На правах рукописи

Зимин Решат Нариманович

МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФФУЗИИ И КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСЕЙ В ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород – 2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и механики ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор
Мейрманов Анварбек Мукатович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной
математики НИУ «Высшая школа
экономики»
Данилов Владимир Григорьевич

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического
анализа ФГАОУ ВПО НИУ «БелГУ»
Пенкин Олег Михайлович

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова»,
механико - математический факультет

Защита диссертации состоится 23 апреля 2013 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, корп. 1, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного национального исследовательского университета.

Автореферат разослан « » 2013 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.015.08 — Гриценко Светлана Александровна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Диссертация посвящена методам усреднения математических моделей диффузии-конвекции примесей в жидкости, движущейся в пороупругой среде. Задача о движении жидкости в пористой среде рассматривалась многими авторами, в числе ключевых отметим работы М. Био, К. фон Терцаги, Р. Барриджа и Дж. Келлера, Э. Санчес-Паленсии, Т. Леви, А.М. Мейрманова, А.Л. Пятницкого, Г.А. Чечкина, А.С. Шамаева, Дж. Бьюкенена, Ж. Лина, М. Бакингема, Т. Клопиу, Ж. Ферри, Р. Гилберта, А. Микелича, Л. Паоли, Т. Леви, Г. Нгуетсенга, Ж. Санчес-Хьюберта. Попытки учесть упругие свойства твердого скелета при диффузии и конвекции примесей в пористой среде ранее не предпринимались. Между тем такие процессы возникают в практических приложениях, таких как фильтрация примесей из подземных захоронений или фильтрация примесей из водоемов в грунт, засоление почв и т.п. Данная тематика включена в:

пункт 6 - рациональное природопользование - перечня **Приоритетных направлений науки РФ**;

пункт 8 - технологии атомной энергетики, ядерного топливного цикла, безопасного обращения с радиоактивными отходами и отработавшим ядерным топливом,

пункт 34 - технологии экологически безопасной разработки месторождений и добычи полезных ископаемых - перечня **Критических Технологий РФ.**

Все это показывает, что задачи, рассматриваемые в диссертации, весьма актуальны.

Цель работы.

1. Исследование разрешимости начально-краевых задач, моделирующих процесс диффузии и конвекции примесей в пороупругой среде на микроскопическом уровне.

2. Строгий вывод макроскопических математических моделей диффузии и конвекции примесей в пороупругих средах с помощью методов теории усреднения.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В числе наиболее важных следует отметить:

1) исследование разрешимости начально-краевых задач, описывающих процесс диффузии-конвекции примесей в пороупругой среде на мик-

роскопическом уровне;

2) строгое усреднение математических моделей диффузии и конвекции примесей, описывающих физический процесс на микроскопическом уровне.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в теории нелинейных начально-краевых задач, в теории усреднения дифференциальных уравнений, а также при математическом моделировании процессов фильтрации жидкостей в пористых средах.

Методы исследования. Основными методами исследования являются классические и современные методы дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики, комплексного и функционального анализа. В частности, для построения приближенных решений дифференциальных уравнений использовались метод Галеркина и теорема Шаудера о неподвижной точке, для доказательства сходимости приближенных решений дифференциальных уравнений к точному решению - метод априорных оценок, методы компактности (как известные в литературе, так и доказанные автором диссертации в соавторстве с научным руководителем). При выводе усредненных уравнений использовался метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга и Г. Аллэира.

Апробация работы. Наиболее значимые результаты диссертации докладывались на VIII школе молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», которая проводилась в рамках Российско-Болгарского симпозиума (Нальчик-Хабез, 2010); на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2010); на международной конференции, посвященной 110-ой годовщине со дня рождения И.Г. Петровского (Москва, 2011), на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010) и на международной конференции «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» (Белгород, 2011).

Публикации.Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1] - [7]. Публикации [3] - [7] выполнены в изданиях из перечня ведущих периодических изданий, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов. Статьи [1] - [2], [4] - [7] выполнены совместно с научным руководителем А.М. Мейрмановым. В совместных с А.М. Мейрмановым статьях научному руководителю принадлежат постановка задач и выбор методик исследования, а соискателю - реализация указанных методик.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Объем диссертации составляет 138 страницы, список библиографии - 111 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приведен краткий обзор используемой литературы, изложены актуальность темы, цель работы, методы исследования, научная новизна, публикации по теме диссертации и личный вклад автора в совместные работы, апробация работы, значимость, структура и содержание работы.

Уравнения пороупругости, полученные К. фон Терцаги[1] и М. Био[2] долгое время являлись общепринятыми и служили основой для решения практических задач пороупругости. Эти уравнения учитывают перемещение не только жидкости в порах, но и твердого скелета. Предлагаемые К. фон Терцаги и М. Био модели называют феноменологическими: в них постулируются свойства смеси твердой и жидкой компонент. Позже, ряд авторов (Р. Барридж и Дж. Келлер[3], Э. Санчес-Паленсия[4], Т. Леви) предложили вывод уравнений пороупругости на основе основных законов механики сплошных сред и методов усреднения. Это было вполне естественно, сначала описать совместное движение упругого скелета и жидкости в порах на микроскопическом уровне, используя классические законы механики сплошных сред, а затем найти соответствующие аппроксимирующие модели с помощью теории усреднения (усредненные уравнения).

Так, совместное движение в области описывалось ими базовой математической моделью, которая содержала динамические уравнения Стокса для жидкости в поровом пространстве, динамические уравнения Ламе

[1] *Terzaghi K.* Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen// Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematiesch-Naturwissenschaftliche Klasse, – 1923. – V. 132. – № IIa. – P. 104-124.

[2] *Biot M.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // Journal of Applied Physics. – 1955. – V. 26. – P.182-185.

[3] *Burridge R., Keller J. B.* Poroelasticity equations derived from microstructure// J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – V. 70.- № 4.– P. 1140- 1146.

[4] *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. - Berlin: Springer. Lecture Notes in Physics. – V. 129, 1980.

для твердой компоненты и условие непрерывности нормальных напряжений на общей границе «поровое пространство - твердый скелет». Все уравнения понимаются в смысле теории распределений (как соответствующие интегральные тождества).

Приведенная выше задача является сильно нелинейной и содержит еще одну неизвестную величину - общую границу «поровое пространство - твердый скелет». Главным постулатом здесь является то, что твердая и жидкая компоненты не смешиваются. Таким образом, неизвестная (свободная) граница является поверхностью **контактного разрыