2}+\varepsilon}}\,,$$
$$\sigma^{(s)} = \frac{1}{\left|\chi'_g\right| C^{(s)}}\left(\theta^2+\gamma^{-2}-\chi'_0\right) \equiv \frac{1}{\nu^{(s)}}\left(\frac{\theta^2}{|\chi'_0|}+\frac{1}{\gamma^2\,|\chi'_0|}+1\right),$$
$$b^{(s)} = \frac{\omega\left|\mathrm{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}}\right| C^{(s)}}{2}\frac{L}{\gamma_0}\,. \qquad (22)$$

Формулы (20-21) составляют главный результат данной работы. Они получены в двухволновом приближении динамической теории дифракции с учетом поглощения излучения в среде и возможности различной ориентации дифрагирующих слоев относительно поверхности пластинки. Эти формулы позволяют исследовать спектрально-угловые характеристики излучений в зависимости от энергии релятивистских электронов и параметров искусственной периодической структуры.

3. Анализ рентгеновских волн ДПИ. Эффект Бормана

Так как две волны рентгеновских волн вносят вклад в выход ДПИ, то для их анализа, выражение для спектральной плотности (21б) удобно представить в следующем виде

$$R^{(s)}_{ДПИ} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2+\varepsilon}\left[\exp\left\{-b^{(s)}\rho^{(s)}\left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)}+2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}\right]\right\} +\right.$$
$$+\ \exp\left\{-b^{(s)}\rho^{(s)}\left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)}+2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}\right]\right\} -$$
$$\left. -2\cdot\exp\left\{-b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right\}\cdot\cos\left(\frac{2b^{(s)}\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right]. \qquad (23)$$

Изучая выражение (23), можно заметить, что члены в квадратных скобках описывают последовательно волны, принадлежащие первому и второму полям и их интерференции.

Запишем далее выражение (23) в более известной форме

$$R^{(s)}_{ДПИ} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2+\varepsilon}\left[e^{-L_f\mu_1^{(s)}} + e^{-L_f\mu_2^{(s)}} - 2\cdot e^{-L_f\mu_0\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{L_f}{L^{(s)}_{ext}}\sqrt{\xi^2+\varepsilon}\right)\right], \qquad (24)$$

где эффективные коэффициенты поглощения $\mu_1^{(s)}$ и $\mu_1^{(s)}$ для двух различных волн в периодической среде имеют следующий вид:

$$\mu_1^{(s)} = \mu_0 \left[\frac{1+\varepsilon}{2} - \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{2\sqrt{\xi^2+\varepsilon}} \right], \quad \mu_2^{(s)} = \mu_0 \left[\frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{2\sqrt{\xi^2+\varepsilon}} \right]. \quad (25)$$

где L_f – путь фотона в кристалле, $\mu_0 = \omega\chi_0''$ – линейный коэффициент поглощение рентгеновских волн в аморфной среде, $L_{ext}^{(s)} = (\omega \left|\mathrm{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}}\right| C)^{-1}$ – длина экстинкции рентгеновских волн в периодической среде.

Несмотря на сложный свой характер, формула (24) показывает яркий динамический эффект Бормана возникающий при прохождении рентгеновских волн ДПИ через периодическую среду. При рассеяние рентгеновских волн в поглощающей периодической среде возникает аномальное поглощение одного поля $\mu_2^{(s)} > \mu_0$ и аномальное прохождение рентгеновских лучей другого поля $\mu_1^{(s)} << \mu_0$. При достаточно большом пути фотона в пластинке ДПИ будет формироваться только за счет одного из полей в периодической структуре, а именно с эффективным коэффициентом поглощения $\mu_1^{(s)}$.

Физика эффекта Бормана [20] заключается в образовании падающей и рассеянной рентгеновскими волнами стоячей волны, пучности которой расположены в пространстве среды с меньшей электронной плотностью (первое слагаемое в формулах (23) и (24)). Для другой же волны эти пучности расположены в пространстве с наибольшей электронной плотностью (второе слагаемое в формулах (23) и (24)).

Параметр $\kappa^{(s)}$, входящий в (25), определяет степень проявления эффекта аномального эффекта Бормана в прохождении рентгеновских волн через периодическую структуру. Как и в случае свободных рентгеновских волн в кристалле, необходимым условием проявления данного эффекта в ПРИ является $\kappa^{(s)} \approx 1$. В этом случае линейный коэффициент поглощения $\mu_1^{(s)}$принимает минимальное значение.

Далее проведем численный анализ каждой из волн в отдельности и их интерференции. Для этого выражение (23) запишем в следующем виде

$$R^{(s)} = R_1^{(s)} + R_2^{(s)} + R_{int}^{(s)}, \quad (26)$$

$$R_1^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2+\varepsilon} \exp\left\{ -b^{(s)}\rho^{(s)} \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2+\varepsilon}} \right] \right\}, \quad (26б)$$

$$R_2^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2+\varepsilon} \exp\left\{ -b^{(s)}\rho^{(s)} \left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2+\varepsilon}} \right] \right\}, \quad (26в)$$

$$R_{int}^{(s)} = -\frac{2\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2+\varepsilon} \exp\left\{ -b^{(s)}\rho^{(s)} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right\} \cdot \cos\left(\frac{2b^{(s)}\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (26г)$$

Расчеты будем проводить для σ- поляризованных волн $s = 1$. Для наглядности результата рассмотрим случай, когда слои имеют одинаковую толщину, то есть $T = 2a = 2b$.

Будем рассматривать отражения соответствующие $g = 2\pi/T$. В этом случае параметры, входящие в выражения, принимают следующие значения

$$\xi(\omega) = \frac{2\pi \sin^2(\theta_B)}{|\chi'_b - \chi'_a|} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B}\right) + \frac{1-\varepsilon}{2\nu^{(1)}}, \qquad \kappa^{(1)} = \frac{2}{\pi} \cdot \left|\frac{\chi''_b - \chi''_0}{\chi''_b + \chi''_0}\right|,$$

$$\rho^{(1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \left|\frac{\chi''_b + \chi''_0}{\chi'_b - \chi'_a}\right|, \quad \nu^{(1)} = \frac{2}{\pi} \cdot \left|\frac{\chi'_b - \chi'_a}{\chi'_b + \chi'_a}\right|, \quad b^{(1)} = \frac{\omega_B |\chi'_b - \chi'_a|}{2\pi \sin(\delta - \theta_B)} L. \qquad (27)$$

На рис. 3-5 построены кривые по формулам (26), описывающие спектральную плотность ДПИ ($\omega_B = 8\ keV$) в искусственной периодической структуре, состоящей из аморфных слоев бериллия Be и W для различной толщины мишени в порядке возрастания ее значений.

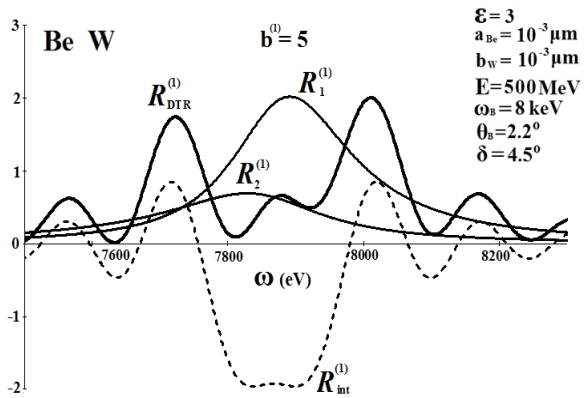


Рис. 3. Вклад двух полней $R_1^{(1)}$ и $R_2^{(1)}$ и их интерференции $R_{int}^{(1)}$ в суммарную спектральную плотность излучения $R_{DTR}^{(1)} = R_1^{(1)} + R_2^{(1)} + R_{int}^{(1)}$ для тонкой мишени ($b^{(1)} = 5$).

Видно, что в этом случае ДПИ формируется за счет двух полей в периодической структуре, при этом существенно влияние их интерференции. Интерференционное слагаемое приводит к осцилляциям в спектральной плотности излучения.

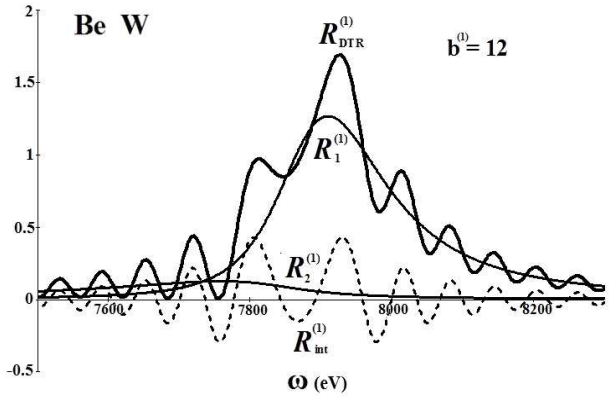


Рис. 4.

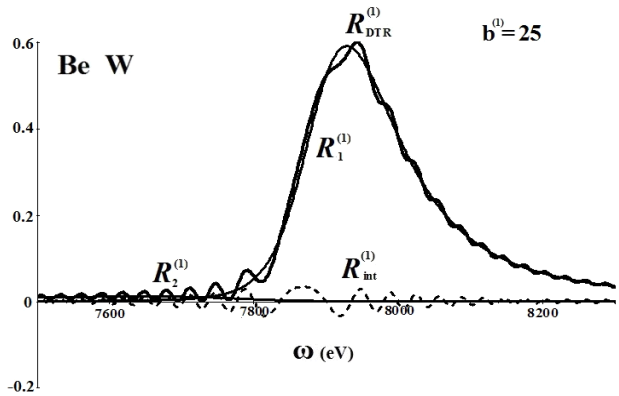


Рис. 5.

С переходом к большим толщинам резко возрастает аномальное высокое поглощение одного из полей (рис. 4 – рис. 5), в результате чего ослабляются и затем совсем исчезают побочные максимумы (рис. 6).

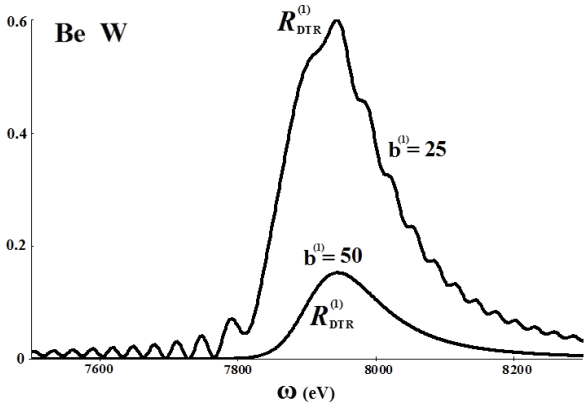


Рис. 6. Спектральная плотность DTR для различных толщин мишени.

Это определяется возросшим поглощением интерференционной части. Необходимо отметить, что на рис. 5 и рис. 6 спектральные кривые построены при большой толщине мишени, когда длина пути фотона больше аморфной длины фотопоглощения фотона $l_{abs} = (\mu_0)^{-1}$, что может свидетельствовать о ярком проявлении эффекта Бормана в периодической структуре. Необходимо отметить увеличение монохроматизации ДПИ при увеличении толщины мишени, а в случае проявления.

4. Угловая плотность ДПИ и ПРИ

Для случая σ- поляризованных волн формулы (20) и (21) описывающие спектрально-угловые распределения ПРИ и ДПИ принимают следующий вид:

$$\omega \frac{d^2 N^{(1)}_{ПРИ}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\theta_\perp^2}{\left(\theta_\perp^2 + \gamma^{-2} + |\chi'_a + \chi'_b|/2\right)^2} R_{ПРИ} \,, \tag{27a}$$

$$R_{ПРИ} = \left(1 - \frac{\xi(\omega)}{\sqrt{\xi(\omega)^2+\varepsilon}}\right)^2 \frac{1 + e^{-2b^{(1)}\rho^{(1)}\Delta^{(1)}} - 2e^{-b^{(1)}\rho^{(1)}\Delta^{(1)}}\cos\left(b^{(1)}\Omega^{(1)}(\omega)\right)}{\Omega^{(1)}(\omega)^2 + \left(\rho^{(s)}\Delta^{(1)}\right)^2}\,, \qquad (27б)$$

$$\omega\frac{d^2N^{(1)}_{ДПИ}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2}\theta_\perp^2\left(\frac{1}{\theta_\perp^2+\gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_\perp^2+\gamma^{-2}+|\chi'_a+\chi'_b|/2}\right)^2 R_{ДПИ}\,, \qquad (28а)$$

$$R_{ДПИ} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2+\varepsilon}\exp\left(-b^{(1)}\rho^{(1)}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\times$$

$$\times\left[\sin^2\left(b^{(1)}\frac{\left(\sqrt{\xi(\omega)^2+\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\right) + \mathrm{sh}^2\left(b^{(1)}\rho^{(1)}\frac{(1-\varepsilon)\xi(\omega)+2\varepsilon\kappa^{(1)}}{2\varepsilon\sqrt{\xi(\omega)^2+\varepsilon}}\right)\right]\,, \qquad (28б)$$

где

$$\Omega^{(1)}(\omega) = \sigma(\theta,\gamma) + \left(\xi(\omega) - \sqrt{\xi(\omega)^2+\varepsilon}\right)\Big/\varepsilon\,,\ \sigma(\theta,\gamma) = \frac{\pi}{|\chi'_b-\chi'_a|}\cdot\left(\theta_\perp^2+\gamma^{-2}+\frac{|\chi'_a+\chi'_b|}{2}\right)\,,$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\varepsilon}} - \frac{\kappa^{(1)}}{\sqrt{\xi^2+\varepsilon}},\ \xi(\omega) = \frac{2\pi\sin^2(\theta_B)}{|\chi'_b-\chi'_a|}\cdot\left(1-\frac{\omega}{\omega_B}\right) + \frac{1-\varepsilon}{2\nu^{(1)}}\,,$$

$$\kappa^{(1)} = \frac{2}{\pi}\cdot\left|\frac{\chi''_b-\chi''_a}{\chi''_b+\chi''_a}\right|,\quad \rho^{(1)} = \frac{\pi}{2}\cdot\left|\frac{\chi''_b+\chi''_a}{\chi'_b-\chi'_a}\right|,$$

$$\nu^{(1)} = \frac{2}{\pi}\cdot\left|\frac{\chi'_b-\chi'_a}{\chi'_b+\chi'_a}\right|,\quad b^{(1)} = \frac{\omega_B|\chi'_b-\chi'_a|}{2\pi\sin(\delta-\theta_B)}L\,,\qquad \theta_\perp = \theta\sin\varphi. \qquad (29)$$

Угловые плотности механизмов ПРИ и ДПИ запишем в следующем виде:

$$\frac{dN^{(1)}_{ПРИ}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2}\frac{\theta_\perp^2}{\left(\theta_\perp^2+\gamma^{-2}+|\chi'_a+\chi'_b|/2\right)^2}\int R_{ПРИ}\frac{d\omega}{\omega}\,, \qquad (30а)$$

$$\frac{dN^{(1)}_{ДПИ}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2}\theta_\perp^2\left(\frac{1}{\theta_\perp^2+\gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_\perp^2+\gamma^{-2}+|\chi'_a+\chi'_b|/2}\right)^2\int R_{ДПИ}\frac{d\omega}{\omega}\,. \qquad (30)$$

Для сравнения угловых плотностей излучения в искусственной периодической и кристаллической средах в приближенных условиях, запишем выражения для угловой плотности ДПИ в кристалле для σ- поляризованных волн

$$\frac{dN^{(1)Cr}_{ДПИ}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2}\theta_\perp^2\left(\frac{1}{\theta_\perp^2+\gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_\perp^2+\gamma^{-2}-\chi'_0}\right)^2\int R_{ДПИ}\frac{d\omega}{\omega}\,, \qquad (31)$$

где соответствующие обозначения (27) имеют вид

$$\kappa^{(1)} = \frac{\chi''_g}{\chi''_0}\,,\quad \rho^{(1)} = \frac{\chi''_0}{|\chi'_g|}\,,\quad \nu^{(1)} = \frac{\chi'_g}{\chi'_0}\,,\quad \sigma(\theta,\gamma) = \frac{1}{|\chi'_g|}\cdot\left(\theta_\perp^2+\gamma^{-2}-\chi'_0\right),$$

$$\xi(\omega) = \frac{2\sin^2(\theta_B)}{|\chi'_g|} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B}\right) + \frac{1-\varepsilon}{2\nu^{(1)}}\,, \qquad \theta_\perp = \theta \sin\varphi\,. \tag{32}$$

По формулам (30б) и (31) построены кривые угловой плотности ДПИ ($\omega_B = 8\,keV$) в кристаллической мишени вольфрама W (см. рис. 7) и ДПИ в искусственной периодической структуре, состоящей из аморфных слоев бериллия Be и W (рис. 8). Пути электрона и фотона ДПИ в мишени $L_e = 50\,\mu m$, $L_{fot} = 16,6\ \mu m$ выбраны одинаковыми для обоих случаев.

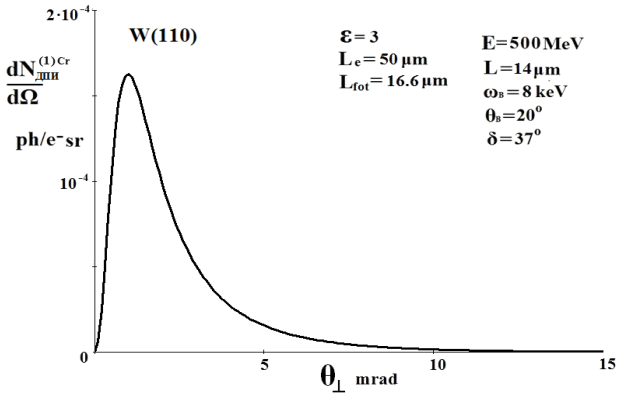


Рис. 7. Угловая плотность DTR релятивистского электрона, пересекающего кристаллическую пластинку (W).

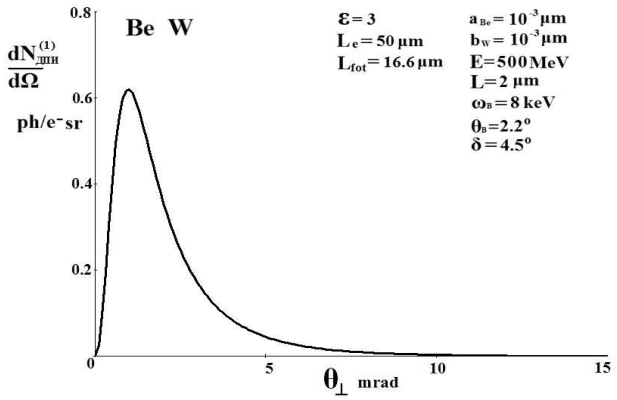


Рис. 8. Угловая плотность DTR релятивистского электрона, пересекающего искусственную периодически слоистую структуру (Be-W) в условиях, аналогичных рис. 7.

Из рис. 7 и рис. 8 следует, что угловая плотность ДПИ из искусственной периодической структуры более чем на три порядка превышает угловую плотность ДПИ из кристалла в аналогичных условиях. Кривые, представленные на рис. 9, построенные по формуле (27), демонстрируют спектры ПРИ в искусственной периодической структуре для различных углов наблюдения.

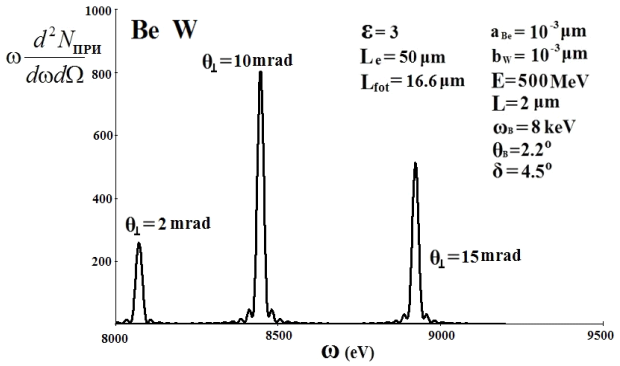


Рис. 9. Спектры PXR для различных углов наблюдения.

Из рис. 9 следует, что частота пика ПРИ сильно зависит от угла наблюдения, что естественно приводит к слабой монохроматичности выхода ПРИ. Кривые, представленные на рис. 10, построенные по формуле (28), демонстрируют спектры ДПИ при двух разных углах наблюдения.

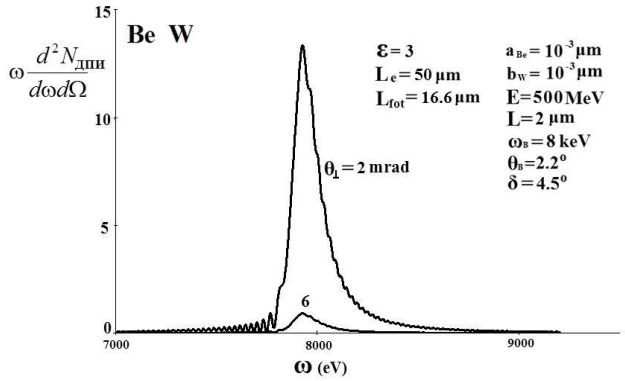


Рис. 10. Спектры DTR для различных углов наблюдения.

Из рис. 10 следует, что ДПИ более монохроматично, чем ПРИ, что является интересным с точки зрения создания интенсивного квазимонохроматического рентгеновского источника. Необходимо отметить, что кривые на рис. 10, как и на рис. 8 построены в условиях, когда ярко проявляется ээфект Бормана в искусственной периодической структуре.

Рассмотрим влияние асимметрии отражения поля относительно поверхности мишени на спектрально-угловые характеристики ДПИ. На рис. 11 и рис. 12 представлены кривые аналогичные кривым построенным на рис. 8. и рис. 10, но для другого параметра асимметрии $\varepsilon = 8.5$. При этом длина пути фотона в обоих случаях одинакова $L_{fot} = 16,6\ \mu m$.

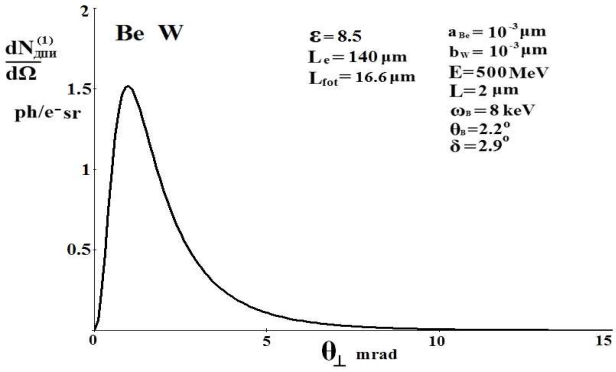


Рис. 11.

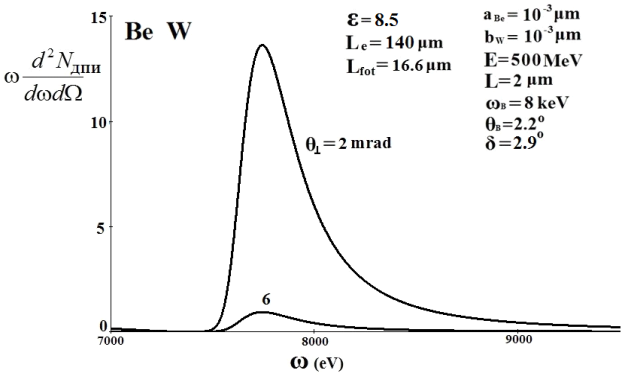


Рис. 12.

Видно, что ширина спектра ДПИ при увеличении асимметрии возросла (рис. 12), что привело к росту угловой плотности ДПИ (рис. 11). Данный эффект обусловлен тем, что зависимость линейного коэффициент поглощения первого поля (25) от частоты зависит от асимметрии отражения.

Рассмотрим возможность оптимизации выхода ДПИ в зависимости от толщины мишени L. Для этого построим зависимость от толщины мишени угловой плотности ДПИ при фиксированном угле наблюдения (см. рис. 13).

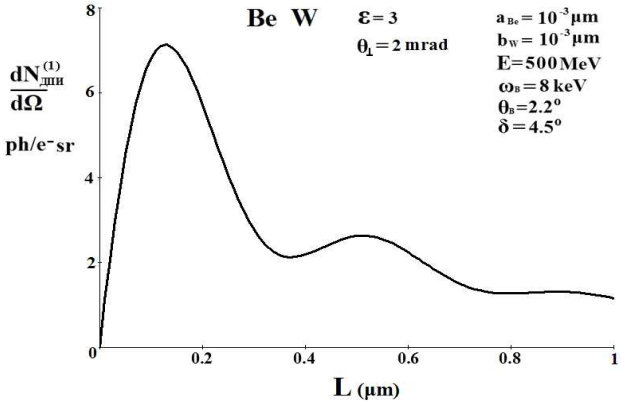


Рис. 13. Зависимость выхода ДПИ от толщины мишени при фиксированном угле наблюдения.

Как и следовало ожидать, из рис. 13 следует, что плотность ДПИ сначала растет с увеличением толщины, затем, из-за поглощения волн средой, падает. В представленной на этом рисунке зависимости, наблюдаются колебания, что отражает процесс перекачки энергии из падающей волны в отраженную и обратно. Толщина мишени, соответствующая первому максимуму на угловой плотности ДПИ, является оптимальной для мишени-радиатора. Построим угловую плотность ДПИ и ПРИ при оптимальной толщины мишени (рис. 14).

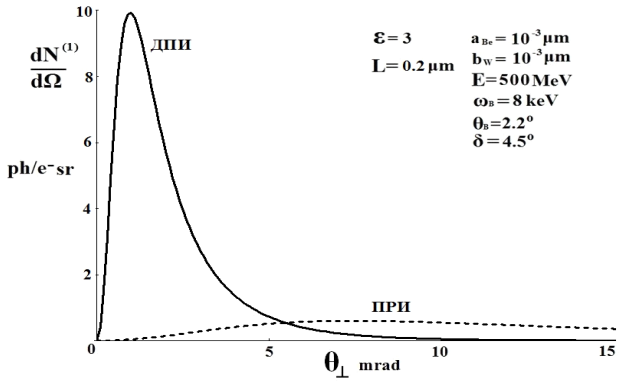


Рис. 14. Сравнение угловых плотностей DTR и PXR при оптимальной для DTR толщине мишени.

Из рис. 14 следует, что в этом случае угловая плотность ДПИ существенно превышает угловую плотность ПРИ и более чем в 10 раз превышает угловую плотность ДПИ для неоптимальной толщины, представленную на рис. 8.

Заключение

Построена теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона пересекающего искусственную периодическую структуру в геометрии рассеяния Лауэ. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики излучения в направлении рассеяния Брэгга. Исследован вклад двух рентгеновских волн в выход ДПИ. Показано, что с увеличением толщины мишени одна волна поглощается аномально высоко, а другая аномально низко. Показано, что эффект Бормана в ДПИ проявляется в искусственной периодической структуре в геометрии Лауэ.

На основе полученных выражений показано, что угловая плотность ДПИ из слоистой мишени более чем на два порядка превышает угловую плотность в монокристаллическом радиаторе в аналогичных условиях. Выявлено, что ДПИ в искусственной периодической структуре более монохроматичным, чем ПРИ. В связи с этим механизм ДПИ в искусственной периодической структуре будет более перспективным с точки зрения создания нового интенсивного квазимонохроматического источника рентгеновского излучения с перестраиваемой частотой. Показано, что выход ДПИ в искусственной периодической структуре в максимуме угловой плотности растет до некоторой оптимальной толщины пластинки, затем падает из-за фотопоглощения в мишени, то есть существует оптимальная толщина радиатора.

Литература

1. Garibian G.M., Yang C. X- ray Transition Radiation / Erevan, USSR, 1983 (in Russian).
2. Caticha A. // Phys. Rev. A. – 1989. – 40. – P.4322.
3. Nasonov N.N. // Phys. Lett. A. – 1998. – 246. – P.148.
4. Artru X., Rullhusen P. // Nucl. Instr. Meth. B. – 1998. – 145. – P.1.
5. Ter-Mikaelian M. High-Energy Electromagnetic Process in Condensed Media / New York: Wiley, 1972.
6. Garibian G., Yang C. // J. Exp. Theor. Phys. – 1971. – 61. – P.930.
7. Baryshevsky V., Feranchuk I. // J. Exp. Theor. Phys. – 1971. – 61. – P.944.
8. Nasonov N., Noskov A. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2003. – 201. – P.67.
9. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.E. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2003. – 201. – P.97.
10. Adischev Y.N., Arishev S.N., Vnukov A.V., et al. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2003. – 201. – P.114.
11. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., et al. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2005. – 227. – P.41.
12. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2006. – 252. – P.69.
13. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2008. – 266. – P.3777.
14. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // J. Exp. Theor. Phys. – 1971. – 136. – P.1043.
15. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2008. – 266. – P.3770.
16. Piestrup M.A., Boyers D.G., Pincus C.I. et al. // Phys.Rev. A.– 1992.– 45.– P.1183.
17. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A., Gary C.K. // Phys. Rev. E. – 2003. – 68. – P.3604.
18. Pinsker Z. Dynamic Scattering of X-rays in Crystals / Berlin: Springer, 1984.
19. Bazylev V., Zhevago N. Emission From Fast Particles Moving in a Medium and External Fields / Moscow: Nauka, 1987.
20. Borrmann G. // Zh. Phys. – 1941. – 42. – P.157.

DIFFRACTED TRANSITION RADIATION OF RELATIVISTIC ELECTRON IN THE ARTIFICIAL PERIODIC STRUCTURE

S.V. Blazhevich*, M.N. Beknazarov*, I.V. Kolosova, A.V. Noskov****

*Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: blazh@bsu.edu.ru
**University of Cooperation, Economics and Low,
Sadovaya St., 116a, Belgorod, 308023, Russia, e-mail: noskovbupk@mail.ru

Abstract. Theory of coherent X-radiation of relativistic electron crossing the artificial periodic layered structure in Laue geometry is built up. Expressions describing spectral-angular characteristics of radiation in Bragg's scattering direction are derived and investigated. The radiation is considered by analogy with the coherent radiation in crystal medium as the result of coherent sum of contribution from mechanisms: the parametric X-radiation (PXR) and the diffracted transition radiation (DTR). It is shown, that DTR yields from multilayer target. It may be more essentially than partical irradiation in single crystal under similar conditions.

Key words: relativistic electron, transition radiation, dynamical diffraction, angle distribution.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УСРЕДНЕННОЙ МОДЕЛИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ [13)]

О.В. Гальцев

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: oleggaltsev@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуется задача со свободной границей, описывающая на макроскопическом уровне совместную фильтрацию двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Основными уравнениями математической модели на микроскопическом уровне являются стационарная система уравнений Стокса для несжимаемой неоднородной вязкой жидкости в порах и стационарная система уравнений Ламе для несжимаемого упругого скелета, дополненные граничными условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений на общей границе «твердый скелет – жидкость» в порах, и транспортного уравнения для неизвестной плотности жидкости. Методом двухмасштабного разложения выводится макроскопическая математическая модель совместного движения жидкости и упругого скелета, и обсуждается численная аппроксимация усредненной модели для специальной структуры порового пространства.

Ключевые слова: задача Маскета, задача со свободной границей, фильтрация жидкости, усреднение.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается математическая модель, описывающая совместное движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде. Помимо несомненного теоретического значения, эта задача имеет важные практические приложения. Например, моделирование вытеснения нефти водой. Мы ограничимся задачей вытеснения под действием силы тяжести. Более того, для простоты изложения будем считать, что жидкости имеют одинаковую вязкость.

Среди математических моделей, описывающих такое движение широко известна задача Маскета [1]. Эта феноменологическая модель описывает фильтрацию двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных некоторой подвижной (свободной) границей. Движение первой жидкости под воздействием силы тяжести в области $\Omega^+(t)$ с постоянной плотностью ρ_f^+ описывается системой уравнений Дарси

$$\boldsymbol{v}^+ = -k\nabla p^+ + \rho_f^+ \boldsymbol{F}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}^+ = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^+(t), \tag{1}$$

[13]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613).

для микроскопической скорости $\boldsymbol{v}^+$ и давления p_f^+ жидкости. Единичный вектор $\boldsymbol{F}$ совпадает с направлением силы тяжести, а заданная постоянная k называется проницаемостью грунта.

Соответственно, движение второй жидкости под воздействием силы тяжести в области $\Omega^-(t)$ с постоянной плотностью ρ_f^- описывается той же самой системой уравнений Дарси

$$\boldsymbol{v}^- = -\nabla p^- + \rho_f^- \boldsymbol{F}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}^- = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^-(t) \tag{2}$$

для микроскопической скорости $\boldsymbol{v}^-$ и давления p^-. На общей свободной границе $\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \bigcap \partial\Omega^-(t)$ давления и нормальные скорости непрерывны

$$p^+ = p^-, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma(t), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}^- \cdot \boldsymbol{n} = V_n, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma(t). \tag{4}$$

Условие (4) означает, что граница $\Gamma(t)$ есть материальная поверхность. То есть во время движения она состоит из одних и тех же материальных точек. Этот факт позволяет сформулировать обобщенную постановку задачи Маскета. Определим давление p неоднородной жидкости как

$$p = p^+ \text{ если } \boldsymbol{x} \in \Omega^+(t), \;\; p = p^- \text{ если } \boldsymbol{x} \in \Omega^-(t),$$

плотность ρ_f неоднородной жидкости как

$$\rho_f = \rho_f^+ \text{ если } \boldsymbol{x} \in \Omega^+(t), \;\; \rho_f = \rho_f^- \text{ если } \boldsymbol{x} \in \Omega^-(t),$$

и скорость $\boldsymbol{v}$ неоднородной жидкости как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^+ \text{ если } \boldsymbol{x} \in \Omega^+(t), \;\; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^- \text{ если } \boldsymbol{x} \in \Omega^-(t).$$

Неизвестные функции $\boldsymbol{v}$, p, и ρ_f будут решениями системы уравнений фильтрации Дарси

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p + \rho_f \boldsymbol{F}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{5}$$

и уравнения переноса

$$\frac{d\rho_f}{dt} \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{6}$$

Первое уравнение в (5) (закон Дарси) следует понимать в обычном смысле почти всюду в $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а второе уравнение (уравнение неразрывности) понимается в смысле теории распределений. Уравнение переноса понимается также в смысле теории распределений, если использовать равенства

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \mu = \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\mu), \quad \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_f = \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\rho_f).$$

Проблема дополняется однородным граничным условием

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{n}$ есть нормальный вектор к границе S, и начальным условием

$$\rho_f(\boldsymbol{x},0)=\rho_f^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega \tag{8}$$

с разрывными начальными значениями

$$\rho_f^0(\boldsymbol{x})=\rho_f^+,\ \text{если}\ \boldsymbol{x}\in\Omega^+\quad \text{и}\quad \rho_f^0(\boldsymbol{x})=\rho_f^-,\ \text{если}\ \boldsymbol{x}\in\Omega^-.$$

В настоящее время только в нескольких работах рассматривается классическая разрешимость задачи Маскета локальной по времени или глобальной по времени, но вблизи известного решения (см. [2], [3], [4]). Какие-либо результаты обобщенного решения автору неизвестны.

