На правах рукописи

Козлова Елена Александровна

ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород — 2013

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет».

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Андреев Александр Анатольевич
Официальные оппоненты:	Боровских Алексей Владиславович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, профессор кафедры «Дифференциальные уравнения»
	Половинкин Игорь Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», доцент кафедры «Математический и прикладной анализ»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», факультет вычислительной математики и кибернетики

Защита состоится 23 апреля 2013 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, БелГУ, корпус 1, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Автореферат разослан «____» ____________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.015.08 Гриценко С.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Возникновение теории управления во многом связано с развитием техники. Появившаяся необходимость регулирования или поддержания в заданных пределах текущих значений некоторых кинематических характеристик машин или других объектов управления привела к созданию математического аппарата теории управления.

В 50-е г.г. XXв. в связи с прикладными потребностями возникла необходимость решения задач управления и оптимизации. Наиболее известны работами в этой области Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, изучавшие вопросы управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также Р. Беллман, разработавший методы динамического программирования.

Различным аспектам теории оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ф. П. Васильева, И.В. Гайшуна, Л. Янга и многих других.

Дальнейшее развитие прикладных исследований привело к необходимости управления более сложными объектами, поведение которых описывается с помощью уравнений с частными производными. Соответствующие задачи управления были рассмотрены в работах А. Г. Бутковского, А. И. Егорова, Ж.-Л. Лионса, К. А. Лурье, Т. К. Сиразетдинова, В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, С. А. Авдонина, С. А. Иванова, М. И. Белишева, Ю. С. Рожкова, Ю. Е. Аниконова, А. В. Боровских, Л. Н. Знаменской и других.

Исследованию задач граничного управления посвящена большая серия статей В. А. Ильина, Е. И. Моисеева. Для волнового и телеграфного уравнений авторы рассматривают задачи с начальными и финальными условиями, устанавливают возможность перевода описываемого уравнением объекта из начального состояния в финальное с помощью граничных функций и строят управления в явном виде. Построения производятся в классах $W_2^2(Q_{l,T})$, $W_2^1(Q_{l,T})$, $L_2(Q_{l,T})$. Граничные функции, построенные В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым, позволили им перейти к решению задачи об оптимальном управлении, когда среди множества решений необходимо выделить то, которое доставляет минимум некоторому заданному функционалу.

Результаты В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, а также А. И. Егорова, Л. Н. Знаменской, А. А. Андреева и С. В. Лексиной являются основой для исследования задач управления для уравнений и систем гиперболического типа, представленного в настоящей работе.

Целью диссертационной работы является построение решений задач граничного управления для систем уравнений гиперболического типа второго порядка (системы-аналога телеграфного уравнения и системы, содержащей смешанную производную) в случае коммутативных матричных коэффициентов.

Методы исследования. В настоящей работе использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, алгебраические и аналитические методы матричного исчисления, аппарат специальных функций, методы теории управления процессами, описываемыми гиперболическими уравнениями.

Научная новизна данной работы заключается в том, что:

- построено решение задачи граничного управления для системы гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными (аналог телеграфного уравнения) при различных формах входящих в нее коммутативных матричных коэффициентов;

- найдено решение задачи граничного управления для уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными, содержащего смешанную производную, для различных видов характеристических областей;

- найдено решение задачи граничного управления для системы гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, содержащей смешанную производную, при различных формах входящих в нее коммутативных матричных коэффициентов.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для дальнейших исследований задач граничного управления и некорректных задач для систем гиперболических уравнений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Условия существования и граничные управляющие функции, переводящие объект, описываемый системой уравнений гиперболического типа второго порядка (аналогом телеграфного уравнения) при различных формах входящих в нее коммутативных матричных коэффициентов, из заданного начального состояния в заданное финальное за определенное время.

2. Условия существования и явный вид граничных управляющих функций, переводящих объект, описываемый уравнением гиперболического типа второго порядка, содержащим смешанную производную, из заданного начального состояния в заданное финальное в случае малого времени управления.

3. Общий вид граничных функций, осуществляющих управление в условиях первой краевой задачи процессом, моделируемым гиперболическим уравнением второго порядка, содержащим смешанную производную, в случае достаточно большого времени управления.

4. Условия, при которых осуществимо управление процессом, моделируемым системой уравнений гиперболического типа второго порядка, содержащей смешанную производную, для различного времени управления.

5. Граничные функции, осуществляющие управление в условиях первой краевой задачи процессом, описываемым системой гиперболических уравнений, содержащей смешанную производную, при различных соотношениях между входящими в нее коммутативными матричными коэффициентами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах: второй, третьей международных конференциях «Математическая физика и ее приложения» (2010г.,2012г.), г. Самара; восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» в СамГТУ (2011г.); шестнадцатой Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2012г.) в СГУ; научном семинаре кафедры функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (руководитель семинара — академик РАН, д.ф.-м.н. Е. И. Моисеев) (2012г.); научном семинаре «Неклассические задачи математической физики» кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (руководитель семинара — д.ф.-м.н. Л. С. Пулькина) (2013г.); научном семинаре кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета (руководитель семинара — д.ф.-м.н. В. П. Радченко) (2013г.).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 11 публикациях, из них 7— в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка, содержащего 133 наименования. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

Содержание работы

Во введении приведен краткий обзор исследований, связанных с темой диссертационной работы, отображены ее содержание, постановка задач исследования, основные результаты и подход к исследованию, а также некоторая дополнительная информация о работе.