В работе А.М. Мейрманова [5], был предложен новый подход для математического моделирования указанного типа фильтрации. А именно, физический процесс, в первую очередь, описывается на микроскопическом уровне системой уравнений, состоящей из уравнения Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости в порах, уравнения Ламэ для движения упругого несжимаемого скелета

$$\nabla\cdot\big(\chi^\varepsilon\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})+(1-\chi^\varepsilon)\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)-p^\varepsilon\mathbb{I}\big)+\rho^\varepsilon\,\boldsymbol{F}=0, \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\,\boldsymbol{w}^\varepsilon=0, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=0\,\text{при}\,\boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega, \tag{11}$$

$$\chi^\varepsilon\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},0)\,\text{при}\,\boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{12}$$

$$\int_\Omega p^\varepsilon\,dx=0 \tag{13}$$

и транспортного уравнения для плотности

$$\frac{d\rho^\varepsilon}{dt}\equiv\frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\nabla\rho^\varepsilon=0,\ \rho^\varepsilon=\chi^\varepsilon\rho_f+(1-\chi^\varepsilon)\rho_s \tag{14}$$

в области Ω, где Ω – единичный квадрат $(0<x_1<1)\times(0<x_2<1)$, $\Omega=\Omega_f^\varepsilon\cup S^\varepsilon\cup\Omega_s^\varepsilon$, Ω_f^ε поровое пространство (область, занятая жидкостью), Ω_s^ε – твердый скелет и S^ε есть поверхность «твердый скелет – поровое пространство», $\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=(\boldsymbol{w}_1^\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{w}_2^\varepsilon(\boldsymbol{x},t))$ – перемещение сплошной среды, $p^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ – давление в сплошной среде, $\mathbb{D}(x,\partial\boldsymbol{w}/\partial t)$ есть симметричная часть градиента $\partial\boldsymbol{w}/\partial t$ (тензор напряжения), $\mathbb{I}$ – единичная матрица, χ^ε – характеристическая функция порового пространства, ρ_f – плотность жидкости, соотнесенная к плотности воды ρ_0, ρ_s есть плотность упругого скелета, μ_0 – безразмерная вязкость жидкости, λ_0 – безразмерная постоянная Ламэ, $\boldsymbol{F}$ – известная вектор-функция.

Далее эта система путем усреднения аппроксимируется задачей Маскета для вязкоупругой фильтрации

$$\nabla\cdot\widetilde{\mathbb{P}}-\nabla p+\rho\,\boldsymbol{F}=0, \tag{15}$$

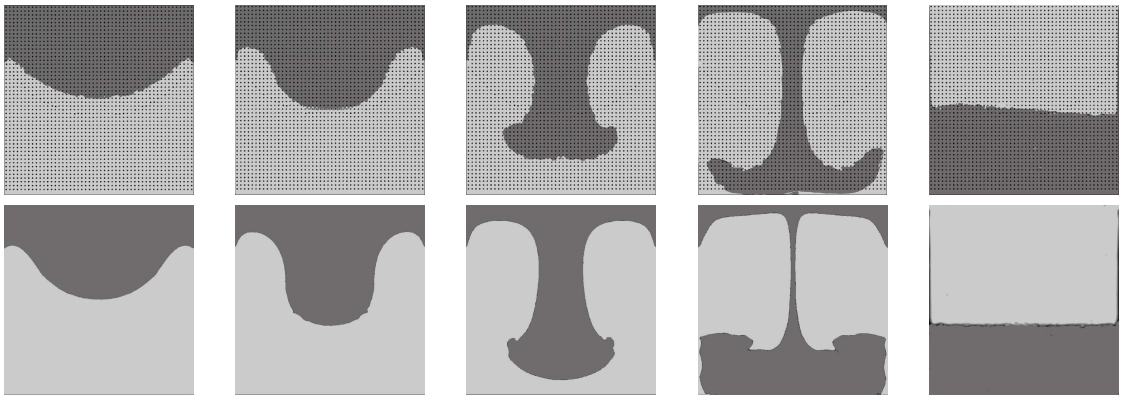
$$\nabla\cdot\,\boldsymbol{w}=0,\ \rho=m\rho_f+(1-m)\rho_s\,,$$

$$\widetilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \lambda_0 \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)) d\tau \,, \qquad (16)$$

где $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$ – тензора четвертого порядка, которые описаны ниже.

Целью настоящей работы является компьютерное моделирование усредненной задачи фильтрации несжимаемой жидкости для структуры порового пространства в виде несвязного твердого скелета в единичном квадрате.

На Рис. 1 представлены сравнительные результаты численного решения задачи совместного движения двух вязких несжимаемых жидкостей в упругом скелете на микроскопическом уровне (сверху) и усредненной задачи вязкоупругой фильтрации (снизу). На основе численного решения этих задач можно сделать вывод, что движение жидкостей в упругом скелете (как на микроуровне, так и на макроуровне) происходит при наличии свободной границы. Решение системы вязкоупругой фильтрации – классическое и обладает гладкой и устойчивой свободной границей. В то время, как решение задачи Маскета в лучшем случае будет только обобщенным с переходной фазой вместо свободной границы [7].



t = 50 t = 860 t = 1200 t = 2600 t = 4800

Рис.1 Сравнение результатов численного моделирования усредненной задачи движения жидкости
в поровом пространстве (снизу) и задачи совместного движения двух жидкостей в упругом скелете на микроскопическом уровне (сверху).

§2. Вывод усредненных уравнений

Как отмечалось выше, две несмешивающиеся жидкости моделируются неоднородной жидкостью, где плотность ρ может принимать только два значения ρ^+ или ρ^-.

Математическая модель, описывающая совместное движение вязкой несжимаемой жидкости и упругого несжимаемого скелета на микроскопическом уровне, имеет вид (9)-(13). Эта система дополняется транспортным уравнением (14).

Будем искать решение задачи в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\varepsilon, t)) + \dots \,,$$

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t) + \dots ,$$
$$\rho^\varepsilon = \rho(\boldsymbol{x},t), \quad p^\varepsilon = P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t) + \dots ,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости.

При выводе усредненных уравнений нам понадобятся хорошо известное свойство

$$\int_{\Omega_T} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)\, d\boldsymbol{x} \to \int_{\Omega_T} \Big(\int_Y \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\, d\boldsymbol{y} \Big)\, d\boldsymbol{x}$$

для всякой гладкой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ([5], [8]). Здесь и далее $d\boldsymbol{x}$ означает дифференциал лебеговой меры в $\mathbb{R}^3$.

Переходить к пределу в интегральном тождестве (1) при $\varepsilon \searrow 0$ будем с двумя различными видами пробных функций. Прежде всего с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, которая является произвольной гладкой вектор-функцией, равной нулю на границе S. Умножим (9) на функцию $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ и проинтегрируем по частям по области Ω_T

$$\int_{\Omega_T} P : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T} \rho^\varepsilon \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}dt. \tag{17}$$

Далее подставим $\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t$ и p^ε в $\mathbb{P}$, распишем каждое слагаемое.

$$\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) = \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)\right) =$$
$$= \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) + \varepsilon \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)\right) + \mathbb{D}\left(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)\right) + \dots , \tag{18}$$

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^\varepsilon) = \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)) =$$
$$= \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)) + \varepsilon \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)\right) + \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)) + \dots . \tag{19}$$

Первое слагаемое в (9) при $\varepsilon \searrow 0$ примет вид

$$\int_{\Omega_T} \chi \mu_0 \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt =$$
$$= \int_{\Omega_T} \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\mu_0 \Big(\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) + \mathbb{D}\left(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right) \Big) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt , \tag{20}$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega_T} \mu_0 \chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon) \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt =$$
$$= \int_{\Omega_T} m\mu_0 \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt , \tag{21}$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}\mu_0\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon},t)\right):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}\int_Y\chi(\boldsymbol{y})\mu_0\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}\mu_0\Big(\int_Y\chi(y)\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right)d\boldsymbol{y}\Big):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt\ ,\quad(22)$$

где $m=\int_Y\chi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ есть пористость среды и $\varepsilon\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\partial\boldsymbol{W}/\partial t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t))\searrow 0$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Второе слагаемое при $\varepsilon\searrow 0$ будет

$$\int_{\Omega_T}(1-\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon))\lambda_0\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^\varepsilon):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}(1-\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon))\lambda_0[\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t))+\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t))]:\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt\ ,\quad(23)$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}\lambda_0(1-\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon))\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}\int_Y\lambda_0(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}(1-m)\lambda_0\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt\,,\quad(24)$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}\lambda_0(1-\chi(\boldsymbol{x}/\varepsilon))\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}\int_Y(1-\chi(y))\lambda_0\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=$$
$$=\int_{\Omega_T}\lambda_0\Big(\int_Y(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t))d\boldsymbol{y}\Big):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}dt\,,\quad(25)$$

где $(1-m)=\int_Y(1-\chi(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y}$ есть пористость среды и $\varepsilon\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t))\searrow 0$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Третье слагаемое при $\varepsilon\searrow 0$

$$\int_{\Omega_T}p^\varepsilon\,\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}dt=\int_{\Omega_T}P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon,t)\,\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}dt\ \to$$
$$\int_\Omega\Big(\int_Y P\,d\boldsymbol{y}\Big)\,\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}dt\ =\ \int_{\Omega_T}p\,\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}dt\,,\quad(26)$$

так как $\langle P\rangle_Y = p$.

Наконец, четвертое слагаемое

$$\int_{\Omega_T} \rho^\varepsilon \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T} \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x}dt\ .$$

Собрав все слагаемые вместе, получим

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T} m\mu_0\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt\ +\\ +\int_{\Omega_T}\mu_0\Big(\int_Y \chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right)d\boldsymbol{y}\Big) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt\ +\\ +\int_{\Omega_T}(1-m)\lambda_0\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt\ +\\ +\int_{\Omega_T}\lambda_0\Big(\int_Y(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t))d\boldsymbol{y}\Big) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\, d\boldsymbol{x}dt\ -\\ -\int_{\Omega_T} p(\boldsymbol{x},t)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}dt + \int_{\Omega_T}\hat\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}dt = 0\ . \quad (27)\end{aligned}$$

Снова интегрируя (3), приходим к макроскопическому уравнению сохранения импульса

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\Big[\mu_0(m\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) + \Big\langle\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\right)\Big\rangle_{Y_f}) + \lambda_0\Big((1-m)\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t))\ +\\ +\big\langle\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t))\big\rangle_{Y_s}\Big) - p\mathbb{I}\Big] + \rho\boldsymbol{F} = 0\ . \quad (28)\end{aligned}$$

Проделаем аналогичные действия с уравнением неразрывности

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T}\operatorname{div}\boldsymbol{w}^\varepsilon\eta\, d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T}\operatorname{div}(\boldsymbol{w}^\varepsilon\eta)\, d\boldsymbol{x}dt - \int_{\Omega_T}\boldsymbol{w}^\varepsilon\cdot\nabla\eta\, d\boldsymbol{x}dt =\\ = \int_{\partial\Omega_T}(\boldsymbol{w}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n})\eta d\sigma - \int_{\Omega_T}\boldsymbol{w}^\varepsilon\cdot\nabla\eta\, d\boldsymbol{x}dt = 0\,, \quad (29)\end{aligned}$$

где $\eta = \eta(\boldsymbol{x},t)$ – произвольная гладкая функция. Первое слагаемое равно нулю в силу граничного условия (11) и, подставив в (13) $\boldsymbol{w}^\varepsilon = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, получим

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t))\cdot\nabla\eta\, d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\eta\, d\boldsymbol{x}dt. \quad (30)$$

Снова интегрируя (14) получим макроскопическое уравнению неразрывности

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0\,. \quad (31)$$

В качестве пробной функции в (3) возьмем функцию вида $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ и проведем аналогичные рассуждения. В результате получим следующее микроскопическое уравнение сохранения импульса

$$\nabla_y \cdot \left[\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\right)+\mathbb{Z}\right)+\lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W})-P\,\mathbb{I}\right]=0\,, \tag{32}$$

$$\mathbb{Z}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\mathbb{D}\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right)-\lambda_0\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^{2} Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)\mathbb{J}^{(ij)},\quad Y\times(0,T)\ .$$

Аналогично, уравнение неразрывности на микроскопическом уровне примет вид

$$\nabla_y\cdot\boldsymbol{W}=0\,,\qquad \boldsymbol{y}\in Y\,,\quad t\in(0,T)\,. \tag{33}$$

Для нахождения тензоров $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$ в (15)-(16) необходимо решить систему (16)-(33), найдя $\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\partial\boldsymbol{W}/\partial t)$ и $\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W})$ как операторы от $\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\partial\boldsymbol{w}/\partial t)$ и $\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$ и, заменив эти выражение в (4).

Пусть $\left\{\boldsymbol{W}^{(i,j)}(\boldsymbol{y},t),\ P^{(i,j)}(\boldsymbol{y},t)\right\}$ и $\left\{\boldsymbol{W}_0^{(i,j)}(\boldsymbol{y}),\ P_0^{(i,j)}(\boldsymbol{y})\right\}$ $i,j=1,2$ – решение периодической задачи, где в первую очередь в Y_f решается

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\left(\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}_0^{(ij)})+\mathbb{J}^{(ij)}-P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\right)=0\,,\\ \nabla_y\cdot\boldsymbol{W}_0^{(ij)}=0\,,\quad \int_Y\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Систему (18) можно представить в виде

$$\Delta_y\boldsymbol{W}_0^{i,j}-\nabla_y P_0^{i,j}=0\,,\quad \boldsymbol{y}\in Y_f\ ,$$

$$\nabla_y\cdot\boldsymbol{W}_0^{i,j}=0\,,\quad \boldsymbol{y}\in Y_f\ ,$$

$$\left(\mu_0\,\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}_0^{(ij)})+\mathbb{J}^{(ij)}-P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\cdot\boldsymbol{n}=0\,,\quad \gamma=\partial Y_f\backslash\partial Y\ ,$$

где

$$\mathbb{J}^{ij}=\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i\big)\,.$$

Затем решается система уравнений во всей элементарной ячейке Y

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\left(\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}\right)+\lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}^{(ij)})-P^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)=0\ ,\\ \nabla_y\cdot\boldsymbol{W}^{(ij)}=0\ ,\\ \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\ .\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Тогда

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^t Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)d\tau\,,$$

и

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\chi(\boldsymbol{y})\sum_{i,j=1}^{2}Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})+\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^t Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{P}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)d\tau\,,$$

С учетом вышесказанного уравнение (4) примет вид (16), где тензора

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{N}_1&=\mu_0\,m\,\mathbb{J}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_f}\ ,\\ \mathfrak{N}_2&=\lambda_0\,(1-m)\mathbb{J}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_0\rangle_{Y_s}+\mu_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0)\rangle_{Y_f}\ ,\\ \mathfrak{N}_3(t)&=\mu_0\left\langle\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\right\rangle_{Y_f}+\lambda_0\,\langle\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)\rangle_{Y_s}\ ,\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

где

$$\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y})=\mu_0\sum_{i,j=1}^{2}\mathbb{D}\big(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)},\tag{37}$$

$$\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t)=\sum_{i,j=1}^{2}\left(\mu_0\,\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y},\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)\right)-\lambda_0\,\mathbb{D}\big(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)\right)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\,,\tag{38}$$

$$\mathbb{J}=\sum_{i,j=1}^{2}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij}.$$

Аналогично поступим с уравнением переноса (14)

$$\int_{\Omega_T}(\rho^\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial t}+\rho^\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\nabla\xi)\,d\boldsymbol{x}dt=-\int_\Omega\rho_0\,\xi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}\,,\tag{39}$$

где ξ – произвольная гладкая функция, равная нулю при $t=T$.

Переходя к пределу при $\varepsilon\searrow 0$ получим

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}\rho^\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt=\int_{\Omega_T}\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt=\int_{\Omega_T}\rho(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\xi}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt\ ,\tag{40}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}\rho^\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\nabla\xi\,d\boldsymbol{x}dt=\\ &\qquad=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\Omega_T}\rho^\varepsilon\Big(\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\Big)\cdot\nabla\xi\,d\boldsymbol{x}dt=\\ &\qquad\qquad=\int_{\Omega_T}\rho\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\xi\,d\boldsymbol{x}dt\ ,\end{aligned}\tag{41}$$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\Omega\rho_0\xi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega\rho_0(\boldsymbol{x})\xi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}\tag{42}$$

или записывая все слагаемые вместе

$$\int_{\Omega_T}\rho(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\xi}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}dt+\int_{\Omega_T}\rho\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla\xi\,d\boldsymbol{x}dt=-\int_\Omega\rho_0(\boldsymbol{x})\xi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}dt\ .\tag{43}$$

После реинтегрирования уравнение (12) переходим к усредненному уравнению переноса

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \nabla \rho = 0\,. \tag{44}$$

§3. Вычислительный алгоритм

В качестве численного метода решения системы уравнений (15) – (16), был выбран один из наиболее универсальных и эффективных разностных методов – модифицированный метод конечных разностей.

Построение решения с использованием этого метода следующее:

1 этап. Область непрерывного изменения аргумента заменяется некоторым конечным дискретным множеством точек (узлами).

2 этап. Производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия заменяются разностными операторами, которые определяют во внутренних и граничных узлах сетки.

3 этап. На данном этапе проводится решение системы алгебраических уравнений, количество которых зависит от числа узлов, и находятся значения исследуемых величин в этих узловых точках.

В связи с использованием эйлеровой системы координат дискретное представление основано на том, что узлы сетки по пространству фиксируются и жидкость движется через ячейки. При эйлеровом подходе используется линейное разложение для описания пространственных изменений непрерывных переменных во всей рассматриваемой области. Эти разложения обычно привязываются к фиксированной эйлеровой сетке.

Типичное эйлерово представление, состоящее из множества $(i+1)$ точек (x_i) описывает одномерную пространственную область $(x_{i-1} < x_i < x_{i+1})$. Размеры ячеек определяются разностями $(x_i - x_{i-1})$.

Построение подходящей сетки в двух или трех измерениях часто является трудной задачей. Часть трудностей возникает из-за геометрической сложности расчетной области, часть же трудностей возникает из-за того, что сама структура волновых процессов в многомерном случае более сложна, чем в одномерном. Существует 6 типов многомерных эйлеровых сеток: регулярная прямоугольная сетка; прямоугольная адаптивная сетка; регулярная треугольная сетка; треугольная сетка с локальным измельчением; прямоугольная сетка с вложенной мелкой сеткой; ортогональная сетка с вложенной мелкой сеткой.

Адаптивная сетка является наиболее эффективной и дает более точный результат. Такая сетка является ортогональной с областью повышенной разрешающей способности, примыкающей к каждой стороне поверхности раздела (границе) и сопряженной с более грубой ортогональной сеткой. Измельчение сетки может быть произведено лишь там, где это требуется. Как правило, выполняется адаптация к границам расчетной области.

Для численного решения задач (15)–(16), (18)–(17) была применена двухуровневая сеточная модель, в основу которой положены следующие принципы:

- сетка является равномерной по всем осям координат. Данное условие позволяет в дальнейшем упростить аппроксимирующие выражения;

- все граничные узлы являются регулярными по всем осям координат, т.е. каждый граничный узел совпадает с узлом сетки, а не ложится между двумя соседними узлами сетки. Данное условие зависит от величины шага сетки. Чем больше дискретность сетки, т.е. чем она «мельче», тем более точным будет геометрическая границ;

- сетка является связной, т.е. любые два внутренних узла можно соединить ломанной, звенья которой параллельны координатным осям, а вершинами являются внутренние узлы сетки.

На первом уровне хранятся значения искомой сеточной функции на трех временных слоях. На втором – признаки расположения узла, а именно:

- основные геометрические признаки расположения узла (внутри, вне или на границе расчетной области); если узел лежит на границе, то конкретизируется тип границы;

- вспомогательные геометрические признаки расположения границы относительно центра расчетной области.

Для построения разностных схем данной сеточной модели введем в области $\Omega = [0 < x < N_1] \times [0 < x_2 < N_2][0 < t < T]$ следующую сетку (Рис. 2):

$$\Omega_f = \begin{pmatrix} x_1^{(i+1)} = ih_1, \ h_1 > 0; \ i = 0, 1, ..., N_1; \\ x_2^{(j+1)} = jh_2, \ h_2 > 0; \ j = 0, 1, ..., N_2; \end{pmatrix}$$

где h_1, h_2 – размер сетки, N_1, N_2 – количество ячеек сетки, соответственно, в направлении x_1 и x_2.

Наиболее часто для аппроксимации первой и второй производных используют следующие схемы:

$$f^{'}(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f^{''}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Аппроксимируя дифференциальные уравнения поставленной задачи с помощью данных разностных уравнений, выполняются основные требования, предъявляемые к разностным схемам уравнений гидродинамики, такие как, корректности (решение единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных условий), однородности (вычисления ведутся по одним и тем же формулам во всех узлах сетки), точности аппроксимации, устойчивости и сходимости.

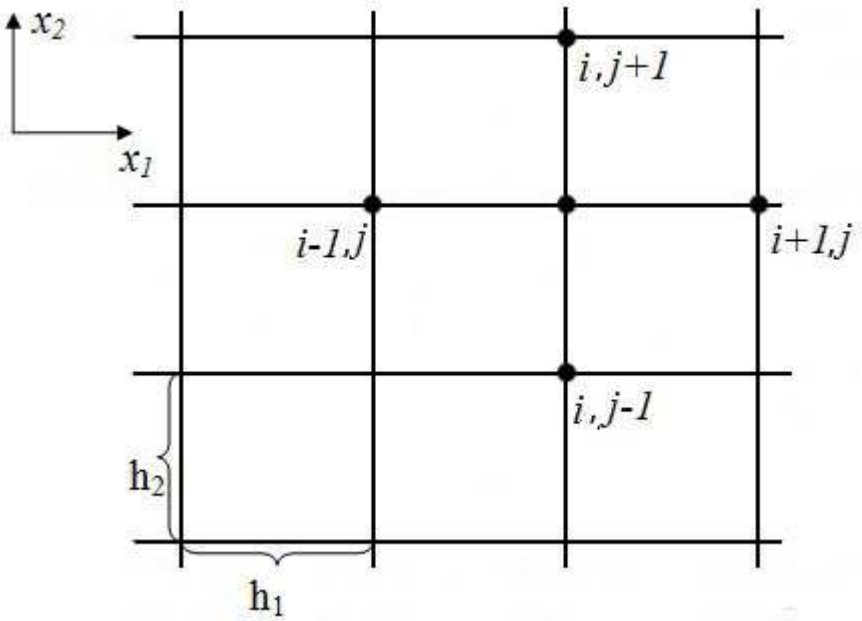


Рис. 2. Шаблон разностной сетки.

Следует отметить, что при решении сквозным образом нелинейных задач, содержащих внутри области интегрирования различные разрывы в решении, необходимо использовать консервативные схемы. В неконсервативных схемах на таких решениях появляются источники и стоки массы и энергии разностного происхождения, сильно искажающие решение на грубых сетках.

Этап 1: Находим значения $\boldsymbol{W}_0^{kl} = (W_0^{1,kl}, W_0^{2,kl})$, решая систему уравнений (18) для элементарной ячейки $\boldsymbol{Y}_f$. Основная трудность при численном решении связана с вычислением поля давления. Первый значительный успех в преодолении этих трудностей был достигнут благодаря идее искусственной сжимаемости [9]. Эта идея очень важна для вычисления неизвестного давления P_0^{kl} из уравнения.

$$\frac{\partial P_0^{kl}}{\partial t} + c_P \nabla \cdot \boldsymbol{W_0^{kl}} = 0\,. \tag{45}$$

Здесь необходимо соблюдать условие соленоидальности ($\nabla \cdot \boldsymbol{W_0^{kl}} = 0$), что достигается путем увеличения c_p в каждый шаг по времени, пока равенство не будет выполняться с заданной точностью.

Так как $k = \overline{1,2}$ и $l = \overline{1,2}$, то первое уравнение можно записать в удобном виде для дальнейшего представления в виде разностной схемы:

$$\mu_0 \frac{\partial^2 W_0^{1,kl}}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W_0^{1,kl}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 W_0^{2,kl}}{\partial y_1 \partial y_2}\right) - \frac{\partial P_0}{\partial y_1} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W_0^{1,kl}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 W_0^{2,kl}}{\partial y_1 \partial y_2}\right) + \mu_0 \frac{\partial^2 W_0^{2,kl}}{\partial y_1^2} - \frac{\partial P_0}{\partial y_2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial W_0^{1,kl}}{\partial y_1} + \frac{\partial W_0^{2,kl}}{\partial y_2} = 0\,.$$

Разностные схемы для вычисления $W_0^{1,kl}$, $W_0^{2,kl}$ и P_0^{kl} на следующем временном слое будут иметь вид

$$W_{0,i,j}^{1,kl} = W_{0,i+1,j}^{1,kl} + W_{0,i-1,j}^{1,kl} + W_{0,i,j+1}^{1,kl} + W_{0,i,j-1}^{1,kl} - \frac{h}{\mu_0}(P_{0,i+1,j}^{kl} - P_{0,i-1,j}^{kl})\,, \tag{46}$$

$$W_{0,i,j}^{2,kl} = W_{0,i+1,j}^{2,kl} + W_{0,i-1,j}^{2,kl} + W_{0,i,j+1}^{2,kl} + W_{0,i,j-1}^{2,kl} - \frac{h}{\mu_0}(P_{0,i,j+1}^{kl} - P_{0,i,j-1}^{kl})\,, \tag{47}$$

$$P_{0,i,j}^{n+1,kl} = c_p\tau\left(\frac{W_{0,i+1,j}^{1,kl} - W_{0,i-1,j}^{1,kl} + W_{0,i,j+1}^{2,kl} - W_{0,i,j-1}^{2,kl}}{2h}\right) + P_{0,i,j}^{n,kl}\,, \tag{48}$$

где n – шаг по времени при расчете искусственной сжимаемости.

Следует отметить, что здесь важно соблюдать граничное условие на общей границе между упругим скелетом и жидкой частью. Для различных $\mathbb{J}^{kl}$ они будут отличаться:

- для $\mathbb{J}^{11}$, то есть при $k = 1$ и $l = 1$ имеем $W_{0,i,j}^{1,11} = 2(W_{0,i+1,j}^{2,11} - W_{0,i,j}^{2,11}) + W_{0,i,j+1}^{1,11}$ и $W_{0,i,j}^{2,11} = W_{0,i,j+1}^{2,11} - \dfrac{P_{0,i,j}^{11}h}{\mu_0}$;
- для $\mathbb{J}^{22}$ имеем $W_{0,i,j}^{1,22} = W_{0,i,j+1}^{1,22} + W_{0,i+1,j}^{2,22} - W_{0,i,j+1}^{2,22}$ и $W_{0,i,j}^{2,22} = W_{0,i,j+1}^{2,22} - \dfrac{P_{0,i,j}^{22}h}{\mu_0}$;
- для $\mathbb{J}^{12}$ имеем $W_{0,i,j}^{1,12} = W_{0,i,j+1}^{1,12} + W_{0,i+1,j}^{2,12} - W_{0,i,j}^{2,12}$ и $W_{0,i,j}^{2,12} = W_{0,i,j+1}^{1,12} - h(P_{0,i,j}^{12} - 1)$;
- для $\mathbb{J}^{21}$ имеем $W_{0,i,j}^{1,21} = W_{0,i,j+1}^{1,21} + W_{0,i+1,j}^{2,21} - W_{0,i,j}^{2,21}$ и $W_{0,i,j}^{2,21} = W_{0,i,j+1}^{1,21} - h(P_{0,i,j}^{21} - 1)$.

Этап 2: Численно находим решение системы уравнений (17). Для этого решаем систему уравнений в жидкой части Y_f

$$\frac{\mu_0}{2}\Delta\frac{\partial \boldsymbol{W}^{kl}}{\partial t} - \nabla P^{kl} = 0\,, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{W}^{kl} \tag{49}$$

и систему в упругом скелете Y_s

$$\frac{\mu_0}{2}\Delta\frac{\partial \boldsymbol{W}^{kl}}{\partial t} - \nabla P^{kl} = 0\,, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{W}^{kl}, \tag{50}$$

где на общей границе «жидкость – упругий скелет» выполняется равенство нормальных напряжений

$$\left[\mu_0\mathbb{D}\left(\boldsymbol{y}, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{kl}}{\partial t}\right) - P^{kl}\mathbb{I}\right]\cdot\boldsymbol{n} = (\lambda_0\mathbb{D}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{W}^{kl}) - P^{kl}\mathbb{I})\cdot\boldsymbol{n}\,. \tag{51}$$

Пусть $\boldsymbol{V} = \partial \boldsymbol{W}/\partial t$, $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2)$. Тогда, учитывая равенство нормальных напряжений и перемещений, условие на общей границе будет иметь вид

$$V_{i,j}^{1,kl} = V_{i,j+1}^{1,kl} + V_{i+1,j}^{2,kl} + V_{i,j}^{2,kl} - \frac{2hW_{i,j}^{1,kl}}{\mu_0}\ , \quad V_{i,j}^{2,kl} = V_{i,j+1}^{2,kl} - \frac{hW_{i,j}^{2,kl}}{\mu_0}\ , \tag{52}$$

где

$$W_{i,j}^{1,kl} = W_{i+1,j}^{1,kl} - \frac{P_{i,j}^{kl}h}{\lambda_0}\ , \quad W_{i,j}^{2,kl} = W_{i,j+1}^{1,kl} - W_{i,j}^{1,kl} + W_{i+1,j}^{2,kl}\ . \tag{53}$$

Этап 3: Находим тензора (36), предварительно рассчитав $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$. Для более удобного преобразования тензора в разностном виде проведем процедуру тензорного произведения. Например тензор $\mathfrak{A}_0$ примет вид

$$\mathfrak{A}_0(y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\ , \tag{54}$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial W_{0,1}^{11}}{\partial x_1}\ , \quad a_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial W_{0,1}^{21}}{\partial x_1}\right)\ , \quad a_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{11}}{\partial x_1}\right)\ ,$$

$$a_{14} = a_{23} = a_{32} = a_{41} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial W_{0,1}^{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial W_{0,2}^{21}}{\partial x_1}\right)\ ,$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,1}^{21}}{\partial x_1}\right)\ , \quad a_{22} = \frac{\partial W_{0,1}^{22}}{\partial x_1}\ , \quad a_{24} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{22}}{\partial x_1}\right)\ ,$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{11}}{\partial x_1}\right)\ , \quad a_{33} = \frac{\partial W_{0,2}^{22}}{\partial x_2}\ , \quad a_{34} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,2}^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{21}}{\partial x_2}\right)\ ,$$

$$a_{42} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,1}^{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{22}}{\partial x_1}\right)\ , \quad a_{43} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{0,2}^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial W_{0,2}^{21}}{\partial x_2}\right)\ , \quad a_{44} = \frac{\partial W_{0,2}^{22}}{\partial x_2}\ .$$

Следует отметить, что расчет по приведенной явной схеме может выполняться только на основе следующего двухступенчатого обхода: сначала рассчитываются внутренние узлы, а затем узлы, лежащие на границах. Дискретную модель, построенную на основе одной из вышеприведенных схем, можно рассматривать как конечномерный аналог исходной математической задачи. При этом решение для дискретной задачи будет отличаться от решения исходной задачи. Разность между двумя решениями есть погрешность разностного (численного) решения. Главная часть данной погрешности для вышеприведенных схем есть величина со вторым порядком точности относительно шагов по времени и координатам.

Литература

1. Muskat M. Two-fluid system in porous media. The encroachment of water into an oil sand // Physics. – 1934. – 5. – P.250-264.
2. Fahuai Yu. Global classical solution of Muskat free boundary problem // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – 288. – P.442–461.
3. Radkevich E. On the spectrum of the pencil in the Verigin-Muskat problem // Sbornik: Mathematics. – 1995. – 80;1. – P.33-74.
4. Siegel M., Caflish R.E., Howison S. Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem // Common Pure and Appl. Math. – 2004. – LVII. – P.1-38.
5. Meirmanov A. The Muskat problem for a viscoelastic filtration // Interfaces and Free Boundaries. – 2011. – 13. – P.463–484.
6. Гальцев О. В., Мейрманов А. М. Численное усреднение в задаче Рэлея-Тейлора при фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей // Математическое моделирование. – 2011. – 23. – P.33 — 43.
7. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.
8. Nguetseng G. Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21. – P.1394-1414.
9. Владимирова Н.Н., Кузнецова Б.Г., Яненко Н.Н. Численные рассчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск. – 1996. – P.186-192.

NUMERICAL SOLUTION OF AVERAGED MODEL FOR THE JOIN MOTION OF LIQUIDS WITH DIFFERENT DENSITIES IN POROUS MEDIA

O.V. Galtsev

Belgord State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308015, Russia, email: oleggaltsev@yandex.ru

Abstract. The free boundary problem describing the joint filtration of two immiscible incompressible liquids on macroscopic level is studied. Basic equations of mathematical model at microscopic level represent stationary system of Stokes' equations for inhomogeneous incompressible viscous liquid in pores and stationary Lame's system of equations for incompressible elastic solid skeleton. The are supplemented by boundary conditions of continuity of displacements and normal stresses on the common border «solid skeleton-liquid in pores» and transport equations for unknown liquid density. It is built the macroscopic mathematical model of joint motion of fluid and elastic solid skeleton by the method of two-scale expansion. Numerical approximation of the averaged model for the special structure of the pore space is discussed.

Key words: Musket problem, the Rayleigh-Taylor instability, Stokes and Lamé's equations.

УДК 537.523

К РАСЧЕТУ ТРАЕКТОРИЙ ПЛАЗМЕННЫХ СТРУЙ В ДВУХСТРУЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГЕ

Э.Б. Кулумбаев, Т.Б. Никуличева

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308015, Россия,
e-mail: kulumbaev@bsu.edu.ru, nikulicheva@bsu.edu.ru

Аннотация. Модель взаимодействия токоведущих плазменных струй в двухструйной электрической дуге обобщена в связи с учетом изменения потока импульса струй. Это позволяет улучшить согласование расчетной конфигурации струй с опытными данными. Представлены результаты расчета траекторий трехмерных и плоскопараллельных плазменных струй в зависимости от расстояния и угла между соплами в двухструйном плазмотроне. Получено, что роль электромагнитного отталкивания по сравнению с газодинамическим соударением в самосогласованном формировании траектории струй возрастает с увеличением начального расстояния или угла между струями. Проведено сопоставление траекторий струй с результатами счета на основе самосогласованной магнитогазодинамической модели в плоскопараллельном приближении.

Ключевые слова: математическое моделирование, МГД уравнения, электрическая дуга.

Введение

При математическом моделировании электродуговых потоков широко используются магнитогазодинамические (**МГД**) модели [1], основанные на представлениях механики, термодинамики и электродинамики сплошной среды, которые формализованы в виде самосогласованной системы МГД уравнений. Для двухструйной электрической дуги [2] в [3–4] проведен численный анализ МГД уравнений в плоскопараллельном приближении равновесной плазмы. Как и в экспериментах [2], численно получено, что при фиксированном взаимном положении сопел, структура двухструйной электрической дуги сильно зависит от расхода газа и силы тока, величины которых определяют соотношение между эффектами газодинамического соударения и электромагнитного отталкивания струй. Однако не менее интересным остается построение более простых моделей, качественно описывающих взаимодействие токоведущих плазменных струй. Так, роль электромагнитного отталкивания в формировании траектории струй продемонстрирована еще в [2], где система двумерных МГД уравнений в частных производных на основе упрощающих модельных допущений сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих рассчитать траектории двух токонезависимых плазменных струй без учета перетекания тока между ними. Сопоставление в [2] расчетных и экспериментально измеренных траекторий показало их удовлетворительное согласование. С целью улучшить соответствие расчета и эксперимента в [5] дополнительно учитывается сила Архимеда, влияние которой заметно в ограниченном диапазоне значений

расхода газа и силы тока. Более детальный анализ развитого в [2] подхода к расчету траекторий струй в двухструйной электрической дуге показывает возможность отказа от сильного упрощающего допущения о постоянстве скорости (потока импульса) струй.

Поэтому цель данной работы: обобщить модель [2] взаимодействия токоведущих плазменных струй в двухструйной электрической дуге посредством учета изменения потока импульса струй и провести анализ влияния расстояния и угла между соплами в двухструйном плазмотроне на траектории струй.

1. Модель

При математическом описании взаимодействия струй, как и в [2], нами полагается, что плотность тока $\vec{j}$ в струе определяется как

$$\vec{j} = \frac{I}{S_0}\frac{\vec{v}}{v}\ , \tag{1}$$

где I – сила тока; $\vec{v}$ – вектор скорости струи; S_0 – нормальное к вектору скорости сечение струи.

В отличие от [2] поток импульса струи с плотностью ρ

$$\vec{K} = \frac{\vec{v}}{v}\int_S \rho v^2 dS \approx \rho v^2 S_0 \frac{\vec{v}}{v} \tag{2}$$

считается не постоянным, а изменяющимся вдоль струи за счет действия направленной против скорости струи диссипативной силы с объемной плотностью:

$$\vec{f_d} = -\rho\gamma v^n \frac{\vec{v}}{v}\ , \tag{3}$$

где коэффициент пропорциональности γ и показатель степени n заданы. Природа диссипативной силы может быть обусловлена трением струи о неподвижную атмосферу, в которую вытекает струя.

Движение плазмы вдоль струй, поперечные размеры которых существенно меньше расстояния между ними, описывается на основе двумерных МГД уравнений [1], в которых пренебрегается градиентом давления, а электромагнитная $\vec{j}\times\vec{B}$ и диссипативная $\vec{f_d}$ силы учитываются в приближениях (1) и (3) соответственно. Для струи в плоскости (x, z) катодного и анодного сопел (рис. 1) уравнения движения тогда имеют вид:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{I}{S}\frac{v_z B}{\rho v} - \gamma v^{n-1} v_x\ , \tag{4}$$

$$v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = +\frac{I}{S}\frac{v_x B}{\rho v} - \gamma v^{n-1} v_z\ , \tag{5}$$

где B — нормальная к плоскости (x, z) индукция магнитного поля, создаваемого второй струей; $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ — модуль скорости.

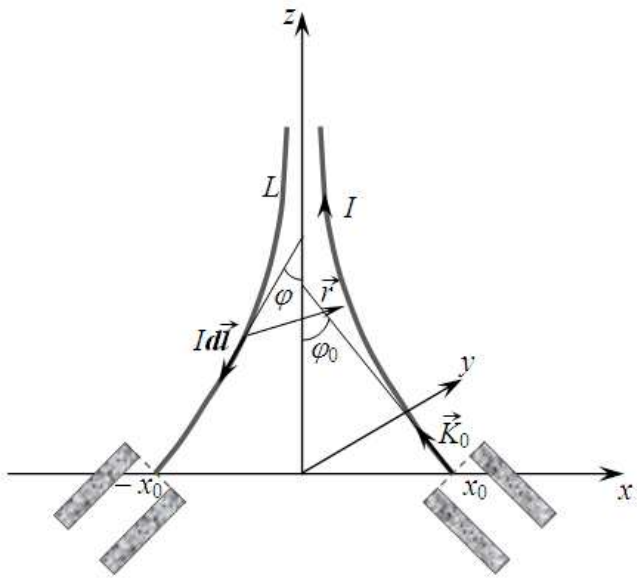


Рис. 1. Схема двухструйной электрической дуги.

В системе (4 – 5) последнее уравнение заменяется суммой уравнений, предварительно умноженных на v_x и v_z соответственно:

$$v_x \frac{\partial v^2}{\partial x} + v_z \frac{\partial v^2}{\partial z} = -2\gamma v^{n+1}. \tag{6}$$

После подстановки $v_x = v \sin\varphi$, $v_z = v\cos\varphi$, где φ -– угол между вектором скорости и положительным направлением вертикальной оси z (рис. 1), уравнения (4, 6) запишутся в виде:

$$\sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{IB}{\rho v^2 S}\ ,$$

$$\sin\varphi \frac{\partial v^2}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial v^2}{\partial z} = -2\gamma v^n.$$

Структура этих уравнений с учетом (2) определяет наиболее удобный выбор в зависимости (3) показателя степени равным $n = 2$. Это позволяет в качестве внешних параметров модели ограничиться только двумя интегральными характеристиками струй -– силой тока I и потоком импульса $\vec{K}$ струи в выходном сечении электродного сопла:

$$\sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{IB}{K}\ ,$$

$$\sin\varphi \frac{\partial K}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial K}{\partial z} = -2\gamma K.$$

С учетом геометрического соотношения $dx/dz = \operatorname{tg}\varphi$ и имеющего здесь место операторного тождества $\partial/\partial z = \operatorname{tg}\varphi\partial/\partial x$ последние уравнения преобразуются к виду:

$$\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{IB}{2K}\ ,$$

$$\sin\varphi\frac{\partial K}{\partial x} = -\gamma K.$$

Выбирая φ в качестве независимой переменной, окончательно получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения траектории одной струи в магнитном поле другой:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{2K}{IB}\sin\varphi\,, \tag{7}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{2K}{IB}\cos\varphi\,, \tag{8}$$

$$\frac{dK}{d\varphi} = +\frac{2\gamma}{IB}K^2\,. \tag{9}$$

При $\gamma = 0$ из (9) следует, что $K = \mathrm{const}$, а оставшиеся уравнения с неизменным вдоль струи потоком импульса совпадают с соответствующими уравнениями модели [2].

Индукция магнитного поля, создаваемого второй струей, определяется согласно закону Био–Савара:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}\ , \tag{10}$$

где L — траектория струи, вдоль которой проводится интегрирование; $I\vec{dl}$ — линейный элемент тока струи; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки определения поля $\vec{B}$ относительно элемента тока (рис. 1); μ_0 — магнитная постоянная.

Система уравнений (7 – 10) дополняется начальными условиями, задающими вектор потока импульса струи в выходном сечении электродного сопла:

$$\varphi = \varphi_0: \qquad x = x_0; \qquad z = 0; \qquad K = K_0\,, \tag{11}$$

где $2\varphi_0$ -– начальный угол между осями струй; $2x_0$ — расстояние между центрами катодного и анодного сопел; K_0 — модуль потока импульса в выходном сечении электродного сопла (рис. 1).

Система уравнений (7 – 10) с начальными условиями (11) решается численно. Поскольку траектория L второй струи в (10) является зеркально симметричной относительно $x = 0$ искомой траектории первой струи, то используется итерационная процедура. На первой итерации задается магнитное поле бесконечного прямолинейного тока вдоль оси z, на последующих — поле (10), соответствующее рассчитанной траектории

струи. На каждой итерации система обыкновенных дифференциальных уравнений (7 – 9) решается методом Рунге–Кутта с заданной точностью. Верхний предел интегрирования в (10) выбирается соответствующим значению $\varphi = 0$, где струя считается обесточенной. Итерации повторяются до установления траектории струи с относительной погрешностью 10^{-3}.

2. Результаты расчета

Проводится расчет траекторий струй для фиксированных величин силы тока $I = 105$ А и суммарного, в обеих струях, расхода газа $G = 0.12$ г/с. Соответствующее им значение потока импульса $K_0 = 4.7$ мН струй заимствуется из [2], где оно определяется по измеренному распределению температуры и скорости плазмы вблизи среза сопла плазмотрона. Начальные расстояние $2x_0$ и угол $2\varphi_0$ между струями варьируются. Интегрирование по независимой переменной φ ведется от φ_0 до 0.

Выбор значения свободного параметра $\gamma = 50$ м$^{-1}$ модели осуществляется a posteriori -– путем подбора для согласования расчетной траектории струй с экспериментально измеренным в [2] полем температуры. Рассчитанные траектории струй с учетом изменения потока импульса представлены на рис. 2. Для сравнения там же приведены траектории струй, рассчитанные в [2] при $\gamma = 0$.

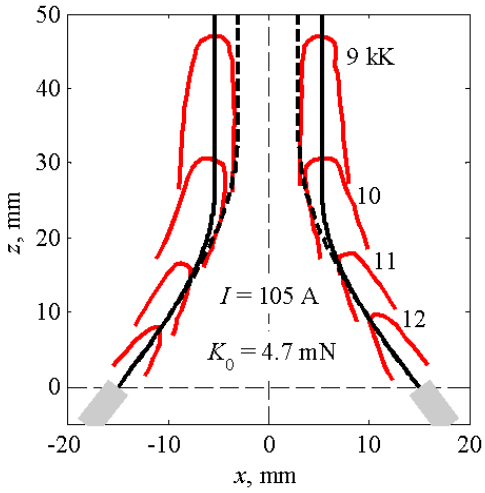


Рис. 2. Траектории плазменных струй с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные) изменения потока импульса и экспериментальное поле температуры в двухструйном плазмотроне [2].

Влияние начального расстояния между струями. Результаты расчета траекторий струй в зависимости от начального расстояния $2x_0$ между ними приведены на рис. 3.

Видно, что в приближении $K = K_0(\gamma = 0)$ траектория струи, ее безразмерная кривизна kx_0 и совпадающее с ней нормальное ускорение $(K/K_0)kx_0$ вообще не зависят

от x_0. При учете уменьшения плотности потока импульса ($\gamma \neq 0$) с ростом расстояния между соплами безразмерная длина струй уменьшается, кривизна kx_0 увеличивается, а нормальное ускорение $(K/K_0)kx_0$ наоборот уменьшается.

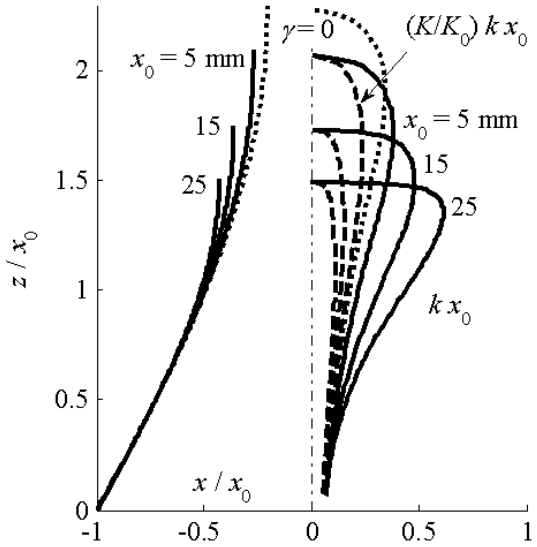


Рис. 3. Траектории плазменных струй (слева), безразмерные кривизна kx_0 и нормальное ускорение $(K/K_0)kx_0$ (сплошные и пунктирные линии справа соответственно) в зависимости от начального расстояния $2x_0$ между струями при $I = 105$ А, $K_0 = 4.7$ мН, $\varphi_0 = 30°$, $\gamma = 50$ м$^{-1}$ (точечные линии -– расчет при $\gamma = 0$).

Для объяснения этих нетривиальных результатов преобразуем уравнения системы (7 – 9) с учетом (10) к безразмерному виду:

$$\frac{d(x/x_0)}{d\varphi} = -\frac{2K_0}{\mu_0 I^2}\frac{K/K_0}{B/(\mu_0 I/x_0)}\sin\varphi\,,$$

$$\frac{d(z/x_0)}{d\varphi} = -\frac{2K_0}{\mu_0 I^2}\frac{K/K_0}{B/(\mu_0 I/x_0)}\cos\varphi\,,$$

$$\frac{d(K/K_0)}{d\varphi} = +\frac{2\gamma x_0 K_0}{\mu_0 I^2}\frac{K/K_0}{B/(\mu_0 I/x_0)}\,.$$

Видно, что в первых двух уравнениях критерий подобия $2K_0/\mu_0 I^2$ не содержит x_0. Поэтому в приближении $K = K_0(\gamma = 0)$ при фиксированных значениях плотности потока импульса K_0 и силы тока I траектория струи в системе координат, нормированных на x_0, оказывается независящей от x_0. Физически это обусловлено инвариантностью комплекса Bx_0 относительно x_0, имеющей место из-за компенсации увеличения и уменьшения магнитного поля, связанных с ростом длин токовых струй и увеличением расстояния между ними соответственно (рост длины токовой струи с увеличением x_0

на рис. 3 визуально завуалирован: размерные длины струй оказываются равными $L =$ 13; 38 и 62 мм при $\gamma = 0$ и $L = 11$; 28 и 41 мм при $\gamma = 50$ м$^{-1}$ для $x_0 = 5$; 15 и 25 мм соответственно). Тогда при уменьшении потока импульса ($\gamma \neq 0$), скорость которого пропорциональна x_0, роль электромагнитного отталкивания в самосогласованном формировании траектории струй возрастает при увеличении x_0.

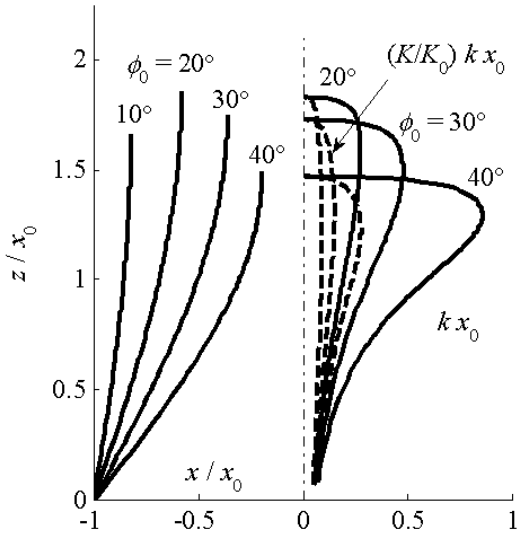


Рис. 4. Траектории плазменных струй (слева), безразмерные кривизна kx_0 и нормальное ускорение $(K/K_0)kx_0$ (сплошные и пунктирные линии справа соответственно) в зависимости от начального угла $2\varphi_0$ между струями при $I = 105$ А, $K_0 = 4.7$ мН, $x_0 = 15$ мм, $\gamma = 50$ м$^{-1}$.

Влияние начального угла между струями. Изменение траекторий струй в зависимости от начального угла $2\varphi_0$ между ними показано на рис. 4.

Видно, что зависимость безразмерной, а, следовательно, при фиксированном x_0 и размерной длины струи от φ_0 слабо немонотонная с максимумом при $\varphi_0 \approx 25°$. В то же время безразмерные кривизна kx_0 и нормальное ускорение $(K/K_0)kx_0$ монотонно возрастают с увеличением φ_0. Это обусловлено тем, что в рассматриваемой модели при любом φ_0 из открытого интервала $(0, 90°)$, даже сколь угодно близком к $90°$, электромагнитная сила всегда обеспечит поворот траекторий сближающихся к оси $x = 0$ струй. Однако в предельном случае встречных струй ($\varphi_0 = 90°$), образующих «прямую» дугу тока, кривизна равна нулю из-за отсутствия при такой ориентации электромагнитного взаимодействия струй. Здесь модель становится заведомо неприменимой, т.к. не учитывает влияния градиента газостатического давления, обеспечивающего торможение и отражение струй. Поэтому следует ожидать, что роль электромагнитного отталкивания в зависимости от начального угла между струями будет немонотонной.

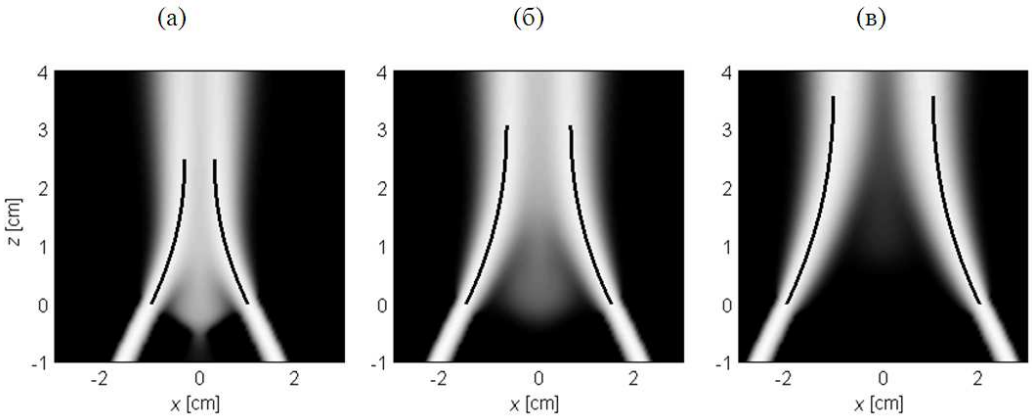


Рис. 5. Конфигурация и траектории плазменных плоскопараллельных струй в зависимости от начального расстояния $2x_0 = 2$ (*а*); 3 (*б*); 4 (*в*) см между ними при $I_l = 4$ А/мм, $K_{0l} = 0.12$ Н/м, $2\varphi_0 = 60°$; $\gamma = 0$.

Влияние пространственной размерности струй. Траектории плоскопараллельных плазменных струй – линии сечений плоскостью (x, z) искривленных токовых поверхностей, определяются системой уравнений (7 – 9), в которой величины силы тока I и потока импульса K_0 заменяются их погонными значениями I_l и K_{0l}, а индукция B магнитного поля, создаваемого плоскопараллельным поверхностным током, вычисляется по формуле Био–Савара (10), проинтегрированной вдоль оси y (рис. 1) по системе линейных токов $I_l dy$ — токовых полосок шириной dy, составляющих искривленную токовую поверхность:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_l}{2\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \ . \tag{12}$$

Видно, что комплекс Bx_0 не инвариантен относительно x_0, т.к. интеграл в (12) безразмерен (размерность длины уже «сидит» в погонном токе I_l). Поэтому траектория плоскопараллельной струи в системе нормированных на x_0 координат зависит от x_0, в отличие от трехмерной струи. Поскольку увеличение магнитного поля за счет роста длин плоскопараллельных струй превалирует над уменьшением B из-за увеличения расстояния между струями, то роль электромагнитного отталкивания в самосогласованном формировании траектории плоскопараллельных струй возрастает даже при $\gamma = 0$. Изменение траекторий плоскопараллельных струй в зависимости от начального угла $2\varphi_0$ между ними аналогично выше рассмотренному для трехмерных струй.

Приемлемость рассмотренного подхода для качественного анализа взаимодействия струй в двухструйной электрической дуге подтверждается сопоставлением рассчитанных траекторий струй с результатами счета [3 – 4] на основе самосогласованной двумерной МГД модели в плоскопараллельном приближении. Видно (рис. 5), что соответствие между результатами предложенной нами моделью и численным расчетом в

рамках МГД модели в зависимости конфигурации плазменных струй от начального расстояния между ними вполне удовлетворительное.

3. Выводы

1. Сформулирована модель взаимодействия токоведущих плазменных струй в двухструйной электрической дуге, учитывающая электромагнитное взаимодействие и изменение потока импульса струй вследствие трения с окружающей средой. Учет уменьшения потока импульса позволяет улучшить согласование расчетных траекторий струй с опытными данными.

2. Установлено возрастание роли электромагнитного отталкивания в самосогласованном формировании траектории трехмерных и плоскопараллельных струй при увеличении начального расстояния или угла между струями.

3. Показано соответствие рассчитанных траекторий струй с результатами счета на основе самосогласованной МГД модели в плоскопараллельном приближении.

Литература

1. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др. Теория столба электрической дуги / Низкотемпературная плазма. Т.1. / Новосибирск: Наука СО, 1990. – 376 с.
2. Жеенбаев Ж., Энгельшт В.С. Двухструйный плазмотрон / Фрунзе: Ин-т физики и математики АН Кирг. ССР, 1983. – 199 с.
3. Кулумбаев Э.Б., Никуличева Т.Б. Взаимодействие плазменных струй в двухструйной электрической дуге // ТВТ. – 2012. – 50; 4. – С.483-490.
4. Кулумбаев Э.Б., Никуличева Т.Б. Влияние расхода газа и силы тока на конфигурацию плазменных струй в двухструйной электрической дуге // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). – Вып.27. – С.
5. Кулумбаев Э.Б. Взаимодействие плазменных токоведущих струй / Источники и ускорители плазмы. -– Харьков: ХАИ, 1986. -– 4 с.

TRAJECTORIES CALCULATION OF PLASMA JET IN TWO-JET ELECTRIC ARC

E.B. Kulumbaev, T.B. Nikulicheva

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod 308015, Russia,
e-mail: kulumbaev@bsu.edu.ru, nikulicheva@bsu.edu.ru

Abstract. The interaction model of current plasma jets in two-jet electric arc is generalized in order to account of flux momentum change in jets. It improves the coordination of design configuration of jets with experimental data. It is performed some calculation results of trajectories in cases when plasma jets may be represent as three-dimensional or plane ones. They depend on the distance between nozzles in the two-jet plasmatron and on the angle between them. It is found that the role of electromagnetic repulsion in comparison with gas-dynamic collision at self-consistent formation of jets trajectory is increased when the initial distance or angle between jets grow. Comparison of jets trajectories with results of calculation based on the self-consistent magnetogasdynamic model at the plane-parallel approximation is done.

Key words: mathematical modelling, MHD equations, electric arc.

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

ПОВТОРНОЕ УСРЕДНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ЖИДКОСТЕЙ [14)]

А.М. Мейрманов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: meirmanov@bsu.edu.ru

Аннотация. В настоящей работе с помощью теории усреднения выводятся модели с двойной пористостью для фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах. На микроскопическом уровне динамика жидкости описывается системой стационарных уравнений Стокса для несжимаемой жидкости. При этом считается, что область занятая жидкостью есть объединение двух независимых систем трещин и пор. Предполагается, что характерная безразмерная длина ε пор зависит от характерной безразмерной длины δ трещин $\varepsilon = \delta^r$ с $r > 1$. Движение несжимаемого упругого скелета грунта описывается стационарными уравнениями Ламе. В предположении, что совместное движение упругого скелета и жидкости в порах уже является усредненным (первое усреднение) мы выполняем повторное (второе) усреднение для жидкости в трещинах и смеси твердой компоненты и жидкости в порах при $\delta \to 0$. В результате мы получим модифицированную систему пороупругости Терцаги-Био для скорости и плотности жидкости в трещинах. Для абсолютно твердого скелета грунта мы получим обычные уравнения фильтрации Дарси для жидкости в трещинах, в то время как жидкость в порах будет неподвижной.

Ключевые слова: фильтрация жидкостей, повторное усреднение, уравнения Дарси, Био, Ламе и Стокса.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается совместное движение упругого тела и жидкости, заполняющей поры и трещины этого тела. Имеется большое число различных математических моделей, описывающих этот процесс. Они как-то учитывают геометрию области, занятой жидкостью и физические свойства жидкой и твердой компонент. Среди всевозможных моделей наиболее простой является модель фильтрации Дарси

$$\boldsymbol{v} = \frac{k}{\mu}(-\nabla q + \boldsymbol{F}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,, \tag{1}$$

для макроскопической скорости $\boldsymbol{v}$ и давления q жидкости при условии что твердый скелет является абсолютно твердым и областью движения жидкости является поровое пространство. В (1) k – заданная проницаемость среды, μ – вязкость жидкости и $\boldsymbol{F}$ – заданный вектор плотности массовых сил.

Для более сложной геометрии, когда область занятая жидкостью есть объединение системы пор и трещин существуют также различные феноменологические модели (см., например, [3], [10], [15], [16], [18], [20]). Заметим, что поры отличаются от трещин своим

[14]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт №02.740.11.0613)

характеристическим размером. Если l_p – характеристический размер пор и l_c – характеристический размер трещин, то $l_p \ll l_c$. Широко известная модель Г.И. Баренблатта, И.Н. Кочиной и Ю.П. Желтова [3] описывает двухскоростную сплошную среду, в которой макроскопические скорость $\boldsymbol{v}_p$ и давление q_p в порах, а также макроскопические скорость $\boldsymbol{v}_c$ и давление q_c в трещинах удовлетворяют двум различным законам Дарси

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{k_p}{\mu}(-\nabla q_p + \boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{v}_c = \frac{k_c}{\mu}(-\nabla q_c + \boldsymbol{F}), \tag{2}$$

и двум уравнениям неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_p = J, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}_c = -J. \tag{3}$$

Математическая модель замыкается постулатом, что поток J из пор в трещины линейно зависит от разности $(q_c - q_p)$:

$$J = \beta(q_c - q_p), \quad \beta = \text{const}.$$

Научная и практическая ценность математических моделей,описывающих такие сложные процессы, очевидна. Но не менее важным является их физическая достоверность. В настоящей публикации нас будут интересовать только основные модели механики сплошных сред (как, например, уравнения Стокса, описывающие медленные движения вязкой жидкости, или уравнения Ламэ, описывающие перемещения упругого твердого тела) а также модели асимптотически близкие к какой-либо основной модели механики сплошных сред. Что касается феноменологических моделей, не связанных напрямую с основными моделями механики сплошных сред, то мы можем доверять им и использовать в практических приложениях, а можем не доверять им и искать модели, удовлетворяющие нашим критериям. Но, как правило, у нас нет выбора и приходится использовать те модели, которые имеются в нашем распоряжении в данный момент. Так, например, было с законом Дарси. До 1980 года это была почти единственно возможная феноменологическая модель теории фильтрации. В 1980 г. Л.Тартар (см. Аппендикс в [17]) строго доказал, что закон Дарси асимптотически близок к системе уравнений Стокса слабосжимаемой жидкости в порах абсолютно твердого тела. Для более сложной геометрии, когда область занятая жидкостью есть объединение системы пор и трещин, некоторые попытки вывести соответствующие модели (будем называть такие модели *моделями фильтрации с двойной пористостью*, а соответствующую геометрию – *геометрией с двойной порисистостью*) были предприняты T. Arbogast с соавторами [2], A. Bourgeat с соавторами [7] и Z. Chen [9]. Поскольку две последние работы в идейном плане повторяют первую, кратко обсудим главные идеи в [2].

В качестве исходной модели на микроскопическом уровне авторы рассмотрели периодическую структуру, состоящую из «твердых» блоков размера δ, окруженными жидкостью. При этом «твердая» компонента предполагается уже усредненной, то есть вместо пористого твердого скелета грунта и жидкости в порах рассматривается смесь «жидкое-твердое», описываемая обычной системой уравнений фильтрации Дарси. Это и есть метод *повторного усреднения*, когда в качестве первого усреднения (при $\varepsilon \to 0$) рассматривается усреднение твердого скелета и жидкости в порах, а в качестве повторного

(при $\delta \to 0$) – усреднение полученной смеси и жидкости в трещинах. В качестве уравнений, описывающих динамику жидкости в трещинах, авторы предлагают некоторую искусственную систему уравнений, похожую на систему уравнений фильтрации Дарси. Очевидно, что такая система не имеет никакого разумного физического обоснования, но с математической точки зрения выбор такой системы вполне объясним. Невозможно подобрать разумные условия сопряжения (краевые условия) на общей границе «твердые» блоки – жидкость в трещинах, если динамика жидкости описывается уравнениями Стокса. Таким образом итоговые усредненные модели в [2], [7] и в [9] не имеют никакой связи с основными моделями механики сплошной среды.

Несмотря на это, сама идея метода повторного усреднения для подобных задач не лишена смысла. Просто авторы использовали не те модели как для описания движения смеси «твердый скелет - жидкость в порах», так и для описания движения жидкости в трещинах.

Цель настоящей работы – вывод некоторых математических моделей с двойной пористостью, асимптотически близких основным моделям механики сплошных сред, с помощью именно идеи повторного усреднения. В принципе есть очень естественный метод (см. [12]), использующий понятие трехмасштабной сходимости, предложенный в [1]. К сожалению он очень сложен технически, в то время как предлагаемый метод в вычислительном отношении достаточно простой. Как мы уже отмечали, надо только правильно выбрать соответствующие математические модели на каждом из этапов усреднения. Для этого мы будем следовать методу, предложенному в [8] (см. также [17]). В основе метода лежит выбор математической модели на микроскопическом уровне, асимптотически близкой к основным моделям механики сплошной среды, с последующим строгим усреднением выбранной модели.

Поясним этот метод на примере фильтрации жидкости в среде с простой геометрией, когда область занятая жидкостью есть только поровое пространство. В качестве основной математической модели выберем систему, описывающую динамику жидкости уравнениями Стокса

$$\rho_f \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} = \nabla \cdot \big(2\,\mu\,\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}_f)\big) - \nabla\, q_f + \rho_f \rho_0 \boldsymbol{F},$$

$$\tilde{c}_f^{\,2}\, \frac{\partial q_f}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot\, \boldsymbol{v}_f = 0$$

для скорости $\boldsymbol{v}_f = \partial \boldsymbol{w}_f / \partial t$ и давления q_f жидкости, а динамика упругого скелета – уравнениями Ламе

$$\rho_s \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \big(2\,\lambda\,\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s)\big) - \nabla\, q_s + \rho_s \rho_0 \boldsymbol{F},$$

$$\tilde{c}_s^{\,2}\, \frac{\partial q_s}{\partial t} + \rho_s \nabla \cdot\, \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} = 0$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ и давления q_f твердой компоненты.

Дифференциальные уравнения в твердом скелете и в жидкости дополняются краевыми условиями на общей границе «поровое пространство - твердый скелет», выражающими непрерывность перемещений и нормальных напряжений, и соответствующими краевыми и начальными условиями на внешней границе и в начальный момент времени.

После перехода к безразмерным переменным в задаче появляется естественный малый параметр ε, равный отношению характерного размера пор l_p к характерному размеру L физической области: $\varepsilon = l_p/L$.

Пусть Ω_f^ε есть область, занятая жидкостью, Ω_s^ε – твердый скелет, и

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_f,\ q = q_f,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon,\ \text{ и }\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_s,\ q = q_s,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s^\varepsilon$$

есть вектор перемещений и давление сплошной среды. Для периодической структуры простой геометрии (только поры) движение сплошной описывается системой уравнений

$$\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\chi_p^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + (1-\chi_p^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - q\mathbb{I} \right) + \rho^\varepsilon \boldsymbol{F}, \tag{4}$$

$$q + \alpha_q^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения понимаются в смысле теории распределений (т.е. как соответствующие интегральные тождества) и содержат как собственно дифференциальные уравнения в каждой из областей Ω_f^ε и Ω_s^ε, так и краевые условия на общей границе «поровое пространство - твердый скелет».