В первой главе рассмотрена задача граничного управления для системы-аналога телеграфного уравнения вида

$$u_{tt} - Au_{xx} + Cu = 0, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — n-мерная вектор-функция, A, C — постоянные коммутативные матрицы $(n \times n)$ с положительными собственными значениями $(a_1^2, \ldots, a_n^2, c_1^2, \ldots, c_n^2)$. Заданы начальные и финальные условия (соответственно):

$$u(x,0) = \varphi^0(x), \quad u_t(x,0) = \psi^0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(x,T) = \varphi^1(x), \quad u_t(x,T) = \psi^1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

необходимо найти граничные управления

$$\mu(t) = u(0,t), \quad \nu(t) = u(l,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Задача рассмотрена в области $Q = [0,l] \times [0,T]$. Вектор-функции $\varphi^0(x)$, $\psi^0(x)$, $\varphi^1(x)$, $\psi^1(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ имеют размерность n; $\mu_k(t), \nu_k(t) \in C[0,T]$, $k = \overline{1,n}$.

В разделах 1.1, 1.2 произведены необходимые предварительные построения: приведены решения задач Коши с начальными и финальными условиями, задач с данными на характеристиках, вычислены следы решений данных задач на граничных прямых $x = 0$, $x = l$. Результаты сформулированы в виде лемм.

В координатах (x, t) рассмотрено уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + c^2 u = 0, \tag{5}$$

с начальными условиями вида (2) или финальными условиями вида (3) (значения функций в данном случае из $\mathbb{R}$).

Лемма. *Если функции* $\varphi^0(x) \in C^2[0,l]$, $\psi^0(x) \in C^1[0,l]$ ($\varphi^1(x) \in C^2[0,l]$, $\psi^1(x) \in C^1[0,l]$), *то классическое решение задачи Коши* (5), (2) ((5), (3)) *в области* $\{at \le x \le l - at, 0 \le t \le l/2a\}$ ($\{a(T-t) \le x \le l - a(T-t), T - l/2a \le t \le T\}$) *имеет вид (соответственно):*

$$u(x,t) = \tfrac{\varphi^0(x+at)+\varphi^0(x-at)}{2} - \tfrac{c^2 t}{4a} \int\limits_{x-at}^{x+at} {}_0F_1\left(2; \tfrac{c^2}{4a^2}\left((x-z)^2 - a^2t^2\right)\right)\varphi^0(z)dz +$$
$$+ \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} {}_0F_1\left(1; \tfrac{c^2}{4a^2}\left((x-z)^2 - a^2t^2\right)\right)\psi^0(z)dz = f^0(a,c;x,t);$$

$$u(x,t) = \tfrac{\varphi^1(x+a(T-t))+\varphi^1(x-a(T-t))}{2} -$$
$$- \tfrac{c^2(T-t)}{4a}\int\limits_{x-a(T-t)}^{x+a(T-t)} {}_0F_1\left(2; \tfrac{c^2}{4a^2}\left((x-z)^2 - a^2(T-t)^2\right)\right)\varphi^1(z)dz -$$
$$- \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x-a(T-t)}^{x+a(T-t)} {}_0F_1\left(1; \tfrac{c^2}{4a^2}\left((x-z)^2 - a^2(T-t)^2\right)\right)\psi^1(z)dz = f^1(a,c;x,t),$$

где ${}_0F_1(\alpha; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В разделе 1.2 рассмотрены начальные и характеристические задачи для системы уравнений с кратными характеристиками вида $u_{tt} - u_{xx} + Cu = 0$, собственные значения матрицы C положительны.

В разделе 1.3 построено решение задачи граничного управления (1)–(3) для матриц A и C различной структуры. Для разделения исследуемой системы на отдельные уравнения в формулах (1)–(3) выполнена замена $u = Sw$ (при $\det S \ne 0$) и совершен переход к задаче вида

$$w_{tt} - \widetilde{A} w_{xx} + \widetilde{C} w = 0, \tag{6}$$
$$w(x,0) = \tilde{\varphi}^0(x), \quad w_t(x,0) = \tilde{\psi}^0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$
$$w(x,T) = \tilde{\varphi}^1(x), \quad w_t(x,T) = \tilde{\psi}^1(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{8}$$
$$\tilde{\mu}(t) = w(0,t), \quad \tilde{\nu}(t) = w(l,t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, $\widetilde{C} = S^{-1}CS$. Выделены следующие возможности для структуры матрицы A: собственные значения кратности 1; собственные значения, у которых алгебраическая кратность равна геометрической кратности (> 1); собственные значения, каждому из которых соответствует одна жорданова клетка (размерности > 1); собственные значения, каждому из которых соответствуют несколько жордановых клеток (хотя бы одна из которых размерности > 1).