В (4), (5) $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})$ – симметрическая часть производной $\nabla \boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичный тензор, $\chi_p^\varepsilon = \chi_p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ – характеристическая функция порового пространства, $\chi_p(\boldsymbol{y})$ – характеристическая функция «жидкой» части Y_f единичного куба Y,

$$\rho^\varepsilon = \rho_f \chi_p^\varepsilon + \rho_s(1-\chi_p^\varepsilon), \quad \alpha_q^\varepsilon = \alpha_{q,f}\chi_p^\varepsilon + \alpha_{q,s}(1-\chi_p^\varepsilon),$$

$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}\ , \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0}\ , \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g \rho_0}\ ,$$

$$\alpha_{q,f} = \rho_f \frac{\tilde{c}_f^2}{L\,g}\ , \quad \alpha_{q,s} = \rho_s \frac{\tilde{c}_s^2}{L\,g}\ ,$$

τ – характерное время данного физического процесса, ρ_f и ρ_s – средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета соответственно, соотнесенные к плотности воды ρ_0, $\tilde{c}_f$ – скорость звука в жидкости, $\tilde{c}_s$ – скорость звука в твердом скелете, g – ускорение силы тяжести, μ – вязкость жидкости, и λ – упругая постоянная Ламе.

Теоретически система (4), (5) с соответствующими краевыми и начальными условиями является одной из наиболее адекватных математических моделей, описывающих совместное движение упругого скелета грунта и жидкости в порах. Но эта модель не имеет никакой практической ценности, поскольку приходится решать задачу в физической области размером в несколько сотен метров, в то время как коэффициенты уравнений осциллируют на масштабе в несколько микрон. Очевидно, что практическая ценность модели появится только после ее усреднения. То есть мы должны разрешить

безразмерным критериям α_τ, α_μ и α_λ быть переменными величинами, зависящими от малого параметра ε, и найти все предельные режимы (4), (5) при $\varepsilon \to 0$.

Подробный анализ всех возможных усредненных моделей был проделан в [11]. Чтобы объяснить нашу идею, перечислим некоторые из этих результатов. Прежде всего заметим, что процессов фильтрации характерное время τ составляет несколько месяцев. Поэтому для фильтрации $\alpha_\tau \sim 0$ и поэтому можно пренебречь инерционным слагаемым в (4). Наоборот, для акустики характерное время τ процесса не превышает нескольких десятков секунд $\alpha_\tau \sim 1$. Следовательно, мы можем ввести новый масштаб, полагая $\alpha_\tau \boldsymbol{w} \to \boldsymbol{w}$, для которого $\alpha_\tau = 1$.

Для несжимаемых сред $\alpha_q^\varepsilon \sim \infty$ и, вместо (5), мы получим хорошо известное условие несжимаемости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \tag{6}$$

Наконец, абсолютно твердое тело характеризуется условием $\alpha_\lambda \sim \infty$.

Для простоты изложения рассмотрим только фильтрацию несжимаемой жидкости в несжимаемом упругом скелете, описываемую уравнением (4) с $\alpha_\tau = 0$ и уравнением (6). Усреднение этой системы с фиксированными $\alpha_\mu = \mu_0$ и $\alpha_\lambda = \lambda_0$ приводит к тому же самому уравнению неразрывности (6) и уравнению

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\mathbb{P}} = -q\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau\,. \tag{8}$$

В (7), (8) $\hat{\rho} = m_p\rho_f + (1-m_p)\rho_s$, m_p – пористость порового пространства, а заданные тензоры четвертого ранга $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3(t)$ зависят только от μ_0, λ_0 и геометрии элементарной ячейки Y_f. Усредненную модель (6)– (8) будем называть системой уравнений *вязкоупругой фильтрации*.

Заметим, что для почти всех процессов фильтрации $\alpha_\mu \sim 0$. Таким образом можно представить этот критерий как

$$\alpha_\mu = \mu_1\varepsilon^2\,, \quad \mu_1 = \mu_0 \cdot \frac{L^2}{l_p^2} = \frac{2\mu}{\tau L g \rho_0} \cdot \frac{L^2}{l_p^2}\,, \tag{9}$$

зафиксировать μ_1 и позволить величине ε быть переменной ($\alpha_\mu = \mu_0$ для $\varepsilon = l_p/L$). Для такого переменного критерия α_μ, данного (9), имеем следующую усредненную систему при $\varepsilon \to 0$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} + (1-m_p)\,\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \left(\lambda_0\,\mathfrak{A}_1^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - \frac{1}{m_p}\,q_p\,\mathbb{I}\right) + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v} = m_p\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}^{(p)} \cdot \left(-\frac{1}{m_p}\nabla q_p + \rho_f\boldsymbol{F}\right), \tag{12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{v} + (1 - m_p)\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\ . \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{w}$ – перемещение полученной смеси, $\boldsymbol{v}$ – скорость жидкой компоненты, q_p – давление жидкости в порах и $\boldsymbol{w}_s$ – перемещение твердой компоненты. Симметричный строго положительно определенный тензор четвертого ранга $\mathfrak{A}_1^{(f)}$ и симметричная строго положительно определенная матрица $\mathbb{B}^{(p)}$ зависят только от геометрии элементарной ячейки Y_f и не зависят от μ_1 и λ_0. Будем называть систему (10)-(13) системой уравнений *пороупругости Био-Терцаги* (Ref. [5], Ref. [19]).

Для достаточно больших μ_1 ($\mu_1 \sim \infty$) можно пренебречь вторым слагаемым в (12), что совместно с (13) приводит к равенствам

$$\boldsymbol{v} = m_p\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\ , \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_s\,.$$

Последние соотношения приводят к (6) и усредненному закону сохранения количества движения

$$\nabla\cdot\,\hat{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad \hat{\mathbb{P}} = \lambda_0\,\mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - \frac{1}{m_p}\,q_p\,\mathbb{I} \tag{14}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ твердой компоненты и давления q_p жидкости в порах с симметричным строго положительно определенным тензором четвертого ранга $\mathfrak{A}_0^{(f)}$. Мы выбрали именно этот тензор поскольку $\mathfrak{A}_1^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) = \mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s)$ для $\nabla\cdot\,\boldsymbol{w}_s = 0$, но последний тензор имеет более простую структуру. Будем называть полученные уравнения (6), (14) системой уравнений *упругой фильтрации*.

Для абсолютно твердого скелета $\lambda_0 \to \infty$ и система (10)-(13) преобразуется в обычную систему уравнений фильтрации Дарси

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}^{(p)}\cdot\Big(-\frac{1}{m_p}\nabla\,q_p + \rho_f\boldsymbol{F}\Big), \quad \nabla\cdot\,\boldsymbol{v} = 0\,. \tag{15}$$

Все эти различные системы (система уравнений фильтрации Дарси, система уравнений пороупругости Био-Терцаги, система уравнений упругой фильтрации, и система уравнений вязкоупругой фильтрации) являются аппроксимациями одной и той же системы уравнений (6), (7) и описывают один и тот же физический процесс, но с различной степенью точности.

Теперь мы готовы объяснить нашу идею, как воспользоваться методом повторного усреднения для более сложной геометрии с двойной пористостью. Как мы уже говорили, будем использовать именно тот же метод. что и в работах [2], [7], [9], но только изменим модель, описывающую динамику смеси твердого тела и жидкости в порах и динамику жидкости в трещинах. Проделанный нами анализ показывает, что мы не можем использовать уравнения фильтрации Дарси для пористых блоков. Чтобы выбрать правильную модель, необходимо решить – какой именно будет окончательная модель. Упростим наш анализ и ограничимся приближением типа системы уравнений пороупругости при условии $\alpha_\mu \sim 0$. Для этого случая для описания динамики смеси в

пористых блоках являются системы уравнений упругой фильтрации и пороупругости. Для выбора наиболее подходящей модели проанализируем критерий

$$\alpha_\mu = \mu_0 = \mu_1 \varepsilon^2 = \mu_2 \delta^2, \quad \varepsilon = \frac{l_p}{L}, \quad \delta = \frac{l_c}{L}\ ,$$

где

$$\mu_1 = \mu_0 \cdot \frac{L^2}{l_p^2}\ , \quad \mu_2 = \mu_0 \cdot \frac{L^2}{l_c^2} = \mu_1 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\ , \tag{16}$$

и l_c – характерный размер трещин.

Предположим, что

$$\varepsilon \ll 1, \quad \delta \ll 1, \quad \text{и} \quad \varepsilon = \delta^r \quad \text{с} \quad r > 1, \quad \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \sim 0. \tag{17}$$

Процесс усреднения для трещин размера δ имеет смысл, если и только если

$$\mu_2 \sim 1 \tag{18}$$

(см. [11], [12]). При этом условии соотношения (16) – (18) приводят к соотношению

$$\mu_1 \sim \infty.$$

Таким образом, наиболее адекватной моделью, описывающей динамику смеси упругого скелета и жидкости в порах, является уравнений упругой фильтрации (6) и (14).

Для описания динамики жидкости в трещинах воспользуемся системой уравнений Стокса

$$\mu_2 \delta^2 \triangle \boldsymbol{v}_c - \nabla q_c + \rho_f \boldsymbol{F} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}_c = 0, \tag{19}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c / \partial t$ и давления q_c жидкости. Как обычно, задача замыкается условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений на общей границе «смесь - пространство трещин» и соответствующими граничными и начальными условиями.

Стандартная процедура усреднения приводит к модифицированной системе уравнений Био-Терцаги для перемещений твердого скелета и для скорости и давления жидкости в трещинах (см. Теорему 1). При этом скорость в порах просто пропорциональна скорости твердого скелета.

Как мы говорили выше, для абсолютно твердого скелета $\lambda_0 \sim \infty$. Переходя к пределу при $\lambda_0 \to \infty$ получим обычную систему уравнений фильтрации Дарси для жидкости а трещинах, в то время как жидкость в порах будет блокирована и неподвижна (см. Теорему 2).

Этот факт очевидным образом противоречит модели в [3]. Позже, один из авторов модели Г.И. Баренблатт в одной из своих многочисленных книг по теории фильтрации ([4], стр. 187) отмечает, что «... движение жидкости в такой среде (трещиновато-пористой) происходит **в основном по трещинам**, в то время как объем трещин мал и **основные запасы жидкости заключаются в пористых блоках**». Это верное

замечание, основанное на глубокой физической интуиции, не было подкреплено указанием верного механизма извлечения жидкости из пор. Наши результаты показывают, что для более точного описания реальных физических процессов в средах со сложной геометрией, необходимо учитывать напряжения в твердом скелете. Именно упругие напряжения (а не второе давление в порах) является главным фактором, позволяющим жидкости перетекать из пор в трещины и наоборот.

2. Постановка задачи и основные результаты. Пусть Ω есть ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с непрерывной по Липшицу границей S. В первую очередь определим область $\Omega_c^\delta \subset \Omega$, занятую жидкостью в трещинах, и область $\Omega_{s,p}^\delta \subset \Omega$, занятую смесью твердой компоненты и жидкостью в порах.

Рассмотрим единичный куб K в $\mathbb{R}^3$, $K = Z_f \cup Z_s \cup \gamma_c$, где Z_f и Z_s открытые области, с общей границей $\gamma_c = \partial Z_f \cap \partial Z_s$ непрерывной по Липшицу. Предположим, что периодическое повторение области Z_s есть связное множество с непрерывной по Липшицу границей. Элементарная ячейка Z_f моделирует область, занятую трещинами Ω_c^δ: область Ω_c^δ есть пересечение области Ω с периодическим повторением в $\mathbb{R}^3$ of элементарной ячейки δZ_f.

Точно также определяется поровое пространство Ω_p^ε: $K = Y_f \cup Y_s \cup \gamma_p$, γ_p – непрерывная по Липшицу поверхность, периодическое повторение области Y_s есть связное множество с непрерывной по Липшицу границей, и Ω_p^ε есть пересечение области $\Omega \backslash \overline{\Omega_c^\delta}$ с периодическим повторением в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки εY_f. Твердый скелет $\Omega \backslash (\overline{\Omega_c^\delta} \cup \overline{\Omega_p^\varepsilon})$ обозначается как $\Omega_s^{\varepsilon,\delta}$.

Наконец, положим $\Omega_{s,p}^\delta = \Omega \backslash \overline{\Omega_c^\delta}$. Можно также охарактеризовать введенные нами множества через характеристические функции. Действительно, пусть $\eta(\boldsymbol{x})$ есть характеристическая функция области Ω в $\mathbb{R}^3$, то есть $\eta(\boldsymbol{x}) = 1$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и $\eta(\boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \Omega$. Пусть также $\chi_p(\boldsymbol{y})$ есть 1-периодическое продолжение характеристической функции области Y_f вK и $\chi_c(\boldsymbol{z})$ есть 1-периодическое продолжение характеристической функции области Z_f в K. Тогда $\chi_c^\delta(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x})\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)$ есть характеристическая функция области Ω_c^δ, и $\chi_p^{\varepsilon,\delta}(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x})\big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big)\chi_p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ есть характеристическая функция области Ω_p^ε.

В соответствии с нашей схемой, аппроксимируем систему уравнений, описывающую совместное движение твердого скелета и жидкости в порах в $\Omega_{s,p}^\delta$, системой уравнений упругой фильтрации

$$\nabla \cdot \hat{\mathbb{P}} + \hat{\rho}\boldsymbol{F} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{w}_s = 0, \tag{1}$$

$$\hat{\mathbb{P}} = \lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - q_p\, \mathbb{I}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ твердой компоненты и давления q_p жидкости в порах.

При этом скорость жидкости в порах определяется как

$$\boldsymbol{v}_p = m_p \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\ , \tag{2}$$

где $m_p = \int_K \chi_p(\boldsymbol{y})dy$ – пористость порового пространства и $m_c = \int_K \chi_c(\boldsymbol{z})dz$ – пористость пространства трещин.

Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathfrak{A}_0^{(f)}$ определяется формулой

$$\mathfrak{A}_0^{(f)} = (1-m_p)\,\mathbb{J} + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_p^{(ij)})\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \tag{3}$$

(см. [11]). Здесь $\hat{\rho} = m_p\rho_f + (1-m_p)\rho_s$,

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i), \quad \mathbb{J} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij},$$

$\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$, – вектора базиса ортогональной декартовой системы координат, и для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и $\boldsymbol{c}$ символом $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ обозначается матрица (диада): $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$. Наконец, функции $\boldsymbol{U}_p^{(ij)}(\boldsymbol{y})$, $i,j = 1,2,3$ есть решения периодической краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_y \boldsymbol{U}_p^{(ij)} - \nabla_y Q_p^{(ij)} = 0\,, \quad \nabla_y \cdot \boldsymbol{U}_p^{(ij)} = 0,\ \boldsymbol{y} \in Y_s\ , \\ \big(\mathbb{D}(y, \boldsymbol{U}_p^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} - Q_p^{(ij)}\mathbb{I}\big) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\,, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma_p\,, \quad \langle \boldsymbol{U}_p^{(ij)}\rangle_{Y_s} = 0\ , \end{array}\right\} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к γ_p.

Движение жидкости в области Ω_c^δ, занятой трещинами, описывается уравнениями Стокса

$$\mu_2\delta^2 \triangle\, \boldsymbol{v}_c - \nabla\, q_c + \rho_f \boldsymbol{F} = 0\,, \quad \nabla \cdot\ \boldsymbol{v}_c = 0\,, \tag{5}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c/\partial t$ и давления q_c жидкости.

На общей границе Γ_c^δ «смесь - пространство трещин» векторы перемещений и давление удовлетворяют обычным условиям непрерывности перемещений

$$\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{w}_s, \tag{6}$$

и нормальных напряжений

$$\Big(\mu_2\delta^2 \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_c}{\partial t}\right) - q_c\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n} = \hat{\mathbb{P}} \cdot \boldsymbol{n}\,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ единичный вектор нормали к границе в точке $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^\delta$.

Пусть

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_c,\ q = q_c,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_c^\delta,\ \text{ и }\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_s,\ q = q_p,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_{s,p}^\delta \tag{8}$$

есть вектор перемещений и давление сплошной среды соответственно. Задача замыкается однородными граничными и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ \ \boldsymbol{x} \in S, \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_c^\delta\,. \tag{9}$$

Для всех $\delta > 0$ задача (1) – (9) имеет единственное обобщенное решение $\{\boldsymbol{w}^\delta, q^\delta\}$ и справедлива

Теорема 1. *Пусть*

$$0 < \mu_2,\, \lambda_0 < \infty\,, \quad |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)| + |\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)| \leqslant F\,.$$

Тогда в области $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ *начально-краевой задаче (1)-(9) при* $\delta \to 0$ *соответствует усредненная задача, состоящая из:*

1) уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_c + (1-m_c)\,\nabla \cdot \boldsymbol{w}_s = 0, \tag{10}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_c$ *жидкости в порах и перемещений* $\boldsymbol{w}_s$ *твердого скелета;*

2) закона сохранения количества движения

$$\lambda_0\, \nabla \cdot \big(\mathfrak{A} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s)\big) - \frac{1}{m_c} \nabla\, q_c + \tilde{\rho} \boldsymbol{F} = 0, \tag{11}$$

для перемещений $\boldsymbol{w}_s$ *твердого скелета и давления* q_c *жидкости в трещинах;*

3) закона Дарси

$$\boldsymbol{v}_c = m_c\, \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_2} \mathbb{B}^{(c)} \Big(\rho_f \boldsymbol{F} - \frac{1}{m_c} \nabla\, q_c\Big), \tag{12}$$

для скорости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c / \partial t$ *и давления* q_c *жидкости в трещинах;*

4) однородных граничных и начальных условий

$$\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \quad \boldsymbol{v}_c(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in S\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x},0) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_c^{\delta}\,, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ *– единичный вектор нормали к границе в точке* $\boldsymbol{x} \in S$.

Скорость жидкости в порах определяется как

$$\boldsymbol{v}_p = (1-m_c) m_p \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\ . \tag{15}$$

В (11) $\tilde{\rho} = \big(m_c + (1-m_p)\big)\rho_f + (1-m_c)(1-m_c)\rho_s$, *симметричный строго положительно определенный постоянный тензор* $\mathfrak{A}$ *и симметричная строго положительно определенная постоянная матрица* $\mathbb{B}^{(c)}$ *определяются ниже формулами (22) и (19) соответственно, и зависят только от геометрии элементарных ячеек* Y_f *и* Z_s, *и не зависят от* μ_2 *и* λ_0.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_0 = n$ *и* $\boldsymbol{v}_p^n$, $\boldsymbol{w}_s^n$, $\boldsymbol{w}_c^n$ *и* q_c^n *есть решения задачи (10)-(15).*

Тогда при $n \to \infty$ $\boldsymbol{v}_p^n \to 0$, $\boldsymbol{w}_s^n \to 0$, *и* $\boldsymbol{w}_c^n \to \boldsymbol{w}_c^{\infty}$, $q_c^n \to q_c^{\infty}$, *где пара* $\{\boldsymbol{v}_c^{\infty}, q_c^{\infty}\}$, $\boldsymbol{v}_c^{\infty} = \partial \boldsymbol{w}_c^{\infty} / \partial t$ *есть решение системы уравнений фильтрации Дарси*

$$\boldsymbol{v}_c^{\infty} = \frac{1}{\mu_2} \mathbb{B}^{(c)} \Big(\rho_f \boldsymbol{F} - \frac{1}{m_c} \nabla\, q_c^{\infty}\Big), \tag{16}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_c^{\infty} = 0, \tag{17}$$

и

$$\boldsymbol{v}_p^\infty = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{v}_p^n = 0, \quad \boldsymbol{w}_s^\infty = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{w}_s^n = 0. \tag{18}$$

3. Доказательство Теоремы 1. Основой доказательства теоремы является интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \big(\chi_c^\delta \mu_2 \delta^2 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\delta}{\partial t}) + (1-\chi_c^\delta)\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\delta) - q^\delta\, \mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt =$$
$$\int_{\Omega_T} \big(\chi_c^\delta \rho_f + (1-\chi_c^\delta)\hat{\rho}\big) \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dxdt\,, \tag{1}$$

для всякой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, равной нулю на границе $S = \partial\Omega$, и соответствующие априорные оценки

$$\int_{\Omega_T} \Big(\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^\delta}{\partial t}\Big|^2 + \delta^2\, \mu_2\, \chi_c^\delta \Big| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\delta}{\partial t}\right)\Big|^2 + |q^\delta|^2 \Big) dxdt +$$
$$\lambda_0 \max_{0<t<T} \int_\Omega (1-\chi_c^\delta) |\mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}^\delta(\boldsymbol{x}, t)\big)|^2 dx \leqslant C_0 F^2, \tag{2}$$

где C_0 не зависит от δ (см., например, [11]- [13]).

Доказательство теоремы достаточно стандартное и в своей простейшей версии использует метод двухмасштабной сходимости [14]. Поэтому мы просто наметим схему доказательства и выведем основные уравнения с помощью метода двухмасштабного разложения (см. [8])

$$\boldsymbol{w}^\delta(\boldsymbol{x}, t) = \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta) \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta, t) + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big) \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t) + \delta\, \boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta, t) + o(\delta), \tag{3}$$

$$q^\delta(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{m_c} \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta) q_c(\boldsymbol{x}, t) + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big) Q_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta, t) + O(\delta), \tag{4}$$

и просто проверяемого соотношения

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega \Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\delta) dx = \int_\Omega \big(\int_Z \Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) dz \big) dx\,.$$

Здесь $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)$, $\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)$, $Q_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t)$, и $\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ – 1-периодические по переменной $\boldsymbol{z}$ функции.

Подстановка (3) и (4) в (1) с $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ приводит при $\delta \to 0$ к макроскопическому закону сохранения количества движения в форме интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} \Big(\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \big((1-m_c)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s)\rangle_{Z_s}\big) -$$
$$(\frac{1}{m_c}\, q_c + \langle Q_s - \frac{1}{m_c}\, q_c\rangle_{Z_s})\, \mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt = \int_{\Omega_T} \tilde{\rho} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dxdt\,, \tag{5}$$

где

$$\langle \Phi \rangle_{Z_s} = \int_{Z_s} \Phi(\boldsymbol{z}) dz\,,$$

и

$$\frac{1}{m_c}\, q_c \chi_c(\boldsymbol{z}) + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{z})\big) Q_s = \frac{1}{m_c}\, q_c + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{z})\big)\Big(Q_s - \frac{1}{m_c}\, q_c\Big)\,.$$

Если в (1) мы выберем $\boldsymbol{\varphi} = \delta\, h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, то, после предельного перехода при $\delta \to 0$ и реинтегрирования по переменным $(\boldsymbol{x}, t)$, получим

$$\int_Z \Big(\lambda_0 \left(1 - \chi_c(\boldsymbol{z})\right) \mathfrak{A}_0^{(f)} : \big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s)\big) - \\ \big(\frac{1}{m_c}\, q_c + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{z})\big)(Q_s - \frac{1}{m_c}\, q_c)\big)\, \mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(z, \boldsymbol{\varphi}_0) dx dt = 0\,. \quad (6)$$

Интегральное тождество (5) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\nabla_x \cdot \Big(\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \big((1 - m_c)\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \\ \langle \mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s)\rangle_{Z_s}\big) - \Big[\frac{1}{m_c}\, q_c + \langle Q_s - \frac{1}{m_c}\, q_c\rangle_{Z_s}\Big]\, \mathbb{I}\Big) + \tilde{\rho}\boldsymbol{F} = 0 \quad (7)$$

в области Ω_T, и интегральное тождество (6) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\nabla_z \cdot \big(\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s)\big) - \nabla_z\, Q_s = 0 \quad (8)$$

в области Z_s, дополненному граничным условием

$$\Big(\lambda_0\, \mathfrak{A}_0^{(f)} : \big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s)\big) - \Big[Q_s - \frac{1}{m_c} q_c\Big]\, \mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad (9)$$

на границе γ_c. В (9) $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к γ_c.

Предел при $\delta \to 0$ в уравнении неразрывности в форме

$$\int_{\Omega_T} \big(\chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\boldsymbol{W} + \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big)\boldsymbol{w}_s + \delta\, \boldsymbol{W}_s\big) \cdot \nabla\, \eta dx dt = 0 \quad (10)$$

с $\eta = \eta(\boldsymbol{x}, t)$, $\eta = \delta\, h(\boldsymbol{x}, t)\eta_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, и $\eta = \big(1 - \chi_c(\boldsymbol{x}/\delta)\big)h(\boldsymbol{x}, t)\eta_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, и соответствующее реинтегрирование доставляют нам недостающие макроскопическое уравнение неразрывности

$$\nabla_x \cdot \big(\boldsymbol{w}_c + (1 - m_c)\boldsymbol{w}_s\big) = 0, \quad \boldsymbol{w}_c = \langle \boldsymbol{W}\rangle_{Z_f} \quad (11)$$

в области Ω_T, и микроскопические уравнения неразрывности

$$\nabla_z \cdot \boldsymbol{W} = 0\,, \quad (12)$$

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{w}_s + \nabla_z \cdot \boldsymbol{W}_s = 0 \quad (13)$$

в области Z_f и в области Z_s соответственно.

Для вывода микроскопического закона сохранения количества движения для скорости жидкости $\boldsymbol{v}_c = \partial \boldsymbol{w}_c/\partial t$ в трещинах выберем в (1) в качестве пробной функцию $\boldsymbol{\varphi} = h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\delta)$, где 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{z}$ гладкая функция $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{z})$ соленоидальная и финитная в Z_f, и перейдем к пределу при $\delta \to 0$. После реинтегрирования получим

$$\mu_2 \triangle_z \boldsymbol{V} - \nabla_z \Pi - \frac{1}{m_c}\nabla_x q_c + \rho_f \boldsymbol{F} = 0, \ \ \boldsymbol{z} \in Z_f\,. \tag{14}$$

Здесь $\boldsymbol{V} = \partial \boldsymbol{W}/\partial t$ и $\boldsymbol{v}_c = \langle \boldsymbol{V}\rangle_{Z_f}$. Последнее уравнение дополним уравнением неразрывности (12) и краевым условием

$$\boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\,, \qquad \boldsymbol{z} \in \gamma_c\,, \tag{15}$$

которое следует из (3) после предельного перехода $\delta \to 0$:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},t) = \chi_c(\boldsymbol{z})\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},t) + \big(1-\chi_c(\boldsymbol{z})\big)\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)\,, \tag{16}$$

и гладкости функции $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},t)$ по переменной $\boldsymbol{z}$.

Задача (12), (14), (15) хорошо изучена ([17], [11]) и имеет единственное решение

$$\chi_c(\boldsymbol{z})\big(\boldsymbol{V} - \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}\big) = \frac{1}{\mu_2}\Big(\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{V}_c^{(i)}(\boldsymbol{z}) \otimes \boldsymbol{e}_i\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{m_c}\nabla_x\, q_c + \rho_f \boldsymbol{F}\Big),$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\triangle_y \boldsymbol{V}_c^{(i)} - \nabla \Pi^{(i)} = -\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{z} \in Z_f\,,\\ &\nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_c^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{z} \in Z_f\,,\\ &\boldsymbol{V}_c^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{z} \in \gamma_c\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{v}_c = \langle \boldsymbol{V}\rangle_{Z_f} = m_c \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} + \frac{1}{\mu_2}\mathbb{B}^{(c)}\big(\rho_f \boldsymbol{F} - \frac{1}{m}\nabla\, q_c\big), \tag{18}$$

с

$$\mathbb{B}^{(c)} = \langle \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{V}_c^{(i)} \otimes \boldsymbol{e}_i\rangle_{Z_f}\,. \tag{19}$$

Для завершения доказательства необходимо решить задачу (8), (9), (13). Следуя стандартной схеме ([11]- [13]) ищем решение в виде

$$\boldsymbol{W}_s = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}_c^{(ij)}(\boldsymbol{z}) D_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{U}_c^{(0)}(\boldsymbol{z}) d(\boldsymbol{x},t),$$

$$Q_s - \frac{1}{m_c} q_c = \lambda_0\big(\sum_{i,j=1}^{3} Q_c^{(ij)}(\boldsymbol{z}) D_{ij}(\boldsymbol{x},t) + Q_c^{(0)}(\boldsymbol{z}) d(\boldsymbol{x},t)\big),$$

где

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial w_{s,j}}{\partial x_i}\Big), \quad d = \nabla_x \cdot \boldsymbol{w}_s, \quad \boldsymbol{w}_s = (w_{s,1},\, w_{s,2},\, w_{s,3}),$$

$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) = \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}\, \mathbb{J}^{ij}.$$

Для 1-периодических по переменной $\boldsymbol{z}$ функций $\boldsymbol{U}_c^{(ij)}$, $\boldsymbol{U}_c^{(0)}$, $Q_c^{(ij)}$ и $Q_c^{(0)}$ имеем следующие периодические краевые задачи

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_z \cdot \big(\mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(ij)})\big) - \nabla_z Q_c^{(ij)} = 0\,, \quad \boldsymbol{z} \in Z_s\,, \\ &\nabla_z \cdot \boldsymbol{U}_c^{(ij)} = 0\,, \quad \boldsymbol{z} \in Z_s\,, \quad \langle \boldsymbol{U}_c^{(ij)} \rangle_{Z_s} = 0\,, \\ &\Big(\mathfrak{A}_0^{(f)} : \big(\mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij}\big) - Q_c^{(ij)}\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\,, \quad \boldsymbol{z} \in \gamma_c\,, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_z \cdot \big(\mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(0)})\big) - \nabla_z Q_c^{(0)} = 0\,, \quad \boldsymbol{z} \in Z_s\,, \\ &\nabla_z \cdot \boldsymbol{U}_c^{(0)} + 1 = 0\,, \quad \boldsymbol{z} \in Z_s\,, \quad \langle \boldsymbol{U}_c^{(0)} \rangle_{Z_s} = 0\,, \\ &\big(\mathfrak{A}_0^{(f)} : \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(0)}) - Q_c^{(0)}\mathbb{I}\big) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\,, \quad \boldsymbol{z} \in \gamma_c\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к γ_c. Следовательно,

$$\mathbb{D}(z, \boldsymbol{W}_s) = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(ij)}) D_{ij} + \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(0)}) d =$$

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(ij)}) \otimes \mathbb{J}^{ij} + \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(0)}) \otimes \mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s),$$

$$(Q_s - \frac{1}{m_c} q_c)\mathbb{I} = \lambda_0 \Big(\sum_{i,j=1}^{3} Q_c^{(ij)} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{J}^{ij}) + Q_c^{(0)} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I})\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s),$$

и подстановка полученных выражений в (7) приводит к необходимому уравнению (11) с

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0^{(f)} : \Big((1 - m_c)\mathbb{J} + \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(ij)}) \otimes \mathbb{J}^{ij} + \mathbb{D}(z, \boldsymbol{U}_c^{(0)}) \otimes \mathbb{I}\Big)\Big) +$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} Q_c^{(ij)} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{J}^{ij}) + Q_c^{(0)} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \tag{22}$$

Доказательство основных свойств тензора $\mathfrak{A}$ стандартное ([11], [12]).

4. Доказательство Теоремы 2. Основным моментом доказательства является априорная оценка

$$\lambda_0 \int_0^t \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}_s^n(\boldsymbol{x}, \tau)|^2 dx d\tau + \frac{1}{\mu_2} \int_\Omega |\nabla q_c^n(\boldsymbol{x}, t)|^2 dx \le C, \tag{1}$$

где C не зависит от n. Последняя следует их энергетического тождества

$$\frac{\lambda_0}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\mathfrak{A} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s^n)\right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s^n)dx + \frac{1}{m_c^2\,\mu_2}\int_\Omega \nabla\, q_c^n \cdot \mathbb{B}^{(c)}(\nabla\, q_c^n)dx = \int_\Omega \tilde{\rho}\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}_s^n dx + \int_\Omega \mathbb{B}^{(c)}(\rho_f \boldsymbol{F})\cdot \nabla\, q_c^n dx \quad (2)$$

и свойств тензора $\mathfrak{A}$ и матрицы $\mathbb{B}^{(c)}$.

Оценка (1) гарантирует компактность последовательности $\{q_c^n\}$ и сходимость $\boldsymbol{v}_s^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Литература

1. Allaire G., Briane M. Multisale convergence and reiterated homogenization // Proceed. of Royal Soc. Edinburgh. – 1996. – 126A. – P.297–342.
2. Arbogast T., Douglas J. Jn., Hornung U. Derivation of the double-porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – 21. – P.823-836.
3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960.– 24;5. – С.852-864.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / М.: Недра, 1972.
5. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics. – 1941. – 12. – P.155-164.
6. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Am. – 1962. – 34. – P.1256-1264.
7. Bourgeat A., Pankratov L., Panfilov M. Study of the double porosity model versus the fissures thikness // Asymptotic Analysis. – 2004. – 38. – P.129-141.
8. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America. – 1981. – 70;4. – P.1140-1146.
9. Chen Z. Homogenization and simulation for compositional flow in naturally fractured reservoirs // Math. Anal. App. – 2007. – 326. – P.31-75.
10. Kazemi H. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution // Soc.Petroleum Engrs. J. – 1969. – 9. – P.451-462.
11. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48;3. – P.519-538.
12. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20;4. – P.635-659.
13. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40;3. – P.1272-1289.
14. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1989. – 20. – P.608-623.
15. Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. I. Governing equations and acoustic attenuation // Physical Revew E. – 2003. – 68. – 036603.
16. Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. II. Fluid transport equations // Physical Revew E. – 2003. – 68. – 036604.
17. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory / Lecture Notes in Physics, Vol.129 / Berlin: Springer, 1980.
18. de Swaan A. Analytic solutions for determing naturally fractured reservoir properties by well testing // Soc. Petroleum Engrs. J. – 1976. – 16. – P.117-122.

19. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen // Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematiesch-Naturwissenschaftliche Klasse. – 1923. – 132; IIa. – P.104-124.
20. Warren J.E. Root P.J. The behaviour of naturally fractured reservoirs // Soc. Petroleum Engrs. J. – 1963. – 3. – P.235-255.