В случае различных собственных значений матрицы A задача (6)–(8) допускает разделение на n отдельных задач граничного управления:

$$(w_k)_{tt} - a_k^2(w_k)_{xx} + c_k^2 w_k = 0, \tag{9}$$

$$w_k(x,0) = \tilde{\varphi}_k^0(x), \quad (w_k)_t(x,0) = \tilde{\psi}_k^0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{10}$$

$$w_k(x,T) = \tilde{\varphi}_k^1(x), \quad (w_k)_t(x,T) = \tilde{\psi}_k^1(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{11}$$

Для задачи (9)–(11) найдены условия управляемости вида:

$$f_k^0\left(a_k, c_k; x, T - \tfrac{x}{a_k}\right) = f_k^1\left(a_k, c_k; x, T - \tfrac{x}{a_k}\right), \quad \tfrac{a_k T}{2} \le x \le a_k T, \tag{12}$$

$$\tilde{\varphi}_k^0(x) = f_k^1(a_k, c_k; x, 0), \quad a_k T \le x \le l - a_k T, \tag{13}$$

$$\tilde{\psi}_k^0(x) = \tfrac{\partial}{\partial t} f_k^1(a_k, c_k; x, t)|_{t=0}, \quad a_k T \le x \le l - a_k T, \tag{14}$$

$$f_k^0\left(a_k, c_k; x, T + \tfrac{x-l}{a_k}\right) = f_k^1\left(a_k, c_k; x, T + \tfrac{x-l}{a_k}\right), \quad l - a_k T \le x \le \tfrac{2l - a_k T}{2}, \tag{15}$$

и построены управляющие функции $\tilde{\mu}_k(t)$, $\tilde{\nu}_k(t)$ для различных величин T. Результаты сформулированы в виде теорем.

Теорема 1.1. *Если в прямоугольной области $Q = [0,l] \times [0,T]$ поставлена задача граничного управления (9)—(11) с начальными и финальными функциями $\tilde{\varphi}_k^0$, $\tilde{\varphi}_k^1 \in C^2[0,l]$, $\tilde{\psi}_k^0$, $\tilde{\psi}_k^1 \in C^1[0,l]$, для которых при $0 < T < \frac{l}{2a_k}$ выполняются соотношения (12) — (15), а при $\frac{l}{2a_k} < T < \frac{l}{a_k}$ — соотношения (12), (15), граничные управления $\tilde{\mu}_k(t), \tilde{\nu}_k(t) \in C[0,T]$ имеют вид:*

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_k(t) &= r_k^{00}\left(\tfrac{l - a_k(T-t)}{2}\right) + r_k^{10}\left(\tfrac{a_k(T-t)}{2}\right) - b_k(0,t) r_k^{00}\left(\tfrac{l}{2}\right) + \\
&+ \tfrac{c_k^2(a_k(T-t)-l)}{4a_k^2} \int\limits_0^{-a_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \tfrac{c_k^2}{4a_k^2}(z + a_k(T-t))(l - a_k(T-t))\right) r_k^{00}(z_1)\, dz - \\
&- \tfrac{c_k^2(a_k(T-t))}{4a_k^2} \int\limits_0^{a_k(T-t)-l} {}_0F_1\left(2; \tfrac{c_k^2}{4a_k}(z - a_k(T-t) + l)(T-t)\right) r_k^{10}(z_1)\, dz,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}_k(t) &= r_k^{01}\left(\tfrac{l + a_k(T-t)}{2}\right) + r_k^{11}\left(\tfrac{2l - a_k(T-t)}{2}\right) - b_k(l,t) r_k^{11}\left(\tfrac{l}{2}\right) - \\
&- \tfrac{c_k^2(a_k(T-t)-l)}{4a_k^2} \int\limits_0^{a_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \tfrac{c_k^2}{4a_k^2}(z - a_k(T-t))(a_k(T-t) - l)\right) r_k^{01}(z_1)\, dz - \\
&+ \tfrac{c_k^2(a_k(T-t))}{4a_k^2} \int\limits_0^{l-a_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \tfrac{c_k^2}{4a_k}(z + a_k(T-t) - l)(t-T)\right) r_k^{11}(z_1)\, dz,
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$r_k^{ij}(x)=\tfrac{\tilde\varphi_k^i(2x-\alpha_k^{ij})+\tilde\varphi_k^i(\alpha_k^{ij})}{2}-$$
$$-\tfrac{c_k^2(x-\alpha_k^{ij})}{4a_k^2}\int\limits_{\alpha_k^{ij}}^{2x-\alpha_k^{ij}}{}_0F_1\left(2;\tfrac{c_k^2}{4a_k^2}(z-\alpha_k^{ij})(z-2x+\alpha_k^{ij})\right)\tilde\varphi_k^i(z)dz+$$
$$+\tfrac{(-1)^{i+j}}{2a_k}\int\limits_{\alpha_k^{ij}}^{2x-\alpha_k^{ij}}{}_0F_1\left(1;\tfrac{c_k^2}{4a_k^2}(z-\alpha_k^{ij})(z-2x+\alpha_k^{ij})\right)\tilde\psi_k^i(z)dz,$$

$$b_k(x,t)={}_0F_1\left(1;\frac{c_k^2}{4a_k^2}(x-a_k(T-t))(x+a_k(T-t)-l)\right),$$

$\alpha_k^{00}=l-a_kT,\ \alpha_k^{10}=0,\ \alpha_k^{01}=a_kT,\ \alpha_k^{11}=l,\ z_1=\frac{z+l}{2}.$

Теорема 1.2. *Если в прямоугольной области* $Q=[0,l]\times[0,T]$ *при* $T>\frac{l}{a_k}$ *поставлена задача граничного управления* (9)—(11) *с начальными и финальными функциями* $\tilde\varphi_k^0,\ \tilde\varphi_k^1\in C^2[0,l],\ \tilde\psi_k^0,\ \tilde\psi_k^1\in C^1[0,l]$, *то граничные управления* $\tilde\mu_k(t),\tilde\nu_k(t)\in C[0,T]$ *определяются формулами* (16), (17) *при* $T-\frac{l}{a_k}\le t\le T$, *а при* $0\le t<T-\frac{l}{a_k}$ *имеют вид:*

$$\tilde\mu_k(t)=\tfrac{\tilde\varphi_k^0(a_kt)+\tilde\varphi_k^0(-a_kt)}{2}-\tfrac{c_k^2t}{4a_k}\int\limits_{-a_kt}^{a_kt}{}_0F_1\left(2;\tfrac{c_k^2}{4a_k^2}\left(z^2-a_k^2t^2\right)\right)\tilde\varphi_k^0(z)dz+$$
$$+\tfrac{1}{2a_k}\int\limits_{-a_kt}^{a_kt}{}_0F_1\left(1;\tfrac{c_k^2}{4a_k^2}\left(z^2-a_k^2t^2\right)\right)\tilde\psi_k^0(z)dz,$$

$$\tilde\nu_k(t)=\tfrac{\tilde\varphi_k^0(l+a_kt)+\tilde\varphi_k^0(l-a_kt)}{2}-\tfrac{c_k^2t}{4a_k}\int\limits_{l-a_kt}^{l+a_kt}{}_0F_1\left(2;\tfrac{c_k^2}{4a_k^2}\left((l-z)^2-a_k^2t^2\right)\right)\tilde\varphi_k^0(z)dz+$$
$$+\tfrac{1}{2a_k}\int\limits_{l-a_kt}^{l+a_kt}{}_0F_1\left(1;\tfrac{c_k^2}{4a_k^2}\left((l-z)^2-a_k^2t^2\right)\right)\tilde\psi_k^0(z)dz.$$

Теорема 1.3. *В условиях задачи* (1)-(3) *в прямоугольной области* $Q=$ $=[0,l]\times[0,T]$ *при* $\varphi_k^0,\ \varphi_k^1\in C^2[0,l]$ *и* $\psi_k^0,\ \psi_k^1\in C^1[0,l]$, $k=\overline{1,n}$, *управление возможно, если для всех задач* (9)-(11) *выполнены необходимые условия из теорем 1.1, 1.2. При этом векторы управления* $\mu(t)$, $\nu(t)$ *могут быть получены с помощью формул* $\mu(t)=S\tilde\mu(t)$, $\nu(t)=S\tilde\nu(t)$, *где* S *— невырожденная матрица, использовавшаяся при переходе к задаче* (6)-(8) *и одновременно приводящая матрицы* A *и* C *к диагональной форме, а* $\tilde\mu_k(t),\tilde\nu_k(t)\in C[0,T]$ *есть решения задач управления* (9)-(11).

Аналогичным образом решена задача граничного управления для случая $A=a^2E$. При этом использован метод Римана для систем гиперболических уравнений. Результат сформулирован в виде теоремы.

Если нормальная жорданова форма матрицы A представляет собой единственную жорданову клетку (порядка >1), то система (6) содержит как однородные, так и неоднородные уравнения.

Теорема 1.5. *Если в прямоугольной области $Q = [0, l] \times [0, T]$ поставлена задача граничного управления (6)-(8) с начальными и финальными вектор-функциями φ^0, φ^1 с компонентами из $C^{n+2-k}[0, l]$, ψ^0, ψ^1 с компонентами из $C^{n+1-k}[0, l]$, для которых для заданной величины T выполняются соотношения, указанные в теоремах 1.1, 1.2, то компоненты граничных управлений $\tilde{\mu}_k(t)$, $\tilde{\nu}_k(t) \in C[0, T]$ имеют вид:*

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_1 = f_1(0, t), \\ \tilde{\mu}_k = f_k(0, t) + \delta_a w_{k-1}(0, t) + \sum\limits_{j=1}^{k-1} c_{k-j+1} \delta_c w_j(0, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_1 = f_1(l, t), \\ \tilde{\nu}_k = f_k(l, t) + \delta_a w_{k-1}(l, t) + \sum\limits_{j=1}^{k-1} c_{k-j+1} \delta_c w_j(l, t), \end{cases}$$

где $f_k(x, t)$ — решение соответствующей однородной задачи, $\delta_a = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a}$, $\delta_c = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial c}$, c_k — компоненты матрицы $S^{-1} C S$.