REITERATED HOMOGENIZATION IN PROBLEMS OF UNDERGROUND LIQUID FILTRATION

A.M. Meirmanov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, email: meirmanov@bsu.edu.ru

Abstract. Using the theory of averaging some models with double porosity models describing the liquid filtration in porous-elastic media are derived. On the microscopic level the fluid dynamics is governed by the stationary Stokes system for incompressible viscous liquid. The domain where the liquid flows is a union of two independent systems of cracks and pores. It is supposed that the dimensionless parameter ε which characterizes sizes of pores depends on the dimensionless parameter δ which characterizes sizes of cracks such that $\varepsilon = \delta^r$ c $r > 1$. Dynamics of solid skeleton is described by stationary Lamé's system. Under the supposition that joint motion of elastic skeleton and the liquid are averaged (first averaging) second averaging of liquid motion in cracks and the mixture of solid component and the liquid in pores is fulfilled at $\delta \to 0$. As a result, the modified Terzaghi-Biot system described porous elasticity is derived. It described the dynamics of the liquid in cracks and displacements of the solid skeleton. For the absolutely rigid skeleton we derive the usual Darcy equations which govern the liquid filtration in cracks while the liquid in pores is blocked and unmoved.

Key words: liquid filtration, reiterated homogenization, Darcy's, Biot's, Lame's and Stokes' equations.

УДК: 533.72

ГРАВИТАЦИОННОЕ ОСЕДАНИЕ АГЛОМЕРАТА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

Е.Р. Щукин, Л.А. Уварова, Н.В. Малай,* З.Л. Шулиманова**

*Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: e-mail: malay@bsu.edu.ru
**Институт высоких температур РАН, Москва, 127412

Аннотация. Проведено математическое моделирование процесса гравитационного оседания агломерата, образованного двумя сферическими частицами. Получены формулы, позволяющие оценивать оседание агломерата как при слабом, так и сильном влиянии на его ориентацию броуновского вращения. При этом показано, что, в случае слабого влияния броуновского вращения на ориентацию агломерата, одновременно с оседанием в вертикальном направлении, может происходить и заметный поперечный дрейф агломерата. Скорость стационарного оседания агломерата в вертикальном направлении значительно (на 40 - 55%) превышает скорость оседания отдельных сферических частиц, из которых состоит агломерат. При сильном влиянии броуновского вращения на ориентацию агломерата, отличие средней скорости оседания агломерата от максимального и минимального её значений не превышает 6%. Теоретическое значение средней скорости оседания агломерата близко (в пределах 4%) к значению средней скорости, полученному на основе экспериментальных данных.

Ключевые слова: агломерат, сферические частицы, броуновское вращение.

1. Введение. В гравитационном поле Земли на аэрозольные и гидрозольные частицы действует сила тяжести. Эта сила вызывает упорядоченное движение частиц относительно несущей газообразной или жидкой среды к поверхности Земли[1,2]. Гравитационное (седиментационное) оседание частиц довольно часто происходит при протекании природных и технических процессов, например, при пожарах и вулканических извержениях, при работе тепловых электростанций, турбореактивных и поршневых двигателей. Седиментация частиц в гравитационном поле может быть использовании при определении концентрации дисперсных систем [5], при очистке газообразных и жидких сред от взвешенных в них вредных частиц [1-6]. В связи с этим изучение закономерностей гравитационного оседания частиц дисперсных систем представляет как научный, так и практический интерес.

Во встречающихся на практике аэрозольных и гидрозольных системах среднее расстояние между частицами может значительно превышать характерные размеры частиц [1-4]. Математическое моделирование процесса гравитационного оседания таких систем можно проводить, основываясь на знании законов гравитационного оседания в бесконечной среде отдельных дисперсных частиц. В опубликованной литературе достаточно полно изучены особенности, протекающего при малых числах Рейнольдса, гравитационного оседания отдельных частиц с формой поверхности близкой к сферической, сфероидальной и эллипсоидальной [2]. В состав дисперсных систем наряду с

такими частицами могут входить частицы и с более сложной геометрией. К ним, в частности, относятся агломераты, образующиеся при коагуляции (слипании) двух или большего числа частиц [1-3,7,8]. Закономерности гравитационного оседания агломерата могут заметно отличаться от закономерностей движения отдельных частиц, из которых образован агломерат. Ниже это буде показано на примере оседания агломерата, образованного двумя одинаковыми сферическими частицами.

2. Постановка задачи. Рассматривается гравитационное оседание в неподвижной нетурбулизованной вязкой среде изображенного на рис. 1 агломерата, образованного двумя одинаковыми сферическими частицами с радиусом R и плотностью ρ_p. Числа Рейнольдса частиц агломерата много меньше единицы. При этом описание процесса движения агломерата в вязкой среде можно проводить в квазистационарном приближении [2]. Размеры агломерата достаточно крупные, чтобы можно было пренебречь его броуновским вращением [1,3] и влиянием изотермического скольжения [1-3] на силу сопротивления среды движению агломерата. Проведенные в [3] оценки показали, что в воздухе при температуре 20^0 С и давлении p=1 атм броуновское вращение аэрозольных частиц с размерами более 10 мкм очень медленное (менее 0,5 об/мин) . В случае аэрозольных частиц, имеющих неправильную форму и размеры сравнимые с 1 мкм, броуновское вращение в воздухе столь быстро, что вызывает заметный эффект мерцания, появляющийся при прохождении пучка света чрез облако аэрозольных частиц [3].

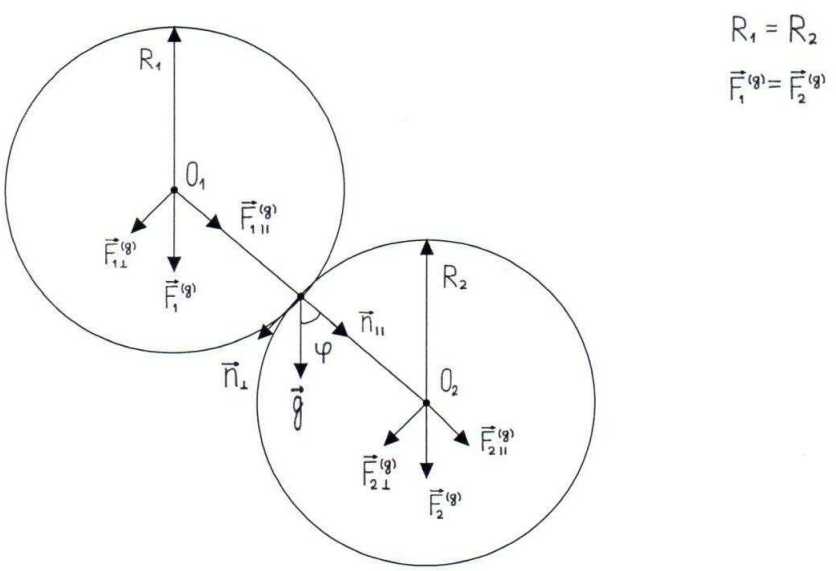


Рис. 1. Агломерат, образованный двумя одинаковыми сферическими частицами.

Гравитационное оседание агломерата вызывают, действующие на его частицы, что показано на рисунке. Следующие равные гравитационной природы силы $\boldsymbol{F}_i^{(g)}$:

$$\boldsymbol{F}_i^{(g)} = \boldsymbol{F}^{(g)} = (\rho_p - \rho_m)\, V \boldsymbol{g}\,, \tag{1}$$

где ρ_m – плотность вязкой среды; индекс $i = 1, 2$; $V = 4/3\pi R^3$ – объём сферических частиц агломерата; $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения. Силы $\boldsymbol{F}_i^{(g)}$, в связи с их равенством, вращения агломерата не вызывают. Поэтому гравитационное оседание агломерата из двух одинаковых сферических частиц происходит при, изображенном на рис. 2, постоянном независящем от времени угле φ. Угол φ с вектором $\boldsymbol{g}$ образует прямая O_1O_2 , проходящая через центры частиц агломерата. В связи с постоянством угла φ описание движения агломерата удобно проводить в изображенной на рис. 2 неподвижной прямоугольной системе координат $x_\parallel O y_\perp z$, ось $Ox_\parallel$ которой параллельна вектору $\boldsymbol{n}_\parallel$, а ось $Oy_\perp$ - вектору $\boldsymbol{n}_\perp$. Плоскость $x_\parallel O y_\perp$, в которой происходит движение агломерата, проходит через прямую O_1O_2 и вектор $\boldsymbol{g}$. Вектор $\boldsymbol{n}_\parallel$ – единичный вектор вдоль линии центров частиц O_1O_2, направленный от первой частицы ко второй; $\boldsymbol{n}_\perp$ – единичный вектор, перпендикулярный к прямой O_1O_2 и образующий острый угол с вектором $\boldsymbol{g}$.

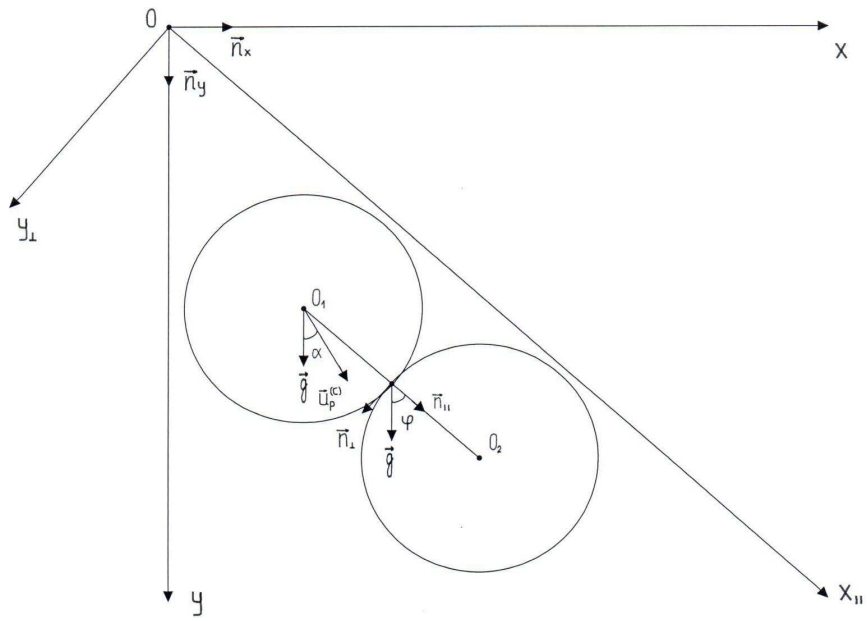


Рис. 2. Расположение агломерата относительно неподвижных прямоугольных декартовых систем координат $x_\parallel O y_\perp z$ и $xOyz$.

3. Формулы для проекций скорости произвольной точки агломерата. Каждая из сил $\boldsymbol{F}_i^{(g)}$ может быть представлена в виде векторной суммы двух составляющих $\boldsymbol{F}_{i\parallel}^{(g)}$ и $\boldsymbol{F}_{i\perp}^{(g)}$:

$$\boldsymbol{F}_i^{(g)} = \boldsymbol{F}_{i\parallel}^{(g)} + \boldsymbol{F}_{i\perp}^{(g)}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F}_{i\parallel}^{(g)} = F_{i\parallel}^{(g)}\boldsymbol{n}_\parallel$, $\boldsymbol{F}_{i\perp}^{(g)} = F_{i\perp}^{(g)}\boldsymbol{n}_\perp$; $F_{i\parallel}^{(g)} = \left(\boldsymbol{F}_i^{(g)}\boldsymbol{n}_\parallel\right) = (\rho_p - \rho_m)\, V g \cos\varphi$, $F_{i\perp}^{(g)} = \left(\boldsymbol{F}_i^{(g)}\boldsymbol{n}_\perp\right) = (\rho_p - \rho_m)\, V g \sin\varphi$ – проекции векторов $\boldsymbol{F}_i^{(g)}$ на оси $Ox_\parallel$ и $Oy_\perp$.

Силы $\boldsymbol{F}_{i\parallel}^{(g)}$ и $\boldsymbol{F}_{i\perp}^{(g)}$ вызывают независимое движение агломерата со скоростями $\boldsymbol{U}_{p\parallel}^{(g)} = U_{p\parallel}^{(g)}\boldsymbol{n}_\parallel$ и $\boldsymbol{U}_{p\perp}^{(g)} = U_{p\perp}^{(g)}\boldsymbol{n}_\perp$ вдоль осей $Ox_\parallel$ и $Oy_\perp$. При этом движению агломерата препятствуют следующие силы вязкого сопротивления среды [2]:

$$\boldsymbol{F}_{\parallel}^{(\mu)} = \boldsymbol{F}_{1\parallel}^{(\mu)} + \boldsymbol{F}_{2\parallel}^{(\mu)}, \quad \boldsymbol{F}_{1\parallel}^{(\mu)} = \boldsymbol{F}_{2\parallel}^{(\mu)} = -6\pi\mu f_{\parallel}^{(\mu)} R U_{p\parallel} \boldsymbol{n}_{\parallel}\,; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F}_{\perp}^{(\mu)} = \boldsymbol{F}_{1\perp}^{(\mu)} + \boldsymbol{F}_{2\perp}^{(\mu)}, \quad \boldsymbol{F}_{1\perp}^{(\mu)} = \boldsymbol{F}_{2\perp}^{(\mu)} = -6\pi\mu f_{\perp}^{(\mu)} R U_{p\perp} \boldsymbol{n}_{\perp}\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{F}_{i\parallel}^{(\mu)}$ и $\boldsymbol{F}_{i\perp}^{(\mu)}$ – силы вязкого сопротивления среды движению i-ой частицы агломерата в направлениях $\boldsymbol{n}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{n}_{\perp}$; μ – динамическая вязкость среды; $f_{\parallel}^{(\mu)} = 0.645$, $f_{\perp}^{(\mu)} = 0.716$ [2]. В (3), (4) входят проекции $U_{p\parallel}$ и $U_{p\perp}$ на оси $Ox_{\parallel}$ и $Oy_{\perp}$ скорости $\boldsymbol{U}_p$ агломерата, с которой движутся центры частиц агломерата.

В проекциях на оси $Ox_{\parallel}$ и $Oy_{\perp}$ дифференциальные уравнения движения агломерата имеют следующий вид:

$$M\frac{dU_{p\parallel}}{dt} = -6\pi\mu f_{\parallel}^{(\mu)} R U_{p\parallel} + (\rho_p - \rho_m)\, V g \cos\varphi\,, \tag{5}$$

$$M\frac{dU_{p\perp}}{dt} = -6\pi\mu f_{\perp}^{(\mu)} R U_{p\perp} + (\rho_p - \rho_m)\, V g \sin\varphi\,, \tag{6}$$

где $M = \rho_p V$ – масса частиц агломерата. Разделив обе части уравнений (5) и (6) на, соответственно, $6\pi\mu f_{\parallel}^{(\mu)} R$ и $6\pi\mu f_{\perp}^{(\mu)} R$, приходим к следующему более простому виду этих уравнений:

$$\tau_{\parallel}\frac{dU_{p\parallel}}{dt} = -U_{p\parallel} + U_{g\parallel}\,, \tag{7}$$

$$\tau_{\perp}\frac{dU_{p\perp}}{dt} = -U_{p\perp} + U_{g\perp}\,. \tag{8}$$

В уравнениях (7), (8)

$$\tau_{\parallel} = \tau/f_{\parallel}^{(\mu)}, \quad \tau_{\perp} = \tau/f_{\perp}^{(\mu)}, \quad \tau = (2/9)\left(R^2\rho_p/\nu\rho_m\right), \quad \tau_{\parallel}/\tau_{\perp} = f_{\perp}^{(\mu)}/f_{\parallel}^{(\mu)} = 1.11; \tag{9}$$

$$U_{g\parallel} = \tau_{\parallel} g^* \cos\varphi\,, \quad U_{g\perp} = \tau_{\perp} g^* \sin\varphi\,, \quad g^* = g\left(\rho_p - \rho_m\right)/\rho_p\,, \tag{10}$$

где $\tau_{\parallel}$ и $\tau_{\perp}$ – времена релаксации агломерата, τ – время релаксации отдельной сферической частицы с радиусом R и плотностью ρ_p [3], $\nu = \mu/\rho_m$. Интегрируя уравнения (7), (8) с начальными условиями $U_{p\parallel}^{(0)}$ и $U_{p\perp}^{(0)}$ при времени $t = 0$, получаем следующие выражения для компонент $U_{p\parallel}$, $U_{p\perp}$ скорости $\boldsymbol{U}_p$ произвольной точки агломерата:

$$U_{p\parallel} = U_{g\parallel} + \left(U_{p\parallel}^{(0)} - U_{g\parallel}\right) e^{-t/\tau_{\parallel}}, \quad U_{p\perp} = U_{g\perp} + \left(U_{p\perp}^{(0)} - U_{g\perp}\right) e^{-t/\tau_{\perp}}. \tag{11}$$

Проекции $U_{p\parallel}$ и $U_{p\perp}$ равны:

$$U_{p\parallel} = \frac{dx_{\parallel}}{dt}\,, \quad U_{p\perp} = \frac{dy_{\perp}}{dt}\,, \tag{12}$$

где $x_{\parallel}$ и $y_{\perp}$ – координаты произвольной точки агломерата, в частности, центров его частиц. Проведя интегрирование (12), приходим к следующей зависимости координат рассматриваемой точки агломерата от времени:

$$x_{\parallel} = x_{\parallel}^{(0)} + U_{g\parallel} t + \left(U_{p\parallel}^{(0)} - U_{g\parallel}\right) \tau_{\parallel} \left(1 - e^{-t/\tau_{\parallel}}\right),$$

$$y_{\perp} = y_{\perp}^{(0)} + U_{g\perp} t + \left(U_{p\perp}^{(0)} - U_{g\perp}\right) \tau_{\perp} \left(1 - e^{-t/\tau_{\perp}}\right). \qquad (13)$$

Здесь (13) $x_{\parallel}^{(0)}$ и $y_{\perp}^{(0)}$ – начальные значения координат рассматриваемой точки агломерата.

Практический интерес представляют формулы, позволяющие оценивать гравитационное оседание агломерата в, изображенной на рис. 2, прямоугольной системе координат $xOyz$ с осью Ox перпендикулярной и осью Oy параллельной вектору $\boldsymbol{g}$. В этой системе координат, полученные с помощью формул (11), (13), выражения для проекций U_{px} и U_{py} скорости $\boldsymbol{U}_p$ и координат x, y произвольной точки агломерата имеют уже следующий вид:

$$U_{px} = \left(\tau_{\parallel} - \tau_{\perp}\right) g^* \sin\varphi\cos\varphi + \left[U_{px}^{(0)} \sin^2\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\parallel} g^*\right) \sin\varphi\cos\varphi\right] e^{-t/\tau_{\parallel}} +$$
$$+ \left[U_{px}^{(0)} \cos^2\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\perp} g^*\right) \sin\varphi\cos\varphi\right] e^{-t/\tau_{\perp}}, \qquad (14)$$

$$U_{py} = \left(\tau_{\parallel} \cos^2\varphi + \tau_{\perp} \sin^2\varphi\right) g^* \sin\varphi\cos\varphi + \left[U_{px}^{(0)} \sin\varphi\cos\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\parallel} g^*\right) \cos^2\varphi\right] e^{-t/\tau_{\parallel}} +$$
$$+ \left[-U_{px}^{(0)} \sin\varphi\cos\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\perp} g^*\right) \sin^2\varphi\right] e^{-t/\tau_{\perp}},$$

$$x = x^{(0)} + \left(\tau_{\parallel} + \tau_{\perp}\right) g^* t \sin\varphi\cos\varphi + \left[U_{px}^{(0)} \sin^2\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\parallel} g^*\right) \sin\varphi\cos\varphi\right] \tau_{\parallel} e^{-t/\tau_{\parallel}} +$$
$$+ \left[U_{px}^{(0)} \cos^2\varphi - \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\perp} g^*\right) \sin\varphi\cos\varphi\right] \tau_{\perp} e^{-t/\tau_{\perp}}, \qquad (15)$$

$$y = y^{(0)} + \left(\tau_{\parallel} \cos^2\varphi + \tau_{\perp} \sin^2\varphi\right) g^* t + \left[U_{px}^{(0)} \sin\varphi\cos\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\parallel} g^*\right) \cos^2\varphi\right] e^{-t/\tau_{\parallel}} +$$
$$+ \left[-U_{px}^{(0)} \sin\varphi\cos\varphi + \left(U_{py}^{(0)} - \tau_{\perp} g^*\right) \sin^2\varphi\right] e^{-t/\tau_{\perp}},$$

где $U_{px}^{(0)}$ и $U_{py}^{(0)}$ – проекции на оси Ox и Oy начальной скорости $\boldsymbol{U}_p^{(0)}$. Вектор скорости агломерата $\boldsymbol{U}_p$ образует с осью Oy, показанной на рис. 2, угол

$$\alpha = \arctan U_{px}/U_{py}\ . \qquad (16)$$

4. Анализ полученных результатов. В п.2 показано, что, при пренебрежимо малом влиянии броуновского вращения на ориентацию агломерата из двух одинаковых

сферических частиц, гравитационное оседание агломерата происходит без вращения ($\varphi = \text{const}$). При этом зависимость от времени проекций $U_{p\|}$, $U_{p\perp}$ и U_{px}, U_{py} скорости $\boldsymbol{U}_p$ агломерата, координат его точек и угла, образованного скоростью агломерата и ускорением свободного падения, можно определить с помощью формул (11), (13)-(16). Наиболее простой следующий вид формулы для проекций скорости агломерата и координат его точек принимают при нулевой начальной скорости агломерата ($\boldsymbol{U}_p^{(0)} = 0$):

$$U_{p\|} = U_{g\|}\left(1 - e^{-t/\tau_\|}\right), \quad U_{p\perp} = U_{g\perp}\left(1 - e^{-t/\tau_\perp}\right), \tag{17}$$

$$x_\| = x_\|^{(0)} + U_{g\|}\left[t - \tau_\|\left(1 - e^{-t/\tau_\|}\right)\right], \quad y = y_\perp^{(0)} + U_{g\perp}\left[t - \tau_\perp\left(1 - e^{-t/\tau_\perp}\right)\right], \tag{18}$$

$$U_{px} = \left[\tau_\|\left(1 - e^{-t/\tau_\|}\right) - \tau_\perp\left(1 - e^{-t/\tau_\perp}\right)\right] g^* \sin\varphi\cos\varphi\,,$$

$$U_{py} = \left[\tau_\|\left(1 - e^{-t/\tau_\|}\right)\cos^2\varphi - \tau_\perp\left(1 - e^{-t/\tau_\perp}\right)\sin^2\varphi\right] g^*\,, \tag{19}$$

$$x = x^{(0)} + \left\{\tau_\|\left[t - \tau_\|\left(1 - e^{-t/\tau_\|}\right)\right] - \tau_\perp\left[t - \tau_\perp\left(1 - e^{-t/\tau_\perp}\right)\right]\right\} g^* \sin\varphi\cos\varphi\,, \tag{20}$$

$$y = y^{(0)} + \left\{\tau_\|\left[t - \tau_\|\left(1 - e^{-t/\tau_\|}\right)\right]\cos^2\varphi - \tau_\perp\left[t - \tau_\perp\left(1 - e^{-t/\tau_\perp}\right)\right]\sin^2\varphi\right\} g^*\,. \tag{21}$$

Из (17) и (19) вытекает, что в случае $\boldsymbol{U}_p^{(0)} = 0$ при времени $t > 7\tau_\|$ скорость агломерата $\boldsymbol{U}_p$ практически от времени не зависит и её можно считать равной следующей постоянной скорости $\boldsymbol{U}_p^{(C)}$:

$$\boldsymbol{U}_p^{(C)} = U_{g\|}\boldsymbol{n}_\| + U_{g\perp}\boldsymbol{n}_\perp \tag{22}$$

или

$$\boldsymbol{U}_p^{(C)} = U_{px}^{(C)}\boldsymbol{n}_x + U_{py}^{(C)}\boldsymbol{n}_y\,. \tag{23}$$

Входящие в (23) проекции $U_{px}^{(C)}$ и $U_{py}^{(C)}$ равны:

$$U_{px}^{(C)} = U_{g\|}\left(\boldsymbol{n}_\|\boldsymbol{n}_x\right) + U_{g\perp}\left(\boldsymbol{n}_\perp\boldsymbol{n}_x\right), \quad U_{py}^{(C)} = U_{g\|}\left(\boldsymbol{n}_\|\boldsymbol{n}_y\right) + U_{g\perp}\left(\boldsymbol{n}_\perp\boldsymbol{n}_y\right)\,, \tag{24}$$

где $\left(\boldsymbol{n}_\|\boldsymbol{n}_x\right) = \sin\varphi$, $\left(\boldsymbol{n}_\perp\boldsymbol{n}_x\right) = \cos\varphi$, $\left(\boldsymbol{n}_\|\boldsymbol{n}_y\right) = \cos\varphi$, $\left(\boldsymbol{n}_\perp\boldsymbol{n}_y\right) = \sin\varphi$. С учетом выражений для $U_{g\|}$ и $U_{g\perp}$ (10), получаем:

$$U_{px}^{(C)} = \left(\tau_\| - \tau_\perp\right) g^* \sin\varphi\cos\varphi\,,, \quad U_{py}^{(C)} = \left(\tau_\|\cos^2\varphi + \tau_\perp\sin^2\varphi\right) g^*\,.$$

Подставив в эти формулы выражения для $\tau_\|$ и $\tau_\perp$ (9), приходим к

$$U_{px}^{(C)} = \psi_x(\varphi)\,\tau g^*\,, \quad U_{py}^{(C)} = \psi_y(\varphi)\,\tau g^*\,, \tag{25}$$

где

$$\psi_x(\varphi) = \left[\left(f_\perp^{(\mu)} - f_\|^{(\mu)}\right)/f_\perp^{(\mu)} f_\|^{(\mu)}\right]\sin\varphi\cos\varphi\,, \quad \psi_x(\varphi) = 0.154\sin\varphi\cos\varphi\,,$$

$$\psi_y(\varphi) = \frac{1}{f_\|^{(\mu)}} + \left(\frac{1}{f_\perp^{(\mu)}} - \frac{1}{f_\|^{(\mu)}}\right)\sin^2\varphi\,, \quad 1.397 \le \psi_y(\varphi) \le 1.55\,.$$

Для сравнения следует отметить, что в случае $\boldsymbol{U}_p^{(0)} = 0$ при $t > 7\tau_{\|}$ стационарная скорость гравитационного оседания отдельных сферических частиц с радиусом R и плотностью ρ_p, из которых состоит агломерат, равна:

$$\boldsymbol{U}_{SPh}^{(C)} = U_{SPh}^{(C)} \boldsymbol{n}_y \,, \quad U_{SPhy}^{(C)} = \tau g^* \,. \tag{26}$$

Из этой формулы вытекает, что стационарное гравитационное оседание сферической частицы при любой её ориентации происходит вертикально вниз.

Сравнение (25) и (26) показывает, что скорость стационарного оседания агломерата в направлении оси Oy значительно (на 40 - 55%) превышает скорость оседания отдельной сферической частицы. В отличие от сферических частиц, при $t > 7\tau_{\|}$ стационарное гравитационное оседание агломерата из двух частиц происходит вертикально вниз только в случае двух его ориентаций в пространстве: когда агломерат расположен параллельно ($\varphi = 0$, $\varphi = \pi$) и перпендикулярно ($\varphi = \pi/2$) к вектору $\boldsymbol{g}$. При угле $0 < \varphi < \pi/2$ агломерат в процессе оседания дрейфует так же в направлении оси Ox, а при $\pi/2 < \varphi < \pi$ - в противоположном направлении. В этих случаях, полученное с учетом формул (24), выражение для угла $\alpha^{(C)}$ (16), который вектор $\boldsymbol{U}_p^{(C)}$ образует с вектором $\boldsymbol{g}$, принимает следующий вид:

$$\alpha^{(C)} = \arctan\left[\left(\tau_{\|} - \tau_{\perp}\right)\tan\varphi / \left(\tau_{\|} + \tau_{\perp}\tan^2\varphi\right)\right]. \tag{27}$$

Эта формула показывает, что при $0 < \varphi < \pi/2$ угол $\alpha^{(C)} > 0$ (вектор $\boldsymbol{U}_p^{(C)}$ расположен справа от вектора $\boldsymbol{g}$), а при $\pi/2 < \varphi < \pi$ угол $\alpha^{(C)} < 0$ (вектор $\boldsymbol{U}_p^{(C)}$ расположен слева от вектора $\boldsymbol{g}$). Анализ формулы (27) показал, что максимальное $\alpha_{\max}^{(C)}$ и минимальное $\alpha_{\min}^{(C)}$ значение угол $\alpha^{(C)}$ принимает, соответственно, при следующих значениях $\tan\varphi$:

$$\tan\varphi_1 = \sqrt{\tau_{\|}/\tau_{\perp}} \,, \quad \tan\varphi_2 = -\sqrt{\tau_{\|}/\tau_{\perp}} \,. \tag{28}$$

где $\tau_{\|}/\tau_{\perp} = f_{\perp}^{(\mu)}/f_{\|}^{(\mu)}$. Отсюда следует, что значения углов φ_1, φ_2 и, соответственно, $\alpha_{\max}^{(C)}$ и $\alpha_{\min}^{(C)}$ от радиусов R и плотности ρ_p частиц агломерата не зависят. Учитывая, что $f_{\perp}^{(\mu)}/f_{\|}^{(\mu)} = 1.11$, из (28) получаем: $\varphi_1 = 46.49^0$, $\varphi_2 = 133.51^0$. Подставив выражения для $\tan\varphi_1$ и $\tan\varphi_2$ (28) в формулу для $\alpha^{(C)}$ (27), приходим к

$$\alpha_{\max}^{(C)} = \arctan\frac{1}{2}\left(\sqrt{\tau_{\|}/\tau_{\perp}} - \sqrt{\tau_{\perp}/\tau_{\|}}\right) = 2.99^0, \quad \alpha_{\min}^{(C)} = -\alpha_{\max}^{(C)}. \tag{29}$$

Отсюда следует, что все значения угла $\alpha^{(C)}$ удовлетворяют неравенству: $-2,99 \le \alpha^{(C)} \le$ $\le 2,99$.

Проведенный с помощью формул (20),(21) и (25) численный анализ, в частности, показал, что скорость дрейфа в поперечном направлении агломерата может превысить 1 см/с, а преодолеваемое им при этом расстояние может быть значительным.

Скорость стационарного оседания агломерата в вертикальном направлении слабо (в пределах 11%) зависит от угла φ, определяющего ориентацию агломерата относительно

вектора $\boldsymbol{g}$. Это достаточно хорошо показывают данные табл. 1. В этой таблице приведены зависимости от угла φ проекций $U_{px}^{(C)}$, $U_{py}^{(C)}$ угла $\alpha^{(C)}$ и проходимых за время t=10 с срасстояний $\Delta x = x - x^{(0)}$, $\Delta y = y - y^{(0)}$ в случае аэрозольного агломерата, состоящего из двух свинцовых частиц с диаметром d = 25 мкм. Оседание агломерата происходит в воздухе при нормальном атмосферном давлении и температуре 20^0C. При этих условиях времена релаксации агломерата свинцовой частицы с d=25 мкм, соответственно, равны: $\tau_{\|} = 3.366 \cdot 10^{-2}c$, $\tau_{\perp} = 3.025 \cdot 10^{-2}c$ и $\tau = 2.17 \cdot 10^{-2}c$. Стационарное оседание свинцовой частицы с d=25 мкм происходит при скорости $\tau g^* = 21.27$ см/с.

Таблица 1

Зависимость от угла φ проекций $U_{px}^{(C)}$, $U_{py}^{(C)}$, угла $\alpha^{(C)}$ и перемещений Δx, Δy агломерата из двух свинцовых частиц с диаметром 25 мкм, оседающего в воздухе при нормальном атмосферном давлении и температуре 20^0C

Угол φ^0	0	2.55	45	46.5	67.5	90	112.5	133.5	135	157.5	180
Проекция $U_{px}^{(C)}$, см/с	0	1.15	1.63	1.63	1.15	0	-1.15	-1.63	-1.63	-1.15	0
Проекция $U_{py}^{(C)}$, см/с	32.97	32.46	31.33	31.25	30.15	29.70	30.15	31.25	31.33	32.46	32.97
Угол $\alpha^{(C)0}$	0	2.03	2.978	2.986	2.18	0	-2.18	-2.986	-2.978	-2.03	0
Перемещение $\Delta x = x - x^{(0)}$, см за время t=10 с	0	11.5	16.25	16.22	11.5	0	-11.5	-16.22	-16.25	-11.5	0
Перемещение $\Delta y = y - y^{(0)}$, см за время t=10 с	328.5	323.5	312.3	311.2	300.5	296.1	300.5	311.2	312.3	323.5	328.5

При достаточно малых диаметрах частиц агломерата, на его ориентацию в пространстве сильное влияние может оказать броуновское вращение [1,3]. Например, в воздухе при нормальном давлении и температуре 20^0C сильное влияние броуновское вращение оказывает на ориентацию агломератов с диаметром частиц, сравнимым с 1 мкм. В связи с этим представляет интерес знание величины средней скорости $\left\langle \boldsymbol{U}_p^{(C)} \right\rangle$ стационарного гравитационного оседания агломерата, найденной с учетом вращения агломерата. Проще всего выражение для средней скорости $\left\langle \boldsymbol{U}_p^{(C)} \right\rangle$ находится при равновероятной ориентации агломерата. При этом выражение для $\left\langle \boldsymbol{U}_p^{(C)} \right\rangle$ равно:

$$\left\langle \boldsymbol{U}_p^{(C)} \right\rangle = \left\langle U_{py}^{(C)} \right\rangle \boldsymbol{n}_y \ , \tag{30}$$

где $\left\langle U_{py}^{(C)} \right\rangle = \left(1/f_{\|}^{(\mu)} + 1/f_{\perp}^{(\mu)} \right) \tau g^*/2 = 1.474 \tau g^*$.