Во второй главе рассмотрена задача граничного управления для системы гиперболических уравнений вида

$$u_{tt} + 2B u_{xt} + C u_{xx} = 0, \tag{18}$$

где B, C — постоянные коммутативные матрицы размерности $n \times n$, $u(x, t)$ — n-мерная вектор-функция. Заданы начальные условия (2) и финальные условия (3), необходимо найти граничные управления (4). Задача рассматривается в прямоугольнике $Q = [0, l] \times [0, T]$. Раздел 2.1 содержит необходимые предварительные построения, включая решения задач Коши с начальными и финальными условиями и задач с данными на характеристиках для уравнения, соответствующего системе (18) ($b^2 > c$):

$$u_{tt} + 2b u_{xt} + c u_{xx} = 0, \tag{19}$$

обозначим $p = b - \sqrt{b^2 - c}$, $q = b + \sqrt{b^2 - c}$, $\gamma = (q - p)^{-1}$. Приведены следы решений данных задач на прямых $x = 0$, $x = l$. Результаты сформулированы в виде лемм.

Раздел 2.2 содержит решение задачи граничного управления для уравнения (19) для случаев $q > -p > 0$ и $q > p > 0$. Получены следующие соотношения, при которых управление возможно:

$$q\varphi^0(-pT) - p\varphi^0(x) + \int\limits_x^{-pT} \psi^0(z)dz = q\varphi^1(0) - p\varphi^1(\alpha x) - \int\limits_0^{\alpha x} \psi^1(z)dz \tag{20}$$

при $0 \le x < -pT$,

$$
\begin{aligned}
&\varphi^0(x)=\gamma\Big(q\varphi^1(x+pT)-p\varphi^1(x+qT)-\int\limits_{x+pT}^{x+qT}\psi^1(z)dz\Big),\\
&\psi^0(x)=-pq\gamma\Big((\varphi^1)'(x+pT)-(\varphi^1)'(x+qT)\Big)+\\
&+\gamma\Big(p\psi^1(x+pT)-q\psi^1(x+qT)\Big),\quad \text{при}\quad -pT\le x\le l-qT,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&q\varphi^0(x)-p\varphi^0(l-qT)+\int\limits_{l-qT}^{x}\psi^0(z)dz=\\
&=q\varphi^1(\beta x+(1-\beta)l)-p\varphi^1(2x-l)-\int\limits_{\beta x+(1-\beta)l}^{2x-l}\psi^1(z)dz,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

при $l-qT<x\le l$;

$$
\begin{aligned}
&F^L(l-qT)=-\gamma q\varphi^0(x)-\gamma\int\limits_0^x\psi^0(z)dz+\\
&+\gamma q\varphi^1(x+pT)-\gamma p\varphi^1(qT)-\gamma\int\limits_{x+pT}^{qT}\psi^1(z)dz,\quad -pT\le x\le l,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\alpha=1-q/p$, $\beta=1-p/q$, $F^L(s)$ (а также $G^R(s)$, $G^L(s)$) — функции, полученные при продолжении начальных условий.

Теорема 2.1. *Если в прямоугольной области $Q=[0,l]\times[0,T]$ поставлена задача граничного управления (19), (2), (3) (в случае $q>-p>0$) с начальными и финальными функциями φ^0, $\varphi^1\in C^2[0,l]$, ψ^0, $\psi^1\in C^1[0,l]$, для которых при $T<\gamma l$ выполняются соотношения (20)-(22), а при $\gamma l\le T<l/q$ — соотношения (20), (22), то граничные управления $\mu(t),\nu(t)\in C[0,T]$ имеют вид:*

$$
\begin{aligned}
\mu(t)=\gamma\Big(&q\varphi^0(-pt)-q\varphi^0(-pT)-\int\limits_{-pt}^{-pT}\psi^0(z)dz+\\
&+q\varphi^1(0)-p\varphi^1(-qt+qT)-\int\limits_0^{-qt+qT}\psi^1(z)dz\Big)\\
\nu(t)=\gamma\Big(&p\varphi^0(l-qT)-p\varphi^0(l-qt)+\int\limits_{l-qt}^{l-qT}\psi^0(z)dz+\\
&+q\varphi^1(l-pt+pT)-p\varphi^1(l)-\int\limits_{l-pt+pT}^{l}\psi^1(z)dz\Big).
\end{aligned}
$$

Теорема 2.2. *Если в прямоугольной области $Q=[0,l]\times[0,T]$ поставлена задача граничного управления (19), (2), (3) (в случае $q>-p>0$) с начальными и финальными функциями φ^0, $\varphi^1\in C^2[0,l]$, ψ^0, $\psi^1\in C^1[0,l]$, для которых при*

$l/q < T \le -l/p$ выполняется соотношение (23), то граничные управления $\mu(t), \nu(t) \in C[0,T]$ имеют вид:

$$\mu(t) = \begin{cases} \gamma\Big(q\varphi^0(-pt) + \int\limits_0^{-pt} \psi^0(z)dz\Big) + F^L(-qt), & 0 \le t < T - \frac{l}{q}, \\ \gamma\Big(q\varphi^0(-pt) - q\varphi^0(-pT) - \int\limits_{-pt}^{-pT} \psi^0(z)dz + \\ +q\varphi^1(0) - p\varphi^1(qT - qt) - \int\limits_0^{qT-qt} \psi^1(z)dz\Big), & T - \frac{l}{q} \le t \le T, \end{cases}$$

$$\nu(t) = \begin{cases} \gamma\Big(q\varphi^0(l) - p\varphi^0(l - qt) + \int\limits_{l-qt}^{l} \psi^0(z)dz\Big) + \\ +\gamma\Big(q\varphi^1(l - pt + pT) - q\varphi^1(l + pT) + \int\limits_{l+pT}^{l-pt+pT} \psi^1(z)dz\Big), & 0 \le t \le \frac{l}{q}, \\ \gamma\Big(q\varphi^0(l) + \int\limits_0^{l} \psi^0(z)dz\Big) + F^L(l - qt) + \\ +\gamma\Big(q\varphi^1(l - pt + pT) - q\varphi^1(l + pT) + \int\limits_{l+pT}^{l-pt+pT} \psi^1(z)dz\Big), & \frac{l}{q} < t \le T. \end{cases}$$

Теорема 2.3. *Если в прямоугольной области $Q = [0,l]\times[0,T]$ поставлена задача граничного управления (19), (2), (3) (в случае $q > -p > 0$) с начальными и финальными функциями φ^0, $\varphi^1 \in C^2[0,l]$, ψ^0, $\psi^1 \in C^1[0,l]$, для которых при $T > -l/p$ выполняется соотношение*

$$F^L(l - qT) + G^R(-pT) = \gamma\Big(q\varphi^1(0) - p\varphi^1(l) - \int\limits_0^{l} \psi^1(z)dz - \int\limits_0^{l} \psi^0(z)dz\Big),$$

то граничные управления $\mu(t), \nu(t) \in C[0,T]$ имеют вид:

$$\mu(t) = \begin{cases} \gamma\Big(q\varphi^0(-pt) + \int\limits_0^{-pt} \psi^0(z)dz\Big) + F^L(-qt), & 0 \le t \le T - \frac{l}{q}, \\ \gamma\Big(q\varphi^1(0) - p\varphi^1(qT - qt) - \int\limits_0^{qT-qt} \psi^1(z)dz + \\ +q\varphi^0(-pt) - \int\limits_{-pt}^{l} \psi^0(z)dz\Big) - G^R(-pT), & T - \frac{l}{q} < t \le -\frac{l}{p}, \\ \gamma\Big(q\varphi^1(0) - p\varphi^1(qT - qt) - \int\limits_0^{qT-qt} \psi^1(z)dz\Big) + \\ +G^R(-pt) - G^R(-pT), & -\frac{l}{p} < t \le T, \end{cases}$$

$$\nu(t)=\begin{cases}\gamma\Big(-p\varphi^0(l-qt)+\int\limits_{l-qt}^{l}\psi^0(z)dz\Big)+G^R(l-pt), & 0\le t\le T+\frac{l}{p},\\ \gamma\Big(q\varphi^1(l-pt+pT)-p\varphi^1(l)-\int\limits_{l-pt+pT}^{l}\psi^1(z)dz- & \\ -p\varphi^0(l-qt)-\int\limits_{0}^{l-qt}\psi^0(z)dz\Big)-F^L(l-qT), & T+\frac{l}{p}<t\le\frac{l}{q},\\ \gamma\Big(q\varphi^1(l-pt+pT)-p\varphi^1(l)-\int\limits_{l-pt+pT}^{l}\psi^1(z)dz\Big)+ & \\ +F^L(l-qt)-F^L(l-qT), & \frac{l}{q}<t\le T,\end{cases}$$

при $-l/p<T<l/q-l/p$ и

$$\mu(t)=\begin{cases}\gamma\Big(q\varphi^0(-pt)+\int\limits_{0}^{-pt}\psi^0(z)dz\Big)+F^L(-qt), & 0\le t\le T-\frac{l}{q},\\ \gamma\int\limits_0^l\psi^0(z)dz+F^L(-qt)+G^R(-pt), & T-\frac{l}{q}<t\le-\frac{l}{p},\\ \gamma\Big(q\varphi^1(0)-p\varphi^1(qT-qt)-\int\limits_{0}^{qT-qt}\psi^1(z)dz\Big)+ & \\ +G^R(-pt)-G^R(-pT), & -\frac{l}{p}<t\le T,\end{cases}$$

$$\nu(t)=\begin{cases}\gamma\Big(-p\varphi^0(l-qt)+\int\limits_{l-qt}^{l}\psi^0(z)dz\Big)+G^R(l-pt), & 0\le t\le T+\frac{l}{p},\\ \gamma\int\limits_0^l\psi^0(z)dz+F^L(l-qt)+G^R(l-pt), & T+\frac{l}{p}<t\le\frac{l}{q},\\ \gamma\Big(q\varphi^1(l-pt+pT)-p\varphi^1(l)-\int\limits_{l-pt+pT}^{l}\psi^1(z)dz\Big)+ & \\ +F^L(l-qt)-F^L(l-qT), & \frac{l}{q}<t\le T,\end{cases}$$

при $T\ge l/q-l/p$.