Агломерат падает со следующими максимальной $\boldsymbol{U}_{\text{pmax}}^{(C)}$ и минимальной $\boldsymbol{U}_{\text{pmin}}^{(C)}$ скоростями при, соответственно, параллельном $(\varphi = 0; \pi)$ и перпендикулярном его расположении относительно вектора $\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{U}^{(C)}_{\text{pmax}} = U^{(C)}_{\text{pmax}}\boldsymbol{n}_y, \quad \boldsymbol{U}^{(C)}_{\text{pmax}} = \frac{1}{f^{(\mu)}_{\parallel}}\tau g^* = 1.55\tau g^*;$$

$$\boldsymbol{U}^{(C)}_{\text{pmin}} = U^{(C)}_{\text{pmin}}\boldsymbol{n}_y, \quad \boldsymbol{U}^{(C)}_{\text{pmin}} = \frac{1}{f^{(\mu)}_{\perp}}\tau g^* = 1.397\tau g^*. \tag{31}$$

Сравнение формул (30) и (31) показывает, что отличие среднего значения $\left\langle \boldsymbol{U}^{(C)}_p \right\rangle$ от максимального и минимального значений $\boldsymbol{U}^{(C)}_p$ не превышает 5,5%.

В работе [9] приведена следующая формула (32), позволяющая (при равновероятной ориентации агломерата из двух сферических частиц) оценивать среднюю силу вязкого сопротивления среды движению агломерата со скоростью $\boldsymbol{U}_p$:

$$\boldsymbol{F}^{(\mu)}_a = -6\pi\mu K_a R_e \boldsymbol{U}_p\,, \tag{32}$$

где $R_e = \sqrt[3]{2}R$ – радиус сферы, имеющей такой же объём, как и агломерат из двух частиц с радиусами R; $K_a = 1.12$ – поправочный динамический коэффициент формы, полученный экспериментально [9].

Гравитационное оседание агломерата вызывает гравитационной природы сила $\boldsymbol{F}^{(g)}_a$:

$$\boldsymbol{F}^{(g)}_a = 2\left(\rho_p - \rho_m\right) V g \boldsymbol{n}_y\,, \quad V = \frac{3}{4}\pi R^3\ . \tag{33}$$

Когда сила $\boldsymbol{F}^{(g)}_a = \boldsymbol{F}^{(\mu)}_a$, гравитационное оседание агломерата происходит со средней скоростью

$$\boldsymbol{U}^{(C)}_{pa} = U^{(C)}_{pa}\boldsymbol{n}_y\,, \quad \boldsymbol{U}^{(C)}_{pa} = \frac{2^{2/3}}{K_a}\tau g^* = 1.417\tau g^*\,. \tag{34}$$

Сравнение теоретической формулы (30) с, найденной с помощью экспериментального выражения (32), формулой (34) показывает, что отличие теоретического и экспериментального значения средней скорости гравитационного оседания агломерата из двух частиц не превышает 4%.

Литература

1. Фукс Н.А. Механика аэрозолей / М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 352 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976. – 630 с.
3. Райст П. Аэрозоли. Введение в теорию / М.: Энергетика и энергия, 1987. – 277 с.
4. Пирумов А.И. Обеспыливание воздуха / М.: Стройиздат, 1981. – 296 с.
5. Спурный К., Йех Ч., Седлачек Б., Шторх О. Аэрозоли / М.: Атомиздат, 1964. – 360 с.
6. Ужов В.И., Вальдберг А.Ю., Мягков Б.И., Решидов Н.К. Очистка промышленных газов от пыли / М.: Химия, 1983. – 297 с.
7. Mackowski D.W., Phoretic behavior of asymmetric particles in thermal nonequilibrium with the gas: two-sphere aggregates // J.Colloid Interface Sci. – 1990. – 140. – P.139-157.

8. Suzuki, S., Kinawa,K., and Dobashi,R. Effect of particle morphology on thermophoretic velocity of aggregated soot particles // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2009. – 52. – P.4695-4700.

GRAVITATIONAL SETTLING OF AGGLOMERATE GENERATED BY TWO EQUIVALENT SPHERICAL PARTICLES

E.R. Shchukin, L.A. Uvarova, N.V. Malay, Z.L. Shulimanova

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: malay@bsu.edu.ru

Abstract. It is done mathematical modeling of agglomerate gravitational settling when it consists of two spherical particles. Some formulas are obtained such that they permit to estimate the agglomerate settling both at weak and at strong influence of brownian rotation on its orientation. It is shown that in the case of weak influence of brownian rotation on the agglomerate orientation the transversal shift may be occur simultaneously with the settling in vertical direction.

Key words: agglomerate, spherical particles, brownian rotation.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 511.3

О НУЛЯХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ ИЗ КЛАССА СЕЛЬБЕРГА, ЛЕЖАЩИХ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Аннотация. Получена нижняя оценка числа нулей на коротких промежутках критической прямой для ряда Дирихле из класса Сельберга степени 2.

Ключевые слова: ряды Дирихле, класс Сельберга, нули функций.

1. А. Сельберг в работе [2] определил класс S рядов Дирихле $F(s)$, удовлетворяющих условиям:

1) $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(n)}{n^s}, \Re\, s > 1$;

2) существует неотрицательное целое число m такое, что функция $(s-1)^m F(s)$ целая;

3) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$a(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε, причем $a(1) = 1$;

4) существует функция $\gamma_F(s)$ вида

$$\gamma_F(s) = \varepsilon_1 Q^s \prod_{l=1}^{k} \Gamma(\lambda_l s + \mu_l)\,, \tag{1}$$

где $|\varepsilon_1| = 1\,,\quad Q > 0\,, \lambda_l > 0\,, \mathrm{Re}\mu_l \geq 0$, и такая, что для функции $\Phi(s) = \gamma_F(s)F(s)$ справедливо тождество

$$\Phi(s) = \overline{\Phi(1-\overline{s})}\,;$$

5) при $\sigma > 1$ функция $F(s)$ раскладывается в эйлерово произведение

$$F(s) = \prod_p (1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \cdots)\,,$$

где p пробегает простые числа.

В статье [3] для функции $F(s)$ из класса Сельберга S определена следующая характеристика, которая называется ее степенью:

$$d_F = 2\sum_{l=1}^{k} \lambda_l\,.$$

Пусть $F(s)$ – функция из класса S. Нули функции $F(s)$, совпадающие с полюсами функции $\gamma_F(s)$, называются тривиальными, а остальные – нетривиальными. Известно, что нетривиальные нули находятся в полосе $1-A \le \mathrm{Re} s \le A,\ A = A(F) > 0$ (см. [2]). Одним из направлений исследований в теории рядов Дирихле является изучение распределения их нетривиальных нулей. В частности, это относится к распределению нулей дзета-функции Римана. Она является функцией из класса Сельберга степени 1.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей $\zeta(1/2+it)$ на промежутке $(0,T\,]$. В 1921 году Харди и Литтлвуд [4] доказали, что

$$N_0(T) \gg T\,.$$

В 1942 году А. Сельберг [5] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \gg T \ln T\,.$$

В 2010 году И.С. Резвякова в своей работе [6] рассмотрела задачу о нулях L-функций, соответствующих автоморфным параболическим формам. Была получена правильная по порядку нижняя оценка числа нулей на критической прямой следующего вида:

$$N_0(T, L_f) \gg T \log T\,,$$

где функция L_f при $\mathrm{Re} s > 1$ определяется рядом Дирихле $L_f(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{r(n)}{n^s}$, $r(n) = a(n) n^{\frac{1-k}{2}}$, $a(n)$ – коэффициенты параболической автоморфной формы $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$, $\mathrm{Re}\ z > 0$ целого веса $k \ge 1$ относительно группы $\Gamma_0(D)$ с характером χ по модулю D, которая является собственной функцией всех операторов Гекке T_n, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Пусть $F(s)$ – примитивная функция из класса Сельберга степени 2, то есть не представляется в виде $G_1(s)G_2(s)$, где $G_1(s) \in S$, $G_2(s) \in S$. Введем обозначение $N_0(T, F)$ – число нулей $F(1/2+it)$ на промежутке $(0,T\,]$. Предположим, что коэффициенты Дирихле функции $F(s)$ удовлетворяет трем гипотезам:

I). *При $Y \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n \le Y} |a(n)|^2 = A_F Y + O\left(Y \ln^{-4} Y\right)\,,$$

где $A_F > 0$ – постоянная, зависящая только от F.

II). *Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $Y > 10$, a и b – натуральные числа, $1 \le a, b \le Y^{\varepsilon}, (a,b) = 1$, h – натуральное число, меньше Y. Тогда при $Y \to \infty$ справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{an-bm=h \\ n \le Y}} a(n)\overline{a}(m) \ll Y^{1-\delta}\,, \quad \delta > 0\,.$$

III). *Пусть n_1 и n_2 – произвольные натуральные числа. Тогда*

$$|a(n_1 n_2)| \le |a(n_1)||a(n_2)|\,.$$

Сформулируем наш результат.

Теорема. *Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, δ – число из условия I), $T \geq T_0 > 0$, $T^{1-\delta/2+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$. Пусть $F(s)$ – примитивная функция из класса Сельберга степени 2. Коэффициенты Дирихле $F(s)$ удовлетворяют условиям I)-III). Тогда справедлива оценка*

$$N_0(T+H,F) - N_0(T,F) \gg H \ln T\,.$$

□ Определим функцию $f(t)$ равенством

$$f(t) = \left(\rho_F\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)^{-1/2} F\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad \text{где} \quad \rho_F(\sigma+it) = \overline{\gamma}_F(1-\sigma-it)\gamma_F^{-1}(\sigma+it),$$

$\gamma_F(\sigma+it)$ определяется формулой (1). Функция $f(t)$ принимает вещественные значения при $t \in \mathbb{R}$. При этом нули нечетного порядка функции $f(t)$ являются нулями функции $F(s)$ на критической прямой.

Определим числа $\alpha(v)$ равенством

$$\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{\alpha(v)}{v^s} = \prod_p \left(1 - \frac{a(p)}{2p^s}\right),$$

где $a(p)$ – коэффициенты Дирихле функции $F(s)$, и положим

$$\beta(\nu) = \alpha(\nu)\max\left(1 - \frac{\ln\nu}{\ln X},\ 0\right), \qquad X = T^{\varepsilon}\,.$$

Определим аналитическую функцию $\varphi(s)$ формулой

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \beta(\nu)\nu^{-s}.$$

Пусть $h = c_1/\ln T$, $h_1 = h\sqrt{5\ln\ln T}$, c_1 – положительная постоянная. Рассмотрим два интеграла

$$j_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left| f(t+u)\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+u)\right)\right| du\,,$$

$$j_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} f(t+u) \left|\varphi^2\left(\frac{1}{2}+i(t+u)\right)\right| du \right|\,.$$

Положим E – множество точек $t \in (T,\ T+H)$ таких, что выполняется: $j_1(t) > j_2(t)$, $\mu(E)$ – мера множества E. Справедливо неравенство $I_3 \leq I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_E j_1(t)dt\,, \quad I_2 = \int_T^{T+H} j_2(t)dt, \quad I_3 = \int_T^{T+H} j_1(t)dt\,.$$

Дословно повторяя соответствующее рассуждение из [1, §6.3], приходим к неравенству $I_3 \geq c_2 hH$, $c_2 > 0$ – абсолютная постоянная.

Для получения верхних оценок интегралов I_1 и I_2 мы будем пользоваться следующим приближенным функциональным уравнением. Пусть $M \geq T$, $T < t \leq T + H$. Справедливо равенство

$$F\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = \sum_{\lambda} \frac{A(\lambda)\lambda^{-it}e^{-\frac{\lambda}{M}}}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+\rho_F\left(\frac{1}{2}+it\right)\sum_{\lambda}\frac{\overline{A(\lambda)}\lambda^{it}}{\sqrt{\lambda}}\left(1-e^{-\frac{Q_1^2t^2}{M\lambda}}\right)+O\left(\frac{M^{1/4+\varepsilon}}{T^{3/4}}\right), \qquad (2)$$

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{\nu_1 n}{\nu_2}=\lambda} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)a(n)}{\nu_2}\,.$$

Доказательство последнего факта проводится аналогично тому, как было получено уравнение для $F\,(1/2+it)$ в работе [7]. Оценим I_1 сверху. Применяем к $F\,(1/2+it)$ уравнение (2) и пользуемся неравенством Коши. Затем выделяем «диагональные» и «недиагональные» слагаемые, которые оцениваем при условии справедливости гипотез I)-III), получим $I_1 \leq c_3\mu(E)^{1/2}hH^{1/2}$, $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная. Интеграл I_2 состоит из «диагональной» и «недиагональной» частей. Пользуясь рассуждениями из [1, §6.3] с учетом гипотез I)-III), находим, что $I_3 \geq 2I_2$, $\mu(E) \gg H$. Поэтому число нулей нечетного порядка функции $f(t)$ и, следовательно, функции $F(1/2+it)$ на отрезке $T \leq t \leq T+H$ оценивается снизу величиной порядка

$$\mu(E)h^{-1} \gg H\ln T\,. \quad \blacksquare$$

Литература

1. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / М.: Физматлит, 1994. – 376 с.
2. Selberg A. Old and new conjectures about class of Dirichlet series / Collected papers. – 1991. – 2. – P. 47-63 / Berlin: Springer-Verlag, 1991.
3. Conrey J.B., Ghosh A. On the Selberg Class of Dirichlet Series: small degrees // Duke Math. J. – 1993. – 72l;3. – P.673-695.
4. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeroes of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Z. – 1921. – 10. – P.283-317.
5. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid.Akad.Oslo. – 1942. – 10. – P.1-59.
6. Резвякова И.С. О нулях на критической прямой L-функций, соответствующих автоморфным параболическим формам // Математические заметки – 2010. – 88;3. – С.456-474.
7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 1996. – 60;4.

ON ZEROS OF LINEAR COMBINATIONS OF DIRICHLET's SERIES OF SELBERG's CLASS BEING ON SHORT INTERVALS OF CRITICAL LINE

D.B. Demidov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Demidovnext@yandex.ru

Abstract. New estimate from below for the number of zeros on short intervals on the critical line connected with Dirichlet's series of Selberg's class with the power 2 is found.

Key words: Dirichlet's series, Selberg's class, zeros of functions.

УДК 519.63

НЕЯВНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ И ФАКТОРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Дм. Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина,
e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua, kosyanovdima@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена новая неявная безытерационная конечно-объёмная схема с расщеплением и факторизацией для численного интегрирования системы уравнений Эйлера на неструктурированных сетках в задачах моделирования невязких течений сжимаемого газа. Представлены результаты численного моделирования обтекания аэродинамического профиля NACA0012 потоком сжимаемого газа.

Ключевые слова: неявная схема, расщепление, факторизация, метод контрольного объёма, невязкие течения газа, неструктурированная сетка.

1. Введение. Для численного решения начально-краевых задач газогидродинамики с помощью сеточных методов в областях сложной формы удобно использовать неструктурированные сетки. При моделировании стационарных физических полей с помощью методов установления по маршевой координате для ускорения сходимости численного решения целесообразно применять неявные схемы [2]. В работе [3] впервые для произвольной неструктурированной сетки разработана неявная безытерационная схема с расщеплением и факторизацией по координатным и характеристическим направлениям, использующая пространственные переключатели. В работах [4, 5] на её основе предложены методы повышенного порядка точности для численного моделирования невязких течений жидкости и газа. В настоящей работе представлена новая форма записи расщепления неявного оператора без применения переключателей, а также результаты численного моделирования невязкого трансзвукового течения газа возле профиля NACA0012.

2. Основные уравнения. Неявная схема с расщеплением и факторизацией. В двумерном случае в декартовых координатах система уравнений Эйлера, описывающая течения невязкого сжимаемого совершенного газа при отсутствии массовых сил, может быть представлена в дивергентной форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E(Q)}{\partial x}+\frac{\partial F(Q)}{\partial y}=0, \quad (x,y)\in\Omega, \quad t>0, \quad Q=(\rho,\rho u,\rho v,\rho h)^T, \tag{1}$$

$$E=\left(\rho u,\rho u^2+p,\rho uv,(\rho h+p)\,u\right)^T, \qquad F=\left(\rho v,\rho uv,\rho v^2+p,(\rho h+p)\,v\right)^T,$$

$$h=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2+v^2}{2}\ .$$

Здесь Ω, x, y, t – многосвязная расчётная область, декартовы координаты и время; Q, E, F – вектор консервативных переменных и векторы потоков; ρ, u, v, p – плотность, компоненты

вектора скорости и статическое давление газа; γ, h – показатель адиабаты и полная энергия единицы массы газа.

В момент $t=0$ задано начальное условие $Q(x,y,0)=\varphi_1(x,y)$, $(x,y)\in\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, а при $t>0$ – граничные условия, разновидность которых приведена в [2]. Дискретизация расчётной области выполняется с помощью согласованной неструктурированной сетки $G=\bigcup\limits_{i=1}^{N_G} P_i$, где P_i – ячейка сетки, N_G – количество ячеек сетки. Система уравнений (1) имеет гиперболический тип, поэтому матрицы Якоби $A=\dfrac{\partial E}{\partial Q}$ и $B=\dfrac{\partial F}{\partial Q}$ векторов потоков можно привести к диагональному виду:

$$\Lambda_x = L_x^{-1}AL_x = \mathrm{diag}(u-a,u,u,u+a)\,,\ \Lambda_y = L_y^{-1}BL_y = \mathrm{diag}(v-a,v,v,v+a)\,,\ a=\sqrt{\gamma p/\rho}\,.$$

Начально-краевая задача для (1) решается с применением метода контрольного объёма, в качестве которого выбирается ячейка сетки. После интегрирования по $P_i\in G, i=\overline{1,N_G}$ и применения теоремы Грина система уравнений (1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\overline{Q}_i(t)=R_i(Q)\,,\quad \overline{Q}_i(t)=\frac{1}{S_i}\iint\limits_{P_i}Q(x,y,t)dxdy\,,\quad R_i(Q)=-\frac{1}{S_i}\oint\limits_{L_i}(En_x+Fn_y)dL\,, \qquad (2)$$

где L_i – граница i-й ячейки, состоящая из рёбер $\Gamma_j^i, j=\overline{1,N_i}$.

На временной оси задаётся сетка узлов вида $t_n=\Delta t\cdot n$, где $n=0,1,\ldots$ – номер временного слоя. Значение шага интегрирования вычисляется с помощью выражения $\Delta t=\frac{\nu\cdot d}{\max\limits_{i=\overline{1,N_G}}(\|\Lambda_x\|,\|\Lambda_y\|)}$, в котором $d=\min\limits_{i=\overline{1,N_G}}\min\limits_{j=\overline{1,N_i}}|\Gamma_j^i|$ – минимальный линейный размер ячеек разностной сетки, $|\Gamma_j^i|$ – длина ребра ячейки, а ν – число Куранта, значение которого выбирается из условия удовлетворения устойчивости схемы.

В системе уравнений (2), записанной в момент времени $t=t_{n+1}$, выполним аппроксимацию производной по времени трёхслойным разностным выражением вида

$$\frac{3\delta\overline{Q}_i^{n+1}-\delta\overline{Q}_i^{n}}{2\Delta t}=\left.\frac{d\overline{Q}}{dt}\right|_i^{n+1}+O\left(\Delta t^2\right),\quad \delta\overline{Q}_i^{n+1}=\overline{Q}_i^{n+1}-\overline{Q}_i^{n},\quad \overline{Q}_i^{k}=\overline{Q}_i\left(t_k\right)$$

а также проведём линеаризацию векторов потоков:

$$E^{n+1}\approx E^n+A|_{t=t_n}\delta Q^{n+1},\quad F^{n+1}\approx F^n+B|_{t=t_n}\delta Q^{n+1},$$

$$\delta Q^{n+1}=Q(x,y,t_{n+1})-Q(x,y,t_n)=Q^{n+1}-Q^n.$$

После учёта описанных предположений, систему уравнений (2) с точностью до величины $O\left(\Delta t^2\right)$ можно записать в виде

$$\delta\overline{Q}_i^{n+1}+\mu_i\oint\limits_{L_i}(An_x+Bn_y)|_{t=t_n}\delta Q^{n+1}dL=\frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^{n}+\frac{2}{3}\Delta tR_i^n,\quad \mu_i=\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}. \qquad (3)$$

При моделировании стационарных решений методом установления значения $\delta\overline{Q}_i^{n+1}$ и δQ^{n+1} должны стремиться к 0 при увеличении номера временного слоя. В таком

случае порядок точности по пространству неявной схемы определяется порядком аппроксимации явного оператора R_i^n. Отсюда, интеграл в левой части (3) целесообразно вычислить приближенно с помощью формулы прямоугольников. Разложим матрицы Якоби на «положительную» и «отрицательную» части

$$C_\psi = C_\psi^+ + C_\psi^-, \quad C_\psi^\pm = L_\psi \Lambda_\psi^\pm L_\psi^{-1}, \quad \Lambda_\psi^\pm = 0.5\Lambda_\psi \pm 0.5|\Lambda_\psi|, \quad C_{\psi=x}{=}A, \quad C_{\psi=y}{=}B,$$

где $|\Lambda|$ – диагональная матрица, состоящая из модулей элементов матрицы Λ. В результате, получим,

$$\oint\limits_{L_i} (An_x + Bn_y)|_{t=t_n} \delta Q^{n+1} dL \approx \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{\psi=x,y} |\Gamma_j^i| n_{\psi,j} \left(\left(C_\psi^+ + C_\psi^- \right) \delta Q^{n+1} \right)_j .$$

Для определения значений $C_\psi^\pm \delta Q^{n+1}$ на рёбрах ячейки воспользуемся информацией про области влияния дифференциального уравнения гиперболического типа. Слагаемые $C_\psi^+ \delta Q^{n+1}$ вычислим приближенно по значениям вектора неизвестных в смежной ячейке, расположенной левее текущего ребра вдоль координатного направления ψ, а слагаемые $C_\psi^- \delta Q^{n+1}$ – по значениям в смежной ячейке, расположенной правее.

Для явной записи в вид схемы номера ячейки произвольной неструктурированной сетки предложено дополнительно раскладывать каждую из компонент вектора нормали j-го ребра на «положительную» и «отрицательную» части

$$n_{\psi,j} = n_{\psi,j}^+ + n_{\psi,j}^-, \quad n_{\psi,j}^\pm = 0.5 n_{\psi,j} \pm 0.5|n_{\psi,j}|, \quad \psi = x, y,$$

что позволило записать следующие приближения (с первым порядком точности):

$$n_{\psi,j}^\pm \left(C_\psi^\pm \delta Q^{n+1} \right)_j \approx n_{\psi,j}^\pm C_{\psi,i}^\pm \delta \overline{Q}_i^{n+1}, \quad n_{\psi,j}^\mp \left(C_\psi^\pm \delta Q^{n+1} \right)_j \approx n_{\psi,j}^\mp C_{\psi,i_j}^\pm \delta \overline{Q}_{i_j}^{n+1}.$$

В представленных выражениях, уже в явном виде, содержатся номер i текущей и номер i_j смежной по j-му ребру ячеек. С учётом всех промежуточных действий систему уравнений (3) можно записать в виде

$$\left(I + \tilde{A}^+ + \tilde{A}^- + \tilde{B}^+ + \tilde{B}^- \right) \delta \overline{Q}^{n+1} = f^n, \tag{4}$$

где I – единичный оператор; f^n – правая часть;

$$\left(\tilde{C}_\psi^\pm \delta \overline{Q}^{n+1} \right)_i = \mu_i \sum_{j=1}^{N_i} |\Gamma_j^i| n_{\psi,j}^\pm C_{\psi,i}^\pm \delta \overline{Q}_i^{n+1} + \mu_i \sum_{j=1}^{N_i} |\Gamma_j^i| n_{\psi,j}^\mp C_{\psi,i_j}^\pm \delta \overline{Q}_{i_j}^{n+1}.$$

Неявный оператор (4) представлен в виде расщепления на локально-одномерные операторы, учитывающие координатные и характеристические направления. Т.к. $\tilde{C}_\psi^\pm \delta \overline{Q}^{n+1}{=}O\left(\Delta t\right)$, то с ошибкой $O\left(\Delta t^2\right)$ его можно представить в факторизованном виде:

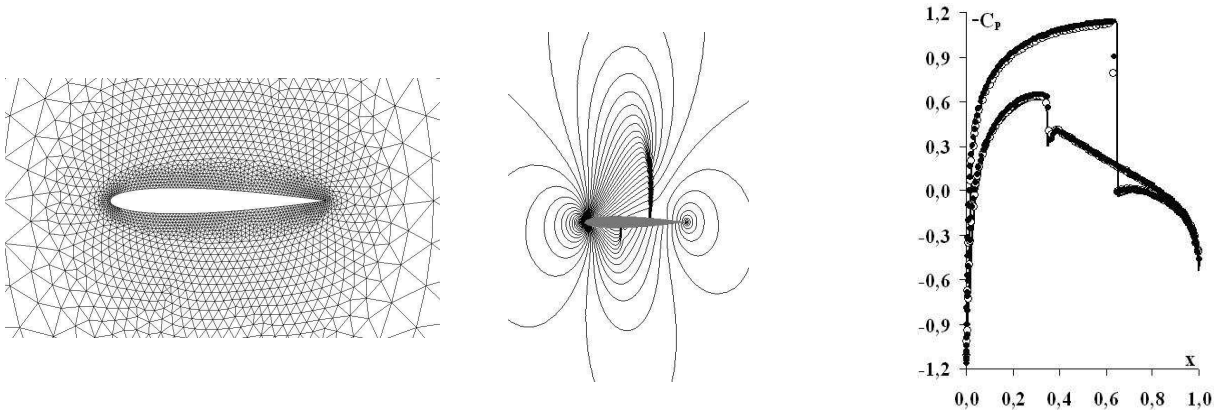
$$\left(I + \tilde{A}^+ \right) \left(I + \tilde{A}^- \right) \left(I + \tilde{B}^+ \right) \left(I + \tilde{B}^- \right) = f^n$$

Разностная схема в дробных шагах имеет вид:

Шаг 0.	$f^n = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}^n + \frac{2}{3}\Delta t R^n;$	Шаг 2a.	$\left(I + \tilde{B}^+\right)\delta\overline{Q}^{n+3/4} = \delta\overline{Q}^{n+2/4};$
Шаг 1a.	$\left(I + \tilde{A}^+\right)\delta\overline{Q}^{n+1/4} = f^n;$	Шаг 2b.	$\left(I + \tilde{B}^-\right)\delta\overline{Q}^{n+1} = \delta\overline{Q}^{n+3/4};$
Шаг 1b.	$\left(I + \tilde{A}^-\right)\delta\overline{Q}^{n+2/4} = \delta\overline{Q}^{n+1/4};$	Шаг 3.	$\overline{Q}^{n+1} = \overline{Q}^n + \delta\overline{Q}^{n+1}.$

Для рёбер ячейки, лежащих на границе расчётной области, значение $\delta\overline{Q}_{i_j}$ часто принимают равным 0. Способ эффективного решения систем уравнений для шагов 1a, 1b, 2a, 2b представлен в [3]. Для вычисления правой части на шаге 0 с высоким порядком точности по пространству используется кусочно-полиномиальная реконструкция функций с многочленом в форме Тейлора [4, 5].

3. Численные результаты. Рассмотрена задача обтекания профиля NACA0012 (рис. 1 а) набегающим потоком невязкого сжимаемого газа с числом Маха $M_\infty = 0.8$ и углом $\alpha_\infty = 1.25$ [5]. Внешняя граница расчётной области удалена на расстояние 6-ти длин хорды профиля. Дискретизация выполнена с помощью «грубой» и «подробной» неструктурированных сеток, состоящих из 5106 (80 интервалов разбиения на каждой стороне профиля) и 20652 (160 интервалов разбиения) треугольных ячеек соответственно. Все результаты получены с применением кусочно-квадратичной реконструкции на дробном шаге 0. Число Куранта ν равно 10.



а) б) в)

Рис. 1. Разностная сетка и результаты расчёта: (а) – дискретизация расчётной области; (б) – изолинии коэффициента давления (подробная сетка); (в) – коэффициент давления на поверхности профиля.

На рис. 1 в прозрачными и закрашенными маркерами отмечены результаты на грубой и подробной сетках соответственно, а сплошной линией – результаты работы [5] (структурированная сетка с четырёхугольными ячейками; количество интервалов разбиения – 280). Полученные результаты хорошо соответствуют имеющимся представлениям о структуре трансзвукового течения со скачками уплотнения. Положение и интенсивность скачков одинаково хорошо моделируются как на нижней, так и на верхней поверхности профиля даже для грубой сетки. Нефизических осцилляций численного решения вблизи разрывов не наблюдается.

4. Выводы. В работе представлена новая неявная безытерационная конечно-объёмная схема повышенного порядка точности с расщеплением и факторизацией для численного интегрирования системы уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при моделировании невязких течений сжимаемого газа. Результаты численного моделирования невязкого трансзвукового течения газа возле профиля NACA0012 показали высокую точность и устойчивость предложенного метода. Дальнейшие направления развития схемы связаны с задачами моделирования пространственных вязких нестационарных течений газа в областях сложной формы.

Литература

1. Русанов А.В., Ершов С.В. Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / Харьков: Ин-т пробл. машиностроен. НАН Украины, 2008. – 275 с.
2. Русанов А.В., Косьянов Д.Ю. Неявная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках // Проблемы машиностроения. – 2010. – 13; 3. – С.30-37.
3. Русанов А.В., Косьянов Д.Ю., Косьянова А.И. Использование неявной схемы расщепления для численного моделирования трансзвуковых течений идеального газа // Вестник двигателестроения. – 2011. – 25; 2. – С.20-24.
4. Русанов А.В., Косьянов Д.Ю. Использование неявной схемы расщепления для моделирования течений невязкой несжимаемой жидкости // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – 56; 2/4. – С.67-71.
5. Pulliam T.H., Barton J.T. Euler computations of AGARD working group 07. Airfoil test cases // AIAA Paper. – 1985. – 18. – P.1-34.

IMPLICIT HIGH-ORDER SCHEME WITH SPLITTING AND FACTORIZATION FOR NUMERICAL SIMULATION OF INVISCID IDEAL GAS FLOWS ON UNSTRUCTURED GRIDS

A.V. Rusanov, D.Yu. Kosyanov

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering problems NAS of Ukraine,
Dm. Posharskoho St., 2/10, Kharkov, 61046, Ukraine,
e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua, kosyanovdima@gmail.com

Abstract. New implicit non-iterated finite-volume scheme with splitting and factorization for the numerical integration of the Euler equations on unstructured grids for modeling inviscid compressible gas flows is under consideration. Numerical results of compressible gas transonic flow over the airfoil NACA0012 simulation are presented.

Key words: implicit scheme, splitting, factorization, finite volume method, inviscid flows, unstructured grid.

УДК 535.41+654.91

СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ГАУССОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, СО СТАТИСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫМИ МОДАМИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

А.С. Мазманишвили

Сумской государственный университет,
г. Сумы, Украина, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Аннотация. Вычислена характеристическая функция распределения вероятностей фотоотсчетов квантового неполяризованного гауссового оптического излучения со статистически связанными модами поляризации, который описывается нормальным гауссовским процессом.

Ключевые слова: квантовое оптическое излучение, процесс Орнштейна-Уленбека, моды поляризации.

1. Постановка задачи. Излучение оптических лазеров часто моделируется узкополосным гауссовским процессом [1, 2]. При возбуждении таким излучением одномодового световода (СВ) с круговым поперечным сечением и осесимметричным распределением показателя преломления в нем распространяются в направлении оси две фундаментальные моды HE_{11}, электрические поля которых ортогонально поляризованы вдоль главных осей x и y ($HE_{11}^x - HE_{11}^y$ моды). Если при введении в одномодовый СВ начальное состояние излучения обладало свойствами линейно-поляризованного излучения, то это свойство не сохраняется уже на достаточно коротких расстояниях и, таким образом, излучение оптического лазера становится эллиптически поляризованным.

Появление двух мод с ортогональными поляризациями обусловлено наличием нерегулярностей в волокне (тепловых, акустических и механических возмущений вдоль волокна, изгибов, технологических дефектов и прочее) [2]. При этом даже весьма малые возмущения значимо «связывают» моды, способствуя перекачке энергии из одной компоненты поляризации в другую. Очевидно, что статистическая связь между поляризационными модами определяется погонной плотностью перечисленных возмущений (нерегулярностей).

При наблюдении оптического излучения на выходе одномодового СВ с помощью фотодетектора регистрируются отсчеты, т.е. электрические импульсы на временном интервале наблюдения [1, 3, 4].

Представляет интерес нахождение статистики фотоотсчетов выходного излучения с учетом статистической связи поляризационными компонентами, обусловленными нерегулярностями вдоль СВ. Если располагать функцией корреляции между поляризационными компонентами излучения, связанной с плотностью нерегулярностей в волокне, то по статистике фотоотсчетов можно найти количественные характеристики таких нерегулярностей вдоль СВ и, следовательно, выработать требования к качеству выпускаемых оптических кабелей и установить допуски на их параметры при прокладке.

2. Статистически независимые моды поляризации. Известное решение [4, 5] задачи о статистике фотоотсчетов неполяризованного гауссового излучения получено для случая,

когда обе компоненты поляризации статистически независимы. Рассмотрим случай произвольной статистической связи между поляризационными компонентами в предположении, что статистическая связь между ними определяется воздействием неоднородностей СВ.

Пусть $\alpha_n(t)$ – комплексная амплитуда [5,6] компонентов ($n = 1,\ 2$) поляризации излучения. В рамках модели гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной ν примем, что каждый из компонентов является нормальным марковским процессом [2, 7], при этом корреляционная матрица интенсивностей $S = \langle \alpha(t) \otimes \alpha^*(t) \rangle$ равна

$$S \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho^* \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \\ \rho \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} & \sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\sigma_n = \langle |\alpha_n(t)|^2 \rangle$ – интенсивности поляризационных компонент, ρ – коэффициент корреляции ($0 \leqslant |\rho| \leqslant 1$) между компонентами поляризации, $\langle\, . \,\rangle$ – знак нахождения математического ожидания.