Теорема 2.4. *Если в прямоугольной области* $Q=[0,l]\times[0,T]$ *поставлена задача граничного управления* (19), (2), (3) *(в случае* $q>p>0$*) с начальными и финальными функциями* φ^0, $\varphi^1\in C^2[0,l]$, ψ^0, $\psi^1\in C^1[0,l]$, *для которых при* $T\le\frac{l}{q}$ *выполняются соотношения*

$$\begin{aligned}&\varphi^1(x)=\gamma\Big(q\varphi^0(x-pT)-p\varphi^0(x-qT)+\int\limits_{x-qT}^{x-pT}\psi^0(z)dz\Big),\\ &\psi^1(x)=\gamma\Big(-pq(\varphi^0)'(x-pT)+pq(\varphi^0)'(x-qT)-p\psi^0(x-pT)+\\ &\qquad+q\psi^0(x-qT)\Big), \qquad qT\le x\le l,\end{aligned}$$

$$q\varphi^0(x) - p\varphi^0(0) + \int\limits_0^x \psi^0(z)dz = q\varphi^1(x+pT) - p\varphi^1(qT) - \int\limits_{x+pT}^{qT} \psi^1(z)dz,$$

$0 \le x \le (q-p)T$, *то граничные управления* $\mu(t), \nu(t) \in C[0,T]$ *имеют вид:*

$$\mu(t) = \gamma\Big(q\varphi^1(p(T-t)) - p\varphi^1(q(T-t)) - \int\limits_{p(T-t)}^{q(T-t)} \psi^1(z)dz\Big), \tag{24}$$

$$\nu(t) = \gamma\Big(q\varphi^0(l-pt) - p\varphi^0(l-qt) + \int\limits_{l-qt}^{l-pt} \psi^0(z)dz\Big). \tag{25}$$

Теорема 2.5. *Если в прямоугольной области* $Q = [0,l]\times[0,T]$ *поставлена задача граничного управления* (19), (2), (3) *(в случае* $q > p > 0$*) с начальными и финальными функциями* φ^0, $\varphi^1 \in C^2[0,l]$, ψ^0, $\psi^1 \in C^1[0,l]$, *для которых при* $\frac{l}{q} < T \le \frac{l}{p}$ *выполняются соотношения*

$$G^L(x) + F^L(l-qT) = \gamma\Big(q\varphi^1(x+pT) - p\varphi^1(l) - \int\limits_{x+pT}^{l} \psi^1(z)dz\Big) \tag{26}$$

для $\frac{p}{q}(l-qT) \le x < 0$ *и*

$$q\varphi^0(x) + \int\limits_0^x \psi^0(z)dz + (q-p)F^L(l-qT) = q\varphi^1(x+pT) - p\varphi^1(l) - \int\limits_{x+pT}^{l} \psi^1(z)dz$$

для $0 \le x \le l-pT$, *то граничные управления* $\mu(t), \nu(t) \in C[0,T]$ *имеют вид:* (24) *при* $T - \frac{l}{q} \le t \le T$, (25) *при* $0 \le t \le \frac{l}{q}$,

$$\mu(t) = G^L(-pt) + F^L(-qt), \qquad 0 \le t < T - \frac{l}{q}, \tag{27}$$

$$\nu(t) = \gamma\Big(q\varphi^0(l-pt) + \int\limits_0^{l-pt} \psi^0(z)dz\Big) + F^L(l-qt), \qquad \frac{l}{q} < t \le T. \tag{28}$$

Теорема 2.6. *Если в прямоугольной области* $Q = [0,l]\times[0,T]$ *поставлена задача граничного управления* (19), (2), (3) *(в случае* $q > p > 0$*) с начальными и финальными функциями* φ^0, $\varphi^1 \in C^2[0,l]$, ψ^0, $\psi^1 \in C^1[0,l]$, *для которых при* $T > \frac{l}{p}$ *выполняется соотношение* (26), *то граничные управления* $\mu(t), \nu(t) \in C[0,T]$ *определяются соотношениями* (24), (27), (25), (28) *и*

$$\nu(t) = G^L(l-pt) + F^L(l-qt), \quad \frac{l}{p} < t \le T.$$

В разделе 2.3 рассмотрена задача граничного управления для системы уравнений (18) с начальными и финальными условиями (2), (3). Как и в первой главе, с помощью невырожденной замены $u = Sw$ совершен переход к задаче для системы

$$w_{tt} + 2\widetilde{B}w_{xt} + \widetilde{C}w_{xx} = 0, \tag{29}$$

где $\widetilde{B} = S^{-1}BS$, $\widetilde{C} = S^{-1}CS$, с условиями (7), (8) Для структуры матрицы B выделены те же возможности, что и для матрицы A в первой главе.

Раздел 2.3.1 содержит решение задачи управления для системы (18), содержащей простую матрицу B с различными собственными значениями. В этом случае преобразованная система (29) распадается на n отдельных уравнений вида

$$(w_k)_{tt} + 2b_k(w_k)_{xx} + c_k(w_k)_{xx} = 0, \tag{30}$$

($b_k^2 > c_k$), каждому из которых соответствуют условия (10), (11). На основе полученных в разделе 2.2 результатов сформулированы обобщающие теоремы.

В разделе 2.3.2 выделен случай: матрица B имеет вид bE, матрица C содержит единственную жорданову клетку с собственным значением c. Это означает, что среди уравнений системы (29) есть неоднородные.

Теорема 2.9. *Если в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$ поставлена задача граничного управления (29), (7), (8) с начальными и финальными вектор-функциями с компонентами $\tilde{\varphi}_k^0$, $\tilde{\varphi}_k^1 \in C^{n+2-k}[0,l]$, $\tilde{\psi}_k^0$, $\tilde{\psi}_k^1 \in C^{n+1-k}[0,l]$, для которых при различных соотношениях между коэффициентами p и q и заданной величины T выполняются соотношения теорем 2.1-2.6, то компоненты граничных управлений $\tilde{\mu}_k(t)$, $\tilde{\nu}_k(t) \in C[0,T]$ представимы в виде:*

$$\tilde{\mu}_k = \sum_{j=1}^{k} \delta_1^{k-j} f_j(0,t), \qquad \tilde{\nu}_k = \sum_{j=1}^{k} \delta_1^{k-j} f_j(l,t),$$

где $\delta_1 = \frac{1}{q-p}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$, $\delta_1^0 f \equiv f$, $f_k(x,t)$ — решение соответствующей однородной задачи.

В разделе 2.3.3 рассмотрена матрица B, содержащая единственную жорданову клетку (порядка >1), матрица C приведена к треугольному виду. Решение задачи управления построено аналогично решению задачи раздела 1.3.3 (теорема 1.5) с использованием операторов δ_1 и $\delta_2 = -\frac{2}{q-p}\left(p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q}\right)$. Результат сформулирован в виде теоремы.

Заключение

1. Для системы уравнений гиперболического типа второго порядка, не содержащей смешанную производную, получены решения задачи управления в условиях первой краевой задачи для произвольного времени управления.

2. Определены условия, при которых управление объектом, описываемым данной системой, возможно.

3. Для гиперболического уравнения второго порядка, содержащего смешанную производную (в случае отсутствия младших членов), сформулирована задача граничного управления, в зависимости от относительного расположения характеристик определены области построения решения данной задачи.

4. Получены условия существования и явный вид граничных управляющих функций, переводящих объект, описываемый гиперболическим уравнением второго порядка, содержащим смешанную производную, из заданного начального состояния в заданное финальное в случае малого времени управления.

5. В случае достаточно большого времени управления построен общий вид управляющих функций в условиях первой краевой задачи.

6. Для системы уравнений гиперболического типа второго порядка, содержащей смешанную производную, сформулирована задача граничного управления и определены условия, при которых управление осуществимо.

7. Построены граничные функции, осуществляющие управление в условиях первой краевой задачи процессом, описываемым системой гиперболических уравнений, содержащей смешанную производную, при различных соотношениях между входящими в нее коммутативными матричными коэффициентами.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] *Козлова, Е. А.* Задача управления для системы телеграфных уравнений / *Е. А. Козлова* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2011. — № 3(24). — С. 162–166.

[2] *Козлова, Е. А.* Задача о полном успокоении для гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную / *Е. А. Козлова* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2011. — № 4(25). — С. 37–42.

[3] *Козлова, Е. А.* Задача управления для гиперболического уравнения в случае характеристик с угловыми коэффициентами одного знака / *Е. А. Козлова* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2012. — № 1(26). — С. 243–247.

[4] *Козлова, Е. А.* Задача граничного управления для телеграфного уравнения / *Е. А. Козлова* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2012. — № 2(27). — С. 174–178.

[5] *Козлова, Е. А.* Задача о полном успокоении для одного класса систем гиперболических уравнений второго порядка / *Е. А. Козлова* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2012. — № 3(28). — С. 47–52.

[6] *Козлова, Е. А.* Задача Коши для системы гиперболических уравнений, содержащей смешанную производную / *Е. А. Козлова* // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2012. — № 4(29). — С. 218–221.

[7] *Козлова, Е. А.* Задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа / *Е. А. Козлова* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — № 1, Ч.2. — С. 51–56.

Другие публикации:

[8] *Козлова, Е. А.* Задача граничного управления для системы телеграфных уравнений / *Е. А. Козлова* // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. восьмой Всероссийской научной конф. с международным участием. Ч. 3. Самара: СамГТУ. — 2011. — С. 95–98.

[9] *Козлова, Е. А.* Задача о полном успокоении для гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную / *Е. А. Козлова* // В сб.: Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 16-й Саратовской зимней школы. Саратов: Научная книга. — 2012. — С. 86.

[10] *Козлова, Е. А.* Граничное управление процессами, описываемыми системами гиперболических уравнений / *А. А. Андреев, Е. А. Козлова, С. В. Лексина* // В сб.: Материалы третьей международной конф. «Математическая физика и ее приложения». Самара: СамГТУ. — 2012. — С. 33–34.

[11] *Козлова, Е. А.* Задача Коши для системы гиперболических уравнений, содержащей смешанную производную / *Е. А. Козлова* // В сб.: Материалы третьей международной конф. «Математическая физика и ее приложения». Самара: СамГТУ. — 2012. — С. 168.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета Д 212.015.08
ФГАОУ ВПО НИУ «БелГУ» (протокол №2 от 05.03.2013г.)
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ №233.
ФГБОУ ВПО «СамГТУ»
Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.