Для одномодового (однокомпонентного) гауссовского излучения с интенсивностью σ_1 известно выражение, описывающее производящую функцию (ПФ) числа фотоотсчетов

$$Q_1(\lambda, \sigma_1) \;=\; \langle \exp\left(-\lambda \Omega_1\right) \rangle, \tag{2}$$

где λ – производящий параметр, Ω_1 – энергия оптического поля, запасенная в компоненте поляризации с ортом $\vec{e}_1$,

$$\Omega_1 \;=\; \int\limits_0^T dt\, |\vec{e}_1 \alpha_1(t)|^2 . \tag{3}$$

Произвоящая функция $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ для гауссовского излучения с лоренцевским контуром линии с шириной ν имеет следующий вид [3, 5, 6]

$$Q_1(\lambda, \sigma_1) \;=\; \frac{4\nu r_1 \exp\left(\nu T\right)}{(r_1 + \nu)^2 \exp\left(r_1 T\right) - (r_1 - \nu)^2 \exp\left(-r_1 T\right)} . \tag{4}$$

При этом $r_1 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_1}$ и T – длительность интервала наблюдения.

Выражение для другой компоненты имеет аналогичный вид

$$Q_2(\lambda, \sigma_2) \;=\; \langle \exp\left(-\lambda \Omega_2\right) \rangle \;=\; \frac{4\nu r_2 \exp(\nu T)}{(r_2 + \nu)^2 \exp\left(r_2 T\right) - (r_2 - \nu)^2 \exp\left(-r_2 T\right)}, \tag{5}$$

где $\Omega_2 = \int\limits_0^T dt\, |\vec{e}_2 \alpha_2(t)|^2$ с ортом $\vec{e}_2$, $r_2 = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma_2}$.

С помощью ПФ $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ и $Q_2(\lambda, \sigma_2)$ можно извлечь информацию о распределении амплитуд вероятностей $\{P(m)\}$ регистрации m фотоотсчетов одной (первой) из компонент

$$P_1(m) \;=\; \left\langle \frac{\Omega_1^m}{m!} \exp(-\Omega_1) \right\rangle \tag{6}$$

и аналогично для второй моды поляризации.

Распределение амплитуд вероятностей (6) является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ $Q_1(\lambda, \sigma_1)$ с помощью многократного дифференцирования

$$P_1(m) \;=\; \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} Q_1(\lambda, \sigma_1) \Bigg|_{\lambda=1} . \tag{7}$$

С целью избежать нахождения производных высоких порядков можно воспользоваться интегральным представлением Коши для аналитических функций

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{8}$$

с контуром интегрирования, охватывающим точку z.

Из (8) вытекает удобная для численных расчетов формула, описывающая статистику фотоотсчетов поляризационной компоненты одномодового излучения

$$P_1(m) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Q_1\left(1+e^{i\varphi},\sigma_1\right)d\varphi\,, \tag{9}$$

которая следует из (8) с помощью замены $\xi = \exp(i\varphi)$. Аналогичную формула получается и для $P_2(m)$.

3. Произвольная статистическая связь между модами поляризации. Для описания двухкомпонентного оптического излучения воспользуемся матричным аналогом интегральной формулы Коши. Тогда производящая функция $Q_{12}(\lambda)$ отсчетов неполяризованного излучения может быть записана в виде

$$Q_{12}(\lambda) \;=\; \det\left(\frac{1}{2\pi i}\oint ds(s-S)^{-1}Q\left(\lambda,s\right)\right) \tag{10}$$

с 2×2-матрицей Стокса излучения. В этом выражении контур интегрирования в s-плоскости должен охватывать полюса резольвенты $(s-S)^{-1}$. Пользуясь известными методами [7], рассмотрим (10) в представлении, в котором матрица Стокса (1) диагональна, т.е.

$$S \Rightarrow S_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

с собственными числами матрицы S

$$s_{1,2} \;=\; \frac{1}{2}\left((\sigma_1+\sigma_2)\pm\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+4|\rho|^2\sigma_1\sigma_2}\right). \tag{12}$$

При наличии статистической связи между модами поляризации $|\rho|\neq 0$ собственные числа s_1 и s_2 будут определять формирование статистики фотоотсчетов.

Вычисляя, с учетом (11), матричные элементы в формуле (10) найдем, что

$$Q_{12}(\lambda) \;=\; \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\oint ds(s-s_1)^{-1}Q_1\left(\lambda,s\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\oint ds(s-s_2)^{-1}Q_2\left(\lambda,s\right) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тогда получим окончательно для искомой производящей функции

$$Q_{12}(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda,s_1)\,Q_2(\lambda,s_2)\,. \tag{14}$$

Выражение (14) описывает статистику фотоотсчетов неполяризованного излучения в случае наличия статистической связи между модами поляризации. Из него вытекает, что в случае

отсутствия статистической связи, когда $|\rho| = 0$ и $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_2$, ПФ $Q_{12}(\lambda)$ есть простое произведение парциальных ПФ

$$Q_{12}(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda,\sigma_1)\,Q_2(\lambda,\sigma_2) \;= \tag{15}$$

$$= \;\frac{4\nu r_1 \exp(\nu T)}{(r_1+\nu)^2 e^{r_1 T} - (r_1-\nu)^2 e^{-r_1 T}} \cdot \frac{4\nu r_1 \exp(\nu T)}{(r_2+\nu)^2 e^{r_2 T} - (r_2-\nu)^2 e^{-r_2 T}}\;,$$

отвечающих каждой из мод поляризации. При этом распределение $P_{12}(m)$ представляет собой свертку парциальных распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\langle m\rangle_1 = \sigma_1 T$ и $\langle m\rangle_2 = \sigma_2 T$ соответственно, вычисляемых согласно (4), (5) и (10). В другом предельном случае полной статистической связи, когда $|\rho| = 1$, статистика фотоотсчетов эффективно отвечает одной регистрируемой поляризационной моде с суммарной интенсивностью $s_1 = \sigma_1 + \sigma_2$. При этом $s_2 = 0$, что дает $Q_2(\lambda,\sigma_2) = 1$ и $P_2(m=0) = 1$, т.е. во второй поляризационной компоненте с вероятностью, равной единице, имеет место только «отсчет» $m = 0$.

4. Анализ распределения вероятностей. В общем случае частичной статистической связи между модами поляризации, когда $0 \leqslant |\rho| \leqslant 1$, ПФ $Q_{12}(\lambda)$ есть произведение ПФ $Q_1(\lambda,\sigma_1)$ и $Q_2(\lambda,\sigma_2)$, отвечающих каждой из мод поляризации, но с эффективными интенсивностями s_1 и s_2, определяемыми согласно (12).

Распределение амплитуд вероятностей $P_{12}(m)$ является взвешенным распределением Пуассона, оно может быть получено из ПФ $Q_{12}(\lambda)$:

$$P_{12}(m) \;=\; \frac{(-1)^m}{m!}\,\frac{d^m}{d\lambda^m}\,Q_{12}(\lambda)\Big|_{\lambda=1}\;. \tag{16}$$

При этом распределение $P_{12}(m)$ фотоотсчетов является сверткой парциальных распределений $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\langle m\rangle_1 = s_1 T$ и $\langle m\rangle_2 = s_2 T$ соответственно

$$P_{12}(m) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P_1(n) P_2(m-n)\,, \qquad m = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,, \tag{17}$$

которые в случае $|\rho| \neq 0$ отличаются от распределений амплитуд вероятностей $P_1(m)$ и $P_2(m)$ со средними $\langle m\rangle_1 = \sigma_1 T$ и $\langle m\rangle_2 = \sigma_2 T$.

Первый момент распределения $P_{12}(m)$ определяется формулой $\langle m\rangle_{12} = (\sigma_1+\sigma_2)T$. Для дисперсии Δ_{12} распределения числа фотоотсчетов найдем, следуя (15),

$$\Delta_{12} = \langle m^2\rangle_{12} - \langle m\rangle_{12}^2 = \langle m\rangle_{12} + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2|\rho|^2\right)\frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2}\;. \tag{18}$$

Поскольку при $\rho = 0$ имеем

$$\Delta_{12} \;=\; \Delta_1 + \Delta_2 \;=\; \sigma_1 T + \sigma_1^2\,\frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2} + \sigma_2 T + \sigma_2^2\,\frac{2\nu T - 1 + e^{-2\nu T}}{4\nu^2}\;, \tag{19}$$

и дисперсия Δ_{12} (19) есть сумма парциальных дисперсий Δ_1 и Δ_2, то в дисперсии Δ_{12} (18) содержится слагаемое $\sigma_1\sigma_2|\rho|^2(2\nu T - 1 + e^{-2\nu T})/2\nu^2$, являющееся дополнительным и отвечающее статистической связи между модами поляризации. Статистическая связь между модами приводит к уширению в целом распределения амплитуд $P_{12}(m)$ при неизменном его первом моменте.

Литература

1. Шереметьев А.Г. Статистическая теория лазерной связи / М.: Связь, 1974.
2. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп / М.: Радио и связь, 1987.
3. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / К.: Наукова думка, 1987.
4. Перина Я. Когерентность света / М.: Мир, 1974.
5. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М.: Мир, 1974.
6. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика отсчетов // в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика» / М.: Мир, 1974.
7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления / М.: Наука, 1984.

PHOTOCOUNTS STATISTICS OF NONPOLARIZED GAUSSIAN OPTICAL RADIATION

A.S. Mazmanishvili

Sumy State University,
Sumy, Ukraine, e-mail: mazmanishvili@gmail.com

Abstract. Photocounts statistics of nonpolarized Gaussian optical radiation is analytically found in the case when statistical connection between polarization modes exists.

Key words: quantum optical radiation, Ornstein-Uhlenbeck's process, polarization modes.

УДК 531.1

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ БОЗЕ-ГАЗА МЕТОДОМ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ[15)]

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В сообщении представлен простой метод вычисления на основе производящей функции двух комбинаторных сумм, встречающихся в статистической механике Бозе-газа с термодинамически устойчивым взаимодействием произвольного вида при выделении кинематической части в статистической сумме.

Ключевые слова: биномиальные коэффициенты, производящая функция, оператор сдвига.

Здесь представлено вычисление двух сумм специального вида, составленных из биномиальных коэффициентов. Эти суммы естественным образом возникают при суммировании по диаграммам, которые появляются при построении квантвого вириального разложения [1] для Бозе-газа. Метод вычисления основан на применении специальной производящей функции. Аналитический проем, основанный на применении оператора сдвига, который используется представляется интересным для дальнейшего его обобщения.

Теорема 1. *Пусть функция* $G : \mathbb{N}_+^3 \mapsto \mathbb{N}_+$ *определяется формулой*

$$G(n,m,l) = \sum_{\substack{k\,:\,k\leqslant\min\{m,l\}\\ k\geqslant\max\{l-n,0\}}} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k}$$

при $n+m \geqslant l$. *Тогда*

$$G(n,m,l) = \binom{n+m}{l}.$$

□ Легко проверить, что для значений функции G справедливо следующее представление

$$G(n,m,l) = \frac{1}{l!}\left\{\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial^{l-k}}{\partial y^{l-k}}x^m y^n\right\}\Bigg|_{x=y=1},$$

так как оно обращается в нуль при $l > n+m$. Из этого представления следует

$$G(n,m,l) = \frac{1}{l!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^l x^m y^n\right\}\Bigg|_{x=y=1}.$$

[15]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

Введем производящую функцию

$$\varphi(z;m,n) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} z^l G(n,m,l)\,, \quad z \in \mathbb{Z}\,.$$

Эта функция вычисляется на основе свойств оператора сдвига,

$$\varphi(z;m,n) = \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^l x^m y^n \right\}\Bigg|_{x=1,y=1} = \left\{ \exp\left[z \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] x^m y^n \right\}\Bigg|_{x=1,y=1} =$$

$$= \left\{ \exp\left[z \frac{\partial}{\partial x} \right] x^m \right\}_{x=1} \times \left\{ \exp\left[z \frac{\partial}{\partial y} \right] y^n \right\}_{y=1} = (1+z)^m (1+z)^n = (1+z)^{m+n}\,,$$

так как псевдодифференциальные операторы $\exp[z\partial/\partial x]$ и $\exp[z\partial/\partial y]$ являются операторами сдвига аргумента в применение, соответственно, к произвольным аналитическим функциям f от $x \in \mathbb{C}$ и g от $y \in \mathbb{C}$, $\exp[z\partial/\partial x]\, f(x) = f(x+z)$, $\exp[z\partial/\partial y]\, g(y) = g(y+z)$. Из явного вида производящей функции следует формула для $G(n,m,l)$, указанная в формулировке теоремы. ■

Теорема 2. *Пусть функция* $G : \mathbb{N}_+^3 \mapsto \mathbb{Z}$ *определяется формулой*

$$G(n,m,l) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}] \frac{(m+k+l)!}{(k+l)!}\,.$$

Тогда

$$G(n,m,l) = \theta(n-m)(-1)^n \frac{m!}{(m-n)!} \frac{(l+m)!}{(l+n)!}\,, \qquad \theta(k) = \begin{cases} 1\,; & r \geqslant 0\,, \\ 0\,; & k < 0\,. \end{cases}$$

□ Имеет место представление

$$\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!} = \left(\frac{d^m}{dx^m}\, x^{k+l+m} \right)_{x=1}\,.$$

Следовательно

$$G(n,m,l) = \left(\frac{d^m}{dx^m}\, x^{l+m} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k \right)_{x=1} = \left(\frac{d^m}{dx^m}\, x^{l+m} (1-x)^n \right)_{x=1}\,.$$

Явное дифференцирование в последнем выражении приводит к формуле

$$G(n,m,l) = \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} (1-x)^n \right) \left(\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} x^{m+l} \right) \right]_{x=1} =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{(m+l)!}{(k+l)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{k+l} (1-x)^{n-k} \right]_{x=1}\,.$$

При $n > m$ в последнем выражении все слагаемые равны нулю, а при $n \leqslant m$ отлично от нуля только последнее слагаемое $(-1)^n n! \binom{m}{n} \frac{(m+l)!}{(n+l)!}$. ■

Литература

1. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики / М.: Наука, 1977. – 368 с.

CALCULATION OF SOME COMBINATORIC SUMS OF BOSE-GAS STATISTICAL MECHANICS BY GENERATION FUNCTION METHOD

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is proposed the simple method of calculation of two special combinatoric sums on the basis of generation function. These sums are appeared in statistical mechanics of Bose-gas with arbitrary thermodynamically stable interaction when the kinematic part is extracted from the partition function.

Key words: binomial coefficients, generation function, shift operator.

УДК 517.63

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ

Е. А. Мирошников*, **В. В. Яновский***,****

*Харьковский национальный университет им. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина, e-mail: Skuull@jandex.ua;
**Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, 61001, e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Аннотация. В работе рассмотрены характеристики алгоритмов такие, как зависимость времени выполнения алгоритма от начальных данных, где под временем выполнения понимается количество шагов машины Тьюринга. Выбор теоретической модели алгоритмов, основанный на машине Тьюринга, обусловлен универсальностью и близостью ее к реальным вычислительным устройствам. Показано, что возможно существование алгоритмом с фрактальной геометрией устройства уровня постоянного значения времени вычислений над входными данными. Обсуждаются глобальные свойства алгоритмов.

Ключевые слова: машина Тьюринга, алгоритм, эффективность алгоритма, фрактальная размерность, мультифрактал.

1. Введение. Теория сложности вычислений – бурно развивающаяся область теоретической информатики и охватывает как чисто теоретические вопросы, так и вопросы, непосредственно связанные с практикой. Среди наиболее важных приложений этой теории можно выделить способы построения эффективных алгоритмов, а также развитие методов анализа их эффективности. Существуют различные подходы к пониманию эффективности вычислений (см. например [1], [2]). С общей точки зрения эффективность алгоритмов оценивается с помощью глобальных средств. Так, например, принято считать эффективные алгоритмы относятся к классу P [3], с полиномиальным ростом времени вычислений при увеличении «объема» входных данных. Аналогично эффективность классов $PSPASE$ определяется полиномиальным ростом требуемых ресурсов [3]. Такие подходы оставляют открытыми различия в выполнении алгоритмов при работе с одинаковыми по объему, но всевозможными входными данными. В определенном смысле, возникающие различия при этом можно рассматривать как полезные характеристики, позволяющие устанавливать более тонкие различия между алгоритмами одного класса. В этой статье предложен именно такой подход к анализу алгоритмов. В качестве универсальной модели алгоритма используется машина Тьюринга. Учитывая тезис Черча, который гласит, что всякий словарный, дискретный детерминированный алгоритм может быть реализован машиной Тьюринга [4], что позволяет перенести результаты на все типы алгоритмов. Основная идея состоит в изучении выполнения алгоритма на всевозможных входных данных. Другими словами, множество входных данных отображается в скалярную характеристику, связанную с выполнением алгоритма на входном значении. В качестве такой характеристики можно использовать такие общепринятые как время вычисления или потребляемая память. Разумеется, можно использовать и другие характеристики, например, даже результат вычисления. Таким образом, основное внимание сосредоточено на изменении этих характеристик при изменении входных данных без изменения их «объема». Для классификации алгоритмов предлагается использовать геометрический подход, заключающийся в

изучении геометрии множеств уровней постоянного значения выбранной характеристики. Основной вопрос, который обсуждается в работе, это какие типы алгоритмов с этой точки зрения могут встречаться и какими свойствами они могут отличаться. Обратим внимание, что в определенном смысле, такой подход позволяет ввести более тонкую классификацию алгоритмов находясь даже в одном классе сложности.

2. Построение и анализ алгоритмов. Для анализа свойств используем общий подход к описанию алгоритма в терминах машины Тьюринга [5]. На языке машины Тьюринга сформулируем ряд простых алгоритмов свойства которых и будем анализировать далее. В качестве таких тестовых алгоритмов выберем алгоритм сложения двух целых неотрицательных чисел в двоичном представлении, алгоритм поразрядного «И» над неотрицательными дробными числами в двоичном представлении и некоторые другие. Также будем использовать машины Тьюринга, программы которых генерируются случайным образом. Это позволит убедиться в типичности анализируемых свойств алгоритмов. Основное свойство используемых алгоритмов состоит в том, что исходные данные для таких алгоритмов взаимнооднозначно сопоставляются точкам единичного квадрата. Другими словами, на вход таких алгоритмов подаются два числа принадлежащие единичному отрезку.

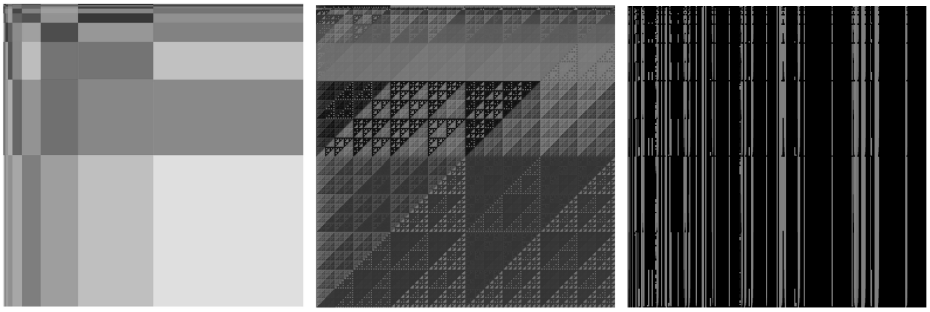


Рис. 1. Примеры трех типов полей. Левый соответствует алгоритму логического «И» в двоичной системе исчисления, центральный сложение двух целых неотрицательных чисел и правый один из алгоритмов, полученных при случайной генерации множества программ машины Тьюринга. Градация серого соответствует времени вычислений соответствующего результата.

Таким образом единичный квадрат разделим на клеточки, соответствующие начальным точкам, определяемыми с некоторой заданной точностью. Все точки принадлежащие одной клеточке имеют одинаковые координаты с точностью до размера клеточки. Чем выше точность, тем больше число клеточек. Естественно, выбор точности удобно ограничить степенями двойки. Так, на вход целочисленных алгоритмов подавались входные данные из интервалов $[2^n, 2^{n+k}]$, где $n, k \in N$ с единичным шагом. А на вход алгоритмов с дробными входными данными (меньше единицы), точки единичного квадрата с шагом 2^{-n}, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. каждая точка принадлежит соответствующей области единичного квадрата. Выбор такого шага обусловлен тем, что при таком разбиении наиболее удобен переход в двоичную систему исчисления.

Осуществляя вычисление с использованием выбранного алгоритма над каждой входной клеточкой единичного квадрата $\vec{x}$, получим поле значений соответствующей характеристики $I(\vec{x})$. Для начала выберем в качестве такой характеристики время вычисления над входными данными $T(\vec{x})$. Это поле легко визуализировать раскрашивая клеточку в зависимости от времени вычислений над соответствующими исходными данными. При анализе большого числа

алгоритмов обнаруживается существование полей времени вычислений, которые принципиально отличаются геометрическими свойствами. Грубо такие множества можно разделить на 3 качественно различных типа. Типичные примеры этих типов показаны на рис. 1.

Так из приведенных примеров можно заметить, что распределение входных данных, требующих одинаковых временных затрат является простым для а) и сложным для б), в) алгоритмов. Поля а), б) симметричны относительно диагонали, что обусловлено симметрией алгоритма на входных данных. Как, например, симметрия алгоритма сложения чисел. Для более детального исследования удобно зафиксировать время вычисления и выделить в единичном квадрате входные данные, требующие одинаковых временных затрат. Ясно, что геометрическое устройство множеств фиксированного уровня должно быть подобными независимо от выбранного значения времени вычисления. Далее покажем множества заданного уровня для приведенных выше полей на рис. 1. Данные, требующие одинаковых временных затрат, визуализированы черным цветом, а все остальные белым.

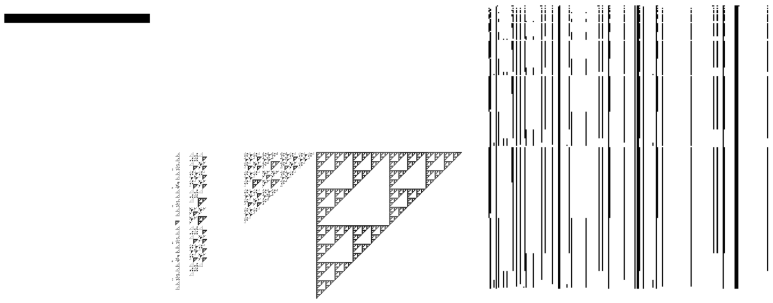


Рис. 2. Множества фиксированного уровня некоторых алгоритмов имеют простую структуру, другие – самоподобную структуру как и более сложную мультифрактальную. Здесь используются те же алгоритмы что и для построения рис. 1.

В результате упрощения получена сложная самоподобная структура для б) и в), а для а) простая структура. Геометрическая самоподобная структура б) похожа на известный фрактал - прямоугольную салфетку Серпинского [6], структура в) также похожа на фрактал. Для проверки, является ли данные множества фракталами, были построены поля выводов с большим разрешением. Используя специальную подпрограмму, методом клеточного покрытия [6] было проведено определение зависимости числа покрытий от выбора масштаба покрытия. Такая зависимость в логарифмических координатах хорошо аппроксимируется линейной зависимостью (см. например рис. 3). Тангенс угла наклона этой прямой и совпадает с фрактальной размерностью построенного множества. В результате вычислений было установлено, что структура б) является фракталом с фрактальной размерностью $D_F \approx 1.55 \pm 0.03$, что в пределах погрешности соответствует размерности фрактала «салфетка Серпинского». Значение этой размерности сохраняется и для множеств исходных данных, вычисление над которыми осуществляется за другое фиксированное время. Другими словами множества уровней фиксированных времен выполнения алгоритма являются фрактальными множествами определенной фрактальной размерности.

Подобный анализ структуры, приведенной на рис. 1 в), указывает на более сложную структуру множества, относящегося к мультифракталам. Дальнейший анализ машин Тьюринга с

генерируемыми случайным образом программами, позволяет установить типичность такого деления алгоритмов на три класса (простые, фрактальные и мультифрактальные). Для алгоритмов с обычной геометрией множеств фиксированного уровня, время выполнения зависит только от разрядности входных данных: чем больше разрядность – тем больше время выполнения. Для алгоритмов с фрактальной и мультифрактальной геометрией время выполнения зависит как от разрядности входных данных, так и от их значения. Другими словами, время выполнения этих алгоритмов чувствительно к изменению входных данных.

Принадлежность алгоритма к первой группе означает, что время затрачиваемое на вычисления над близкими начальными условиями фиксированной разрядности одинаково или очень близко. Данные алгоритмы будем считать простыми.

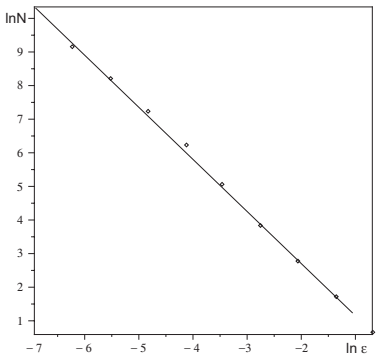


Рис. 3. К определению фрактальной размерности. Вертикальная ось – количество клеточек, содержащих точки соответствующего множества в логарифмическом масштабе, горизонтальная – размер клеток также в логарифмическом масштабе. Угол наклона прямой определяет клеточную или фрактальную размерность.

Принадлежность ко второму и третьему классу означает, ввиду фрактальной и мультифрактальной структуры множества исходных данных на которых алгоритм выполняется за фиксированное время, что время вычислений над сколь угодно близкими входными данными может быть сколь угодно близким или наоборот далеким. Другими словами, в любой окрестности исходных данных находятся данные со всеми значениями времен выполнения алгоритма над ними. Данные алгоритмы будем считать сложными.

3. Выводы

Таким образом, алгоритмы можно классифицировать по типам геометрии исходных данных, выполнение алгоритма над которыми происходит за определенное фиксированное время. Удобной характеристикой таких множеств, а следовательно и алгоритмов, можно рассматривать фрактальную размерность, а в более сложных и весь спектр размерностей Реньи [6] или другие характеристики мультифрактальных множеств. В качестве таковых могут выступать спектр сингулярностей или показатель масс [6]. Следует заметить, что алгоритмы относящиеся к фрактальным и мультифрактальным типам, допускают новый способ уменьшения времени выполнения алгоритмов путем малого «шевеления» входных данных, что означает новый способ оптимизации ресурсов при выполнении таких алгоритмов. Кроме этого можно предложить естественную гипотезу, что значения на которых машина Тьюринга не останавливается или

не приводит к результату вычислений, распределены фрактальным или мультифрактальным образом для таких алгоритмов.

Литература

1. А.А.Разборов, О сложности вычислений // Математическое просвещение. – 1999. – МЦНМО, No.3, с.127-141.
2. Яновский В.В. Квантовая механика алгоритмов / Харьков: ИСМА, 2009.
3. Верешагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Вычислимые функции / М.: МЦНМО, 1999. (2-е изд.: М.: Наука, 1982).
4. А.Черч Введение в математическую логику / М.: ИЛ, 1960.
5. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика:дополнительные главы / М.: изд-во МГУ, 1984.
6. Федер Е. Фракталы / М.: Мир, 1991.

GEOMETRIC PROPERTIES OF ALGORITHMS

E.A. Miroshnikov*, V.V. Yanovsky**

*V.N. Karazin Kharkiv National University,
Svobody Sq., 4, Kharkov, 61022, Ukraine, e-mail: xxxx@ccas.ru;
**Institute for Single Cristals of NASU,
Lenina Av., 60 Kharkov, 31001, Ukraine, e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Abstract. Algorithms characteristics like the dependence of algorithm execution time on initial data is under consideration when it refers to the number of Turing's machine steps. Algorithms theoretical models based on Turing's machine. It is done due to its flexibility and affinity to real computing devices. It is shown that there exists an algorithm having fractal geometry of its device connected with the fixed value of computation time over input data. Some global properties of algorithms are discussed.

Key words: Turing's machine, algorithm efficiency, fractal dimension, multifractal.

УДК 511.3

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Е. Коротков, О.А. Матвеева

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, 410012, Россия, e-mail: korotkovae@info.sgu.ru

Аннотация: В работе предлагается численный алгоритм, который позволяет быстро вычислять расположение в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: ряд Дирихле, L-функции Дирихле, функциональное уравнение.

В работе [1] показано, что важную роль при решении проблемы о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана играет ответ на следующий вопрос: существуют ли в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} s = \sigma > 1/2$ нули целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, которые являются общими для этого класса. Особый интерес, в связи с этой задачей, представляют ряды Дирихле, являющиеся линейной комбинацией L-функций Дирихле с первообразными характерами одного и того же модуля. Как показано в [2], такие ряды Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана и, как будет видно ниже, имеют бесконечное число нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Поэтому положительный ответ на поставленный выше вопрос позволяет сделать важные выводы о зависимости расширенной гипотезы Римана от основной гипотезы, и о том, что условие удовлетворять функциональному уравнению типа Римана не накладывает существенных ограничений на нули таких функций.

В настоящей работе предлагается достаточно простой алгоритм вычислительной схемы, позволяющий определять в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

1. Нули целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Приведем известные факты, связанные с аналитическими свойствами целых функций, заданных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые влияют на расположение нулей таких функций.

В работе [3] показано, что ряды Дирихле с конечнозначными, мультипликативными коэффициентами, которые определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана, являются L-функциями Дирихле. В случае немультипликативных коэффициентов условие подчинения функциональному уравнению типа Римана не накладывает сильных ограничений на расположение нулей даже в случае периодических коэффициентов. Как уже отмечалось во введении, ряды Дирихле, которые являются линейной комбинацией L-функций Дирихле с различными первообразными характерами данного модуля удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана. В [4, гл. IV, § 5] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть χ_1 и χ_2 неэквивалентные характеры Дирихле. Тогда функция*

$$f(s) = c_1 L(s, \chi_1) + c_2 L(s, \chi_2), \qquad s = \sigma + it,$$

где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2)$ – L-функции Дирихле, имеет в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, где $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, бесконечно много нулей.

К сожалению, авторы не смогли, исходя из приведенных выше фактов, ответить на следующий вопрос: для любого ли нуля z_0, $\operatorname{Re} z_0 > 1/2$, целой функции, заданной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, существует целая функция, заданная рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, не равная нулю в точке z_0. Как уже отмечалось выше ответ на этот вопрос связан с проблемой о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана.

Мы приведем схему численного определения нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, применение которой позволяет сделать предположение относительно ответа на поставленный вопрос.

2. Приближение полиномами Дирихле целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$.

Как показано в работе [5], целая функция $f(s)$, определяемая рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

с периодическими коэффициентами, допускает в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ приближение полиномами Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s} \tag{2}$$

с той же скоростью, с какой функция $g(x)$, заданная степенным рядом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \tag{3}$$

с теми же коэффициентами a_k, что и ряд Дирихле (1), допускает на отрезке $[0; 1]$ приближение алгебраическими полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} x^k. \tag{4}$$

При этом полиномы Дирихле вида (2) имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы вида (4).

Легко видно, что для целых функций вида (1) в случае периодических коэффициентов a_n степенной ряд (3) определяет рациональную функцию

$$g(x) = \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \ldots + x^{d-1}}, \tag{5}$$

где d – период для a_k. Полюсы функции $g(z)$, как функции комплексного переменного, лежат на единичной окружности, и эта функция регулярна в точке $z = 1$. В нашем случае, функцию $g(z)$ будем считать регулярной и в точке $z = -1$.

Пусть D_{ρ_0} обозначает область, ограниченную эллипсом, фокусы которого находятся в точках ± 1 и сумма полуосей которого равна ρ_0. Кроме того, функция $g(z)$ регулярна внутри области D_{ρ_0} и имеет хотя бы один полюс на границе этой области. Пусть в этом случае $E_n(g)$ обозначает величину наилучшего приближения функции (5) на отрезке $[-1;1]$ алгебраическими полиномами, степени которых не превосходят n. Тогда теорема Бернштейна [6] утверждает что величина $E_n(g)$ ведет себя следующим образом

$$E_n(g) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{6}$$

для любого $\rho:\ 1 < \rho < \rho_0$.

Как показано в [6], оценка (6) имеет место и в случае приближения функции $g(x)$ на отрезке $[-1;1]$ алгебраическими полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k\ , \tag{7}$$

где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad x \in [-1;1]$$

– разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева. При $k \geq 1$

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t)\, dt\,. \tag{8}$$

В силу сказанного выше имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ряд Дирихле (1) с периодическими коэффициентами определяет целую функцию. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ вида (2), такая, что в любой полосе: $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ имеют место следующие оценки*

$$\|f(s) - Q_n(s)\| \leq C/\rho^n\ ,$$

где ρ – некоторая константа, большая единицы.

Заметим, что в качестве коэффициентов полиномов Дирихле $Q_n(s)$ можно взять коэффициенты алгебраических полиномов $P_n(x)$ вида (7).

3. Алгоритм и вычислительная схема определения нулей. Пусть $f(z)$ – целая функция, определенная рядом Дирихле (1) с периодическими коэффициентами, и пусть $g(x)$ соответсвующий степенной ряд (3).

Во-первых, определим вид рациональной функции $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{d}\sum_{m=0}^{\infty} a_{(md+k)} x^{md+k} = \sum_{k=1}^{d} a_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} x^{md} = (1-x^d)^{-1}\sum_{k=1}^{d} a_k x^k =$$

$$= \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \ldots + x^{d-1}}\ . \tag{9}$$

Во-вторых, определим коэффициенты c_k разложения (7) по формулам (8). При этом имеет смысл предварительно разложить рациональную дробь (9) в сумму простейших.

Далее, находим коэффициенты $b_k^{(n)}$ полинома $P_n(x)$ (7). При этом полиномы Чебышева $T_k(x)$ определяем исходя из рекуррентного соотношения:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \qquad T_0 = 1, \qquad T_1 = x.$$

После этого выпишем полиномы Дирихле $Q_n(s)$ (2) и найдем комплексные нули таких полиномов. Известно [7], что в любой полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ нули полиномов $Q_n(s)$ с ростом n стремятся к нулям функции $f(s)$, и, так как полиномы $Q_n(s)$ сходятся к $f(s)$ с показательной скоростью, то будет наблюдаться достаточно быстрая сходимость нулей полиномов $Q_n(s)$.

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм на отдельных примерах. Рассмотрим ряд со следующими коэффициентами:

$$a_n = \Big\langle 0,\ n \equiv 0(3); 1,\ n \equiv 1(3); -1,\ n \equiv 2(3) \Big\rangle$$

Нули полинома Дирихле, построенные для указанного ряда, располагаются на прямой $\sigma = 1/2$ тем больше, чем выше степень полинома. В силу симметричности нулей, мы не изображаем нижнюю полуплоскость:

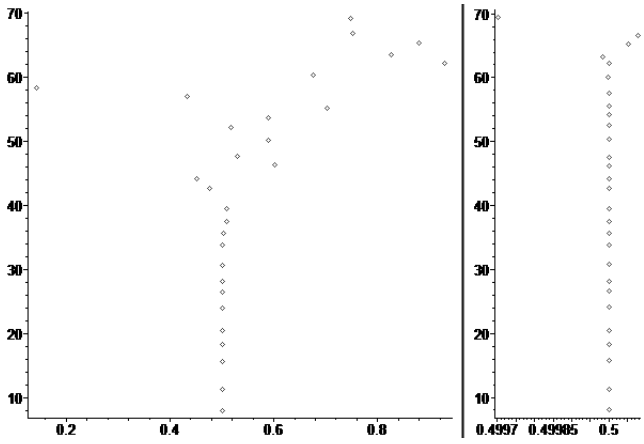


Рис. 1. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 57 и 112 степеней.

Аналогичная картина наблюдается для ряда с коэффициентами:

$$a_n = \Big\langle 0,\ n \equiv 0(5); 1,\ n \equiv 1(5); 1,\ n \equiv 2(5); 1,\ n \equiv 3(5); -1,\ n \equiv 4(5) \Big\rangle$$

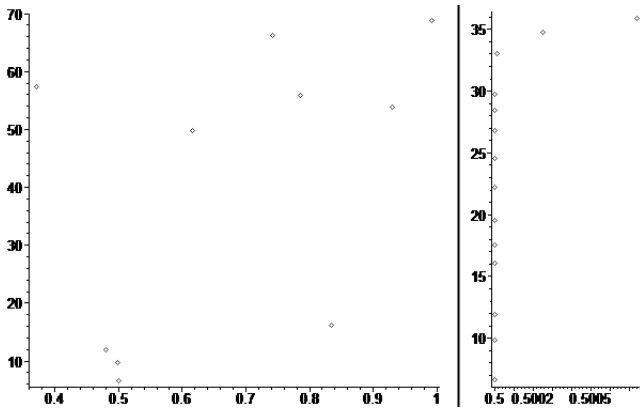


Рис. 2. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 28 и 83 степеней.

Но для ряда с периодическими, немультипликативными коэффициентами:

$$a_n = \Big\langle 0,\ n \equiv 0(5); 1,\ n \equiv 1(5); -1,\ n \equiv 2(5); 1/2,\ n \equiv 3(5); -1/2,\ n \equiv 4(5) \Big\rangle$$

нули к прямой $\sigma = 1/2$ не сходятся и их большое число содержится в полосе $1/2 < \sigma < 1$.

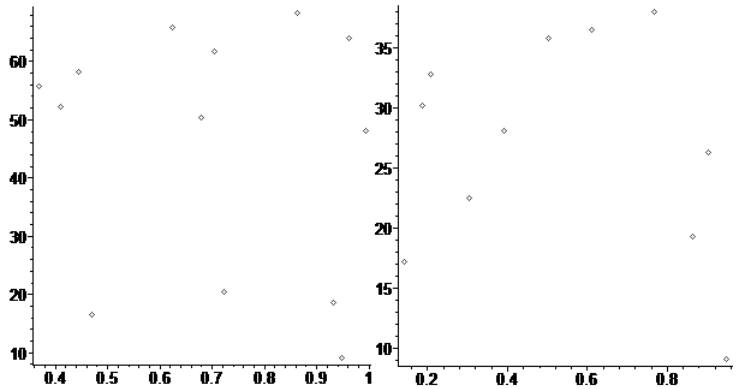


Рис. 3. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 27 и 67 степеней.

В результате численного эксперимента, основанного на приведенной здесь схеме, авторы показали, что в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < 10^5$ нет общих нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, что позволяет предположить, что расширенная гипотеза Римана является следствием основной гипотезы.

Нужно отметить, что в численном эксперименте при $|t| < 10^5$ были использованы только ряды Дирихле с периодами коэффициентов $d = 3$ и $d = 5$. Возможно, что таких рядов Дирихле будет достаточно, чтобы получить ответ на вопрос, поставленный нами в начале настоящей работы.

Представляет интерес и другой вопрос, возникший в процессе численного эксперимента, выяснить почему нули аппроксимационных полиномов с мультипликативными коэффициентами, с ростом степени этих полиномов до определенной величины модуля t, располагаются на критической прямой и как это положение реализуется в зависимости от степени полиномов?

Литература

1. Кузнецов В.Н. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник. – Тула, 2010. – 11;1. – С.188-199.
2. Кузнецов В.Н. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. – Саратов, 2011. – 11;3 (часть 1). – С.21-25.
3. Кривобок В.В. О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющими функциональному уравнению римановского типа // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов, 2007. – 7;1. – С.13-15.
4. Воронин С.М. Дзета-функция Римана / М.: Физатлит, 1994. – 376 с.

5. Кузнецов В.Н. Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам / Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов, 2003. – Вып. 2. – С.27-32.
6. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций / Л.: ЛГУ, 1977.
7. Титчмарш Е. Теория функций /- М.: Наука, 1980.

NUMERICAL ALGORITHM OF ZEROS CALCULATION OF ENTIRE FUNCTIONS DEFINED BY DIRICHLET's SERIES WITH PERIODIC COEFFICIENTS

A.E. Koroktov, O.A. Matveeva

Saratov State University,
Astrakhanskaya St., 83, Saratov, 410012, Russia, e-mail: korotkovae@info.sgu.ru

Abstract. It is proposed the numerical algorithm that permits to calculate quite fast zeros of entire functions defined by Dirichlet's series with periodic coefficients distributed in the semiplane $\sigma > 1/2$.

Key words: Dirichlet's series, Dirichlet's L-function, functional equation.

УДК 669.017:539.4

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА ЗЕРНА НА РЕЖИМЫ ДИФФУЗИОННОЙ СВАРКИ НАНОСТРУКТУРНЫХ ЛИСТОВ ИЗ СПЛАВА ВТ6

Е.А. Кудрявцев, Н.В. Лопатин, Г.А. Салищев, Э.В. Иванисенко, С.В. Жеребцов, К.С. Сенкевич

Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: salishchev@bsu.edu.ru

Аннотация. Проведена диффузионная сварка наноструктурного сплава ВТ6 с размером зерна 150 и 300 нм. Исследованы механические свойства и микроструктура сплава в зоне сварного шва. Установлено влияние размера зерна на качество сварного соединения и величину напряжения среза при различных условиях сварки.

Ключевые слова: диффузионная сварка, титановые сплавы, наноструктура.

Диффузионная сварка широко используется для получения качественного соединения материалов [1-3]. Осуществление диффузионной сварки возможно с использованием двух технологических схем: в одной из них используют постоянную нагрузку по величине ниже предела текучести, т.е. в режиме близком к ползучести, а в другой при нагрузке больше предела текучести, достигаемой принудительным деформированием соединяемых объектов (сварки давлением). Во втором случае степени деформации при сварке составляют обычно десятки процентов, тогда как в первом не превышают единиц.

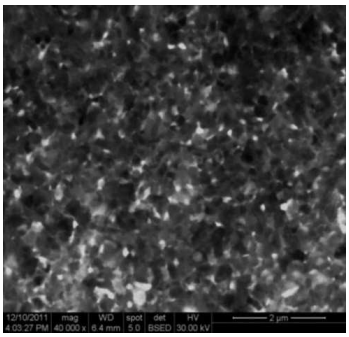
Таблица 1

Режимы сварки листов НС сплава ВТ6

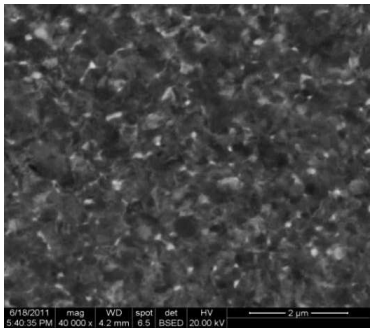
Номер образца	Температура сварки, °С	Удельное давление МПа	Время выдержки, ч
1	550	100	1
2	600	70	1
3	600	100	1
4	650	30	1

Наноструктурирование материалов позволяет резко снизить температуру диффузионной сварки [1-3]. В частности, применение наноструктурных (НС) титановых сплавов для осуществления диффузионной сварки давлением было рассмотрено в [1-3]. Авторы получили качественное соединение при сварке НС сплава ВТ6 при температуре 600°С. Развитие таких методов имеет большое значение для создания новых малозатратных технологий. С технологической точки зрения не всегда возможно осуществлять соединение в режиме сварки давлением; сварка в режиме ползучести может быть в ряде случаев предпочтительнее. Между тем исследования сварки НС сплавов в режиме ползучести практически отсутствуют. Один из вопросов, который возникает в связи с постановкой такой работы, связан с оценкой влияния исходной

микроструктуры НС сплава на качество соединения. В настоящей работе исследовалось влияние размера зерна на образование соединения и его прочность в условиях низкотемпературной диффузионной сварки на примере НС двухфазного титанового сплава ВТ6.



а)



б)

Рис. 1. Микроструктура НС сплава ВТ6 с различным исходным размером зерен: а) – 150 нм; б) – 300 нм. Светлые выделения принадлежат бета фазе.

Материалом исследования были листы из НС сплава ВТ6 со средним размером зерна 150 и 300 нм (Рис. 1). Листы были разрезаны на прямоугольные образцы размером 6×5×2 мм. Сварка с использованием машины для диффузионной сварки СДВУ-40 проводилась в вакуумной атмосфере. Давление в вакуумной камере составляло $10^{-2} \div 10^{-3}$ Па. Образцы нагревались ИК излучением до температуры сварки в интервале 550÷750°С. Контактные поверхности были предварительно механически отшлифованы на шкурке с понижением зернистости от 100 до 1000 и отполированы на коллоидной суспензии. Промывка образцов проводилась в ацетоне. Сварку осуществляли либо по всей поверхности для исследований микроструктуры, либо с перекрытием 5 мм, для определения прочности сварного соединения. Непосредственно перед сваркой проводили химическое полирование соединяемых поверхностей в растворе 10мл HF, 10мл HNO_3, 30 мл молочной кислоты. Режимы сварки представлены в табл. 1.

Микроструктуру образцов изучали в сканирующем электронном микроскопе Quanta-600 с использованием детектора обратнорассеянных электронов. Оценка прочности сварного соединения на срез проводилась на испытательной машине Instron-LS300.

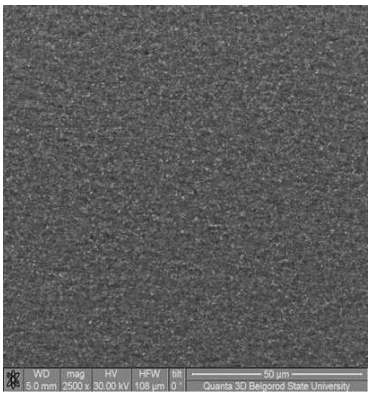
Основой для выбора температурного режима сварки являлись результаты исследования сверхпластичности НС сплава ВТ6, представленные в работе [3]. На основании этих данных были выбраны температуры и удельные давления при создании нагрузки на образцы (табл. 1). Время выдержки под нагрузкой было выбрано исходя из экономической целесообразности процесса диффузионной сварки. Обычно используют времена сварки для титановых сплавов в интервале 1-2 часов [1].

На рис. 1 представлены микроструктуры НС сплава ВТ6 с исходным размером зерен 150 нм и 300 нм. Плотность дислокаций в первом состоянии составляла $3{,}8\times 10^{-14}$ м$^{-2}$, а во втором - $9{,}0\times10^{-14}$ м$^{-2}$. Также отличалась объемная доля бета фазы: в первом состоянии ее величина была 11%, а во втором - 15%.

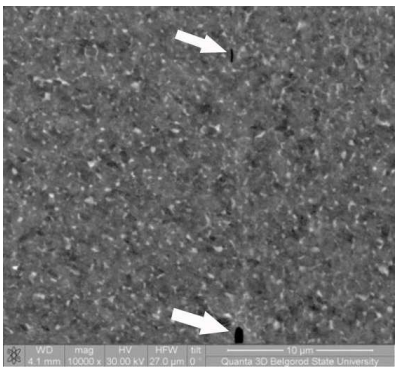
После сварки образца с размером зерна 150 нм при 550°С на шлифе видна линия сварки, что может свидетельствовать о недостаточно качественном соединении. В тоже время образцы этого состояния сваренные при 600°С и 650°С показали наличие качественного шва. На рис. 2а дана микроструктура сварного шва после сварки образцов сплава ВТ6 с размером зерен 150 нм

при 600°С, давлении 70 МПа и времени выдержки 1 час. Видно, что отсутствуют какие-либо дефекты в области сварного шва. Подобная микроструктура была получена и при 650°С.

Сварка образцов с размером зерна 300 нм при 600°С, давлении 70 МПа и времени выдержки 1 час не привела к получению качественного шва. Достаточно отчетливо виден шов и поры в нем (показаны стрелкой на рис. 2б). Между тем повышение давления до 100 МПа вело к получению качественной структуры. Поры отсутствовали в микроструктуре, но в отдельных участках было обнаружено изменение контраста по сварному шву, что свидетельствовало о неполном достижении равновесия в структуре при сварке. Качественная микроструктура формировалась при 650°С и существенно меньшем давлении 30 МПа.



а)



б)

Рис. 2. Микроструктура сварного шва после сварки образцов сплава ВТ6 с размером зерен 150 нм (а) и 300 нм (б) при 600°С, давлении 70 МПа и времени выдержки 1 час.

Исследование диффузионного соединения на срез показало наличие сильной зависимости напряжения среза от температуры сварки (табл. 2). Наименьшее значение, всего лишь 69 МПа, было получено после сварки образцов с размером зерна 150 нм при 550°С. Повышение температуры сварки резко увеличивало напряжение среза. Например, сварка этого же состояния при давлении 70 МПа дает почти на порядок большее значение (559 МПа). Близкое последнему значение было при испытании образца, сваренного при 650°С. Исходный размер зерен существенно влияет на свариваемость. Напряжение среза образца с размером зерен 300 нм, сваренного при 600°С и 70 МПа, равнялось 250 МПа. Увеличение давления до 100 МПа заметно увеличивало напряжение среза. Подобный же рост напряжения среза в образцах в этом состоянии был зафиксирован при увеличении температуры сварки до 650°С.

Таким образом, повышение дисперсности структуры НС сплава ВТ6 существенно влияет, как на качество сварного шва, так и на механические свойства сваренных образцов. Чем меньше размер зерен, тем более качественная структура сварного шва формируется. В сплаве с большим размером зерна требуются более высокие давления, для осуществления сварки образцов.

Работа была поддержана грантом П №725 Министерства Науки и Образования Российской Федерации.

Таблица 2

Режимы сварки листов НС сплава ВТ6

Размер зерна, нм	Температура, °С	Давление, МПа	Время выдержки, ч	Напряжение среза, МПа
150	550	100	1	69
	600	70	1	559
	600	100	1	526
300	600	70	1	250
	600	100	1	454
	650	30	1	496

Литература

1. Диффузионная сварка материалов / Справ. gод ред. Н.Ф. Казакова / М.: Машиностроение, 1981. – 271 с.
2. Лутфуллин Р.Я. Сверхпластичность и твердофазное соединение наноструктурированных материалов. Ч.I Влияние размера зерна на твердофазную свариваемость сверхпластичных сплавов / Письма о материалах. – 2011. – 1. – С.88-91.
3. Кудрявцев Е.А., Жеребцов С.В., Салищев Г.А. Низкотемпературная сверхпластичность двухфазных титановых сплавов и технология изготовления изделий / Научные ведомости БелГУ, Серия «Математика. Физика». – 2011. – №23 (119) вып. 25.

GRAIN SIZE EFFECT ON SOLID STATE JOINING DURING DIFFUSION BONDING OF NANOSTRUCTURED SHEETS OF ALLOY Ti-6Al-4V

E.A. Kudrjavtsev, N.V. Lopatin, G.A. Salishchev, E.V. Ivanisenko, S.V. Zherebtsov, K.S. Senkevich

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: salishchev@bsu.edu.ru

Abstarct. Diffusion bonding of nanostructured Ti-6Al-4V alloy with the grain size of 150 and 300 nm has been performed. Mechanical properties and microstructure of the alloy in the weld zone were investigated. The grain size effect and diffusion bonding conditions on the quality and shear stress of joint have shown.

Key words: diffusion bonding, nanostructured sheets, titanium alloys.

УДК 669.017:539.4

СТРУКТУРНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ И МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ НАНОСТРУКТУРНОГО СПЛАВА ВТ6

Г.А. Салищев, Е.А. Кудрявцев, С.В. Жеребцов

Белгородский государственный университет,
Лаборатория Объемных наноструктурных материалов,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: salishchev@bsu.edu.ru

Аннотация. Изотермической мультиосевой деформацией в двухфазном титановом сплаве ВТ6 был получен средний размер зерна 135 нм, что позволило наблюдать низкотемпературную сверхпластичность при температуре 550°C. Максимальное удлинение составило 1000%, а коэффициент скоростной чувствительности m=0,47 при оптимальной скорости деформации $2\times10^{-4}c^{-1}$. Показано, что эволюция микроструктуры при низкотемпературной деформации играет ключевую роль в процессе сверхпластического течения.

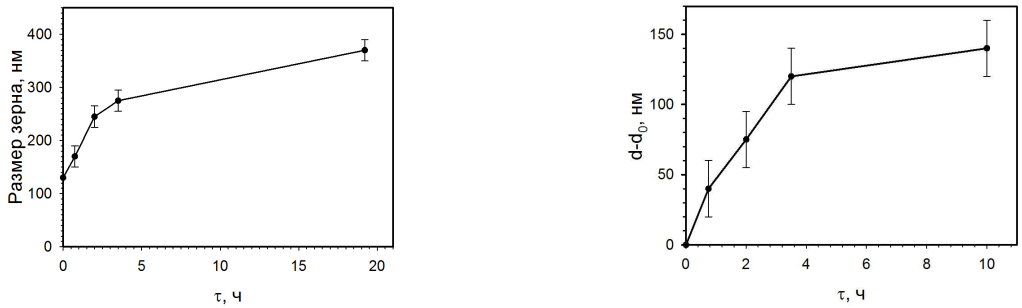
Ключевые слова: низкотемпературная сверхпластичность, изотермическая всесторонняя ковка, ультрамелкозернистая структура, микроструктурная эволюция.

Перевод двухфазных титановых сплавов в наноструктурное состояние позволяет снизить температуру сверхпластической деформации на несколько сот градусов ниже наблюдаемой в сплавах с обычной микроструктурой [1]. Например, в ВТ6 с размером зерна 300 нм сверхпластическое течение наблюдалось при 600°C, причем удлинение составило 500%, коэффициент m=0,37 [2], а работе [3] в том же сплаве с таким же размером зерна было получено удлинение 296% и m = 0,34 при той же температуре. Снижение удлинения с понижением температуры деформации ожидаемо из-за торможения диффузии и ускоренного роста зерен, вследствие уменьшения объемной доли β-фазы. Однако, увеличение протяженности границ с уменьшением размера зерна, отличающихся от тела большой диффузионной проницаемостью должно компенсировать эти потери. Исходя из этого, целью настоящей работы является изучение структурных изменений и механического поведения титанового сплава ВТ6 со средним размером зерна 135 нм при сверхпластической деформации при экстремально низкой температуре 550°C.

Двухфазный титановый сплав ВТ6 был поставлен в виде горячекатаного прутка (температура полиморфного превращения 990°C). Образцы для исследований были получены изотермической мультиосевой деформацией с последующей прокаткой. Испытания на растяжение проводились на универсальной испытательной машине Instron в температурном интервале 450-600°C со скоростью перемещения траверсы 0,5-100 мм/мин. Коэффициент скоростной чувствительности m был рассчитан из наклона кривой $\log\sigma$ - $\log\varepsilon$ и испытаний с изменением скорости деформации [1]. Структура сплава была исследована с помощью рентгеновского дифрактометра ДРОН-3, просвечивающего электронного микроскопа JEM-2100 и растрового электронного микроскопа Quanta 600.

В наноструктурном состоянии микроструктура сплава представляла собой глобулярные α и β зерна со средним размером зерна 135 нм. Предварительные исследования показали, что рост зерен при нагреве происходит уже при T=550°C. С увеличением времени отжига зерна

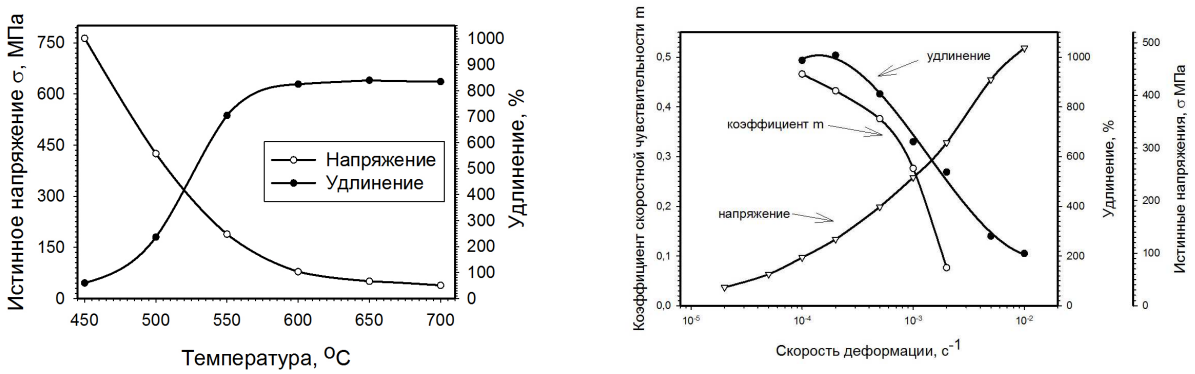
заметно укрупняются и после 5 часов отжига этот процесс протекает медленнее (Рис. 1б). Объемная доля β-фазы в сплаве составляла 10% и не сильно изменялась в ходе отжига.



а) б)

Рис. 1. Кинетика роста зерен в сплаве ВТ6 при отжиге и при деформации со скоростью $2\times10^{-4}c^{-1}$ и T=550°C (а). d – средний размер зерна за время деформации, d_0 – средний размер зерна за аналогичное время отжига (б).

Исследование механических свойств сплава показало, что с повышением температуры деформации растет пластичность и снижается напряжение течения (Рис. 2а). При T=550°C и $5\times10^{-4}c^{-1}$ удлинение достигает 640%. Изучение скоростной зависимости механических характеристик при T=550°C позволило установить оптимальный режим сверхпластичности (Рис. 2б). При скорости деформации $2\times10^{-4}c^{-1}$ были получены максимальные значения удлинения $\delta =$ 1000% и коэффициента m (0,47).



а) б)

Рис. 2. Изменение механических характеристик сплава ВТ6: (а) от температуры деформации при ε=$5\times10^{-5}c^{-1}$, (б) от скорости деформации при температуре 550°C.

Оценка кажущейся энергии активации сверхпластической деформации дала значение Q= 149 кДж/моль при n=2, которая близка величинам энергии активации 176 и 160 кДж/моль полученным, соответственно, в работах [3,4]. Она близка также энергии активации зернограничной диффузии 189 кДж/моль для обычного сплава ВТ6 [5]. При T=550°C было исследовано влияние скорости и степени деформации на микроструктуру сплава. С уменьшением

скорости деформации наблюдается существенное укрупнение зерен. При $\varepsilon = 100\%$ средний размер зерна составил 290 нм при $5\times10^{-4}c^{-1}$, 490 нм при $2\times10^{-4}c^{-1}$ и 530 нм при $2\times10^{-5}c^{-1}$. График на рис. 1б представляет деформационно-индуцированный рост зерен при $2\times10^{-4}c^{-1}$ и T=550°C. Видно, что деформация существенно ускоряет рост зерен в сплаве в сравнении с отжигом. Причем некоторые зерна α-фазы достигают к степени деформации 800% 1400 нм (Рис. 5а). При этом укрупнение зерен не выводит сплав из состояния сверхпластичности. Коэффициент скоростной чувствительности m равен 0.52, 0.62 и 0.65, соответственно, для степеней деформации 100, 200, и 500%. При этом в оптимальных условиях не обнаруживается порообразования в сплаве. Исследование эволюции кристаллографической текстуры в ходе отжига и сверхпластической деформации выявило существенные ее изменения (Рис. 3). Отжиг слабо влияет на текстуру. Однако, увеличение степени деформации от 100 до 500% при оптимальной скорости деформации $2\times10^{-4}c^{-1}$ ведет размытию полюсной фигуры (Рис. 3г). Отметим, что фактор Керна, расчитанный из полюсной плотности [6], снижается по сравнению с исходным состоянием с 0,55 до 0,42 при достижении деформации в 500% и скорости $2\times10^{-4}c^{-1}$. Такие структурные изменения могут быть связаны с развитием зернограничного проскальзывания.

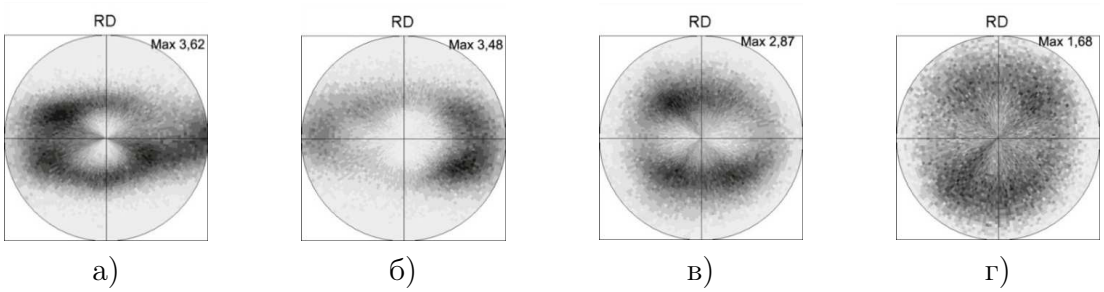


Рис. 3. Полюсные фигуры (0002) сплава ВТ6 в различных состояниях:
(а) исходное состояние, (б) после отжига в течение 30 мин, (в) после деформации со скоростью $2\times10^{-4}c^{-1}$ на степень деформации 100% и (г) 500%.

Измельчение размера зерна до 135 нм делает возможным проявление сверхпластичности при экстремально низкой для сплава ВТ6 температуре – 550°C с высокими значениями коэффициента скоростной чувствительности и относительного удлинения. Известно [1,7], что сверхпластическое поведение двухфазных сплавов наиболее ярко наблюдается при отношении объемной доли α/β фаз близким к 1. Рассматриваются две причины [1]: зернограничное проскальзывание осуществляется легче по межфазным границам, а микроструктура более стабильная в этом состоянии. Между тем наноструктурный сплав ВТ6, в котором при T=550°C доля β-фазы лишь 10% показывает сопоставимые значения относительного удлинения. При этом оценка энергии активации, сохранение равнооосности зерен, размытие текстуры однозначно свидетельствует в пользу главного механизма деформации зернограничного проскальзывания. Вероятно, такое необычное поведение связано с ускоренным ростом зерен в процессе сверхпластического течения (Рис. 1б), который снимает перенапряжения, возникающие при деформации. Косвенно, это подтверждает факт отсутствия пор в образцах после деформации.

Работа была поддержана грантом П№725 Министерства Науки и Образования Российской Федерации.

Литература

1. Kaibyshev O.A. Superplasticity of Alloys, Intermetallides and Ceramics / Berlin: Springer-Verlag, 1992.
2. Salishchev G.A. et al. Submicrocrystalline and nanocrystalline structure formation in materials and search for outstanding superplastic properties // Mater. Sci. Forum. – 1994. – 170-172. – P.121-130.
3. Ko Y.G. et al. Low-temperature superplasticity of ultra-fine-grained Ti-6AI-4V processed by equal-channel angular pressing // Metall. Mater. Trans. – 2006. – 37A. – P.381-391.
4. Sargent G.A. et al. Low-temperature coarsening and plastic flow behavior of an titanium billet material with an ultrafine microstructure // Metall. Mater. Trans. – 2008. – 39A. – P.2949-2964.
5. Sergueeva A.V. et al. Superplastic behaviour of ultrafine-grained Ti-6Al-4V alloys // Mater. Sci. Eng. – 2002. – A323. – P.318-325.
6. Wasserman G., Greven I. Texturen metallischer Werkstoffe / Berlin: Springer-Verlag, 1962.
7. Donachie M.J., Jr. Titamium: a Technical Guide /ASM International, USA, 2000.

STRUCTURAL CHANGES AND MECHANICAL BEHAVIOR DURING LOW-TEMPERATURE SUPERPLASTICITY OF NANOSTRUCTURED ALLOY TI-6AL-4V

G.A. Salishchev, E.A. Kudryavtsev, S.V. Zherebtsov

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: salishchev@bsu.edu.ru

Abstract. After isothermal multidirectional forging, the average grain size 135 nm in two-phase titanium alloy Ti-6-4 has been obtained. It has been the low-temperature superplasticity at 550°C in fine-grained state. At the optimum strain rate of $2\times10^{-4}s^{-1}$ elongation to failure was 1000% and the stain rate sensitivity value was m=0,47. The evolution of the microstructure during low-temperature deformation plays a key role in the process of superplastic flow.

Key words: low-temperature superplasticity, multidirectional forging, ultrafine grain structure, microstructure evolution.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. Два выпуска журнала посвящены чисто математическим работам и два – работам по физике и прикладной математике.

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков и(или) физиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (условий проведения эксперимента, если это экспериментальная работа по физике). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) номер УДК того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут**. При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (LaTeX, AMS LaTeX) следующие.

1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.

2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.

3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.

4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.

5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно**.

Шаблон для приготовления файла с рукописью

```
\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
УДК XXX
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf  Учреждение,\\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: $\underline{\mbox{имя@адрес}}$}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ...\ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}

\begin{enumerate}
\bibitem{1} Источник 1
\bibitem{2} Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line\vskip 0.1cm

2d   line \vskip 0.1cm and so on }
\medskip
```

```
{\bf  N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small  {\sf Enterprize,\\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: $\underline{\mbox{name@address}}$}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ...\
.}}
\newpage

\renewcommand\baselinestretch{1.0}



Автор1 -- учёная степень, должность на предприятии, страна
Автор2 -- учёная степень, должность на предприятии, страна
...
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам.

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.

Таблицы

Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Список литературных источников

Обращаем внимание авторов на требование к качественному оформлению списка используемых в работе литературных источников. В связи с тем, что требования, предъявляемые ГОСТом, при оформлении такого списка весьма сложны и ориентированы на решение задач, связанных с централизованным поиском и хранением научной информации, которые не специфичны для научно-исследовательской практики, в журнале используется собственная система его оформления. Типы литературных источников качественно довольно разнообразны. Поэтому редакция не предлагает универсальный рецепт их оформления. Единственным общим принципом, которым должен руководствоваться автор, состоит в том, литературная ссылка должна оформляться так, чтобы читатель имел максимально точную информацию о том, как найти и ознакомиться с научным результатом, на который опирается его работа.

Несмотря на отсутствие общего рецепта оформления списка, редакция требует соблюдение строгих правил оформления ссылок на литературные источники двух типов, которые являются наиболее распространенными. Это касается статей в регулярных периодических изданиях (в журналах) и книг (монографий и учебников). Принятые в журнале правила оформления литературных источников указанных двух типов е демонстрируются следующими примерами:

Журнальные статьи –

```
Цегельник В.В. Гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями
Пенлеве~// Теоретическая и математическая физика.~-- 2010.~-- 162;1.~-- С.69-74.

Demidov A.S., Kochurov A.S., Popov A.Yu. To the problem of the recovery of
non-linearities in equations of mathematical physics~// Journal of Mathematical
Sciences.~-- 2009.~-- 163;1.~-- P.46-77.
```

Книги (в частности, многотомные издания) –

```
Рытов~С.М., Кляцкин Ю.А., Татарский~В.И. Введение  в статистическую радиофизику~/
Случайные поля, т.2~/ М.: Наука, 1978.~-- 464~с.
```

(если издание однотомное, то позиция между двумя слэш-черточками становится ненужной и, поэтому исчезает).

Обращаем внимание на то, что:

1) должны быть указаны полные названия журнальных статей, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные;

2) при указании журнальных статей после года издания стоит номер (обязательно арабскими цифрами) тома журнала (если он имеется) и через точку с запятой стоит дополнительная информация (номер внутри тома, в частности, номер выпуска и т.д.); при этом номер тома может иметь сложное начертание и не выражаться только одним числом;

3) название журнала нужно давать полностью без сокращений;

4) каждая из книг в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

При несоблюдении описанных правил оформления литературных источников **работа будет возвращена автору(ам) на доработку**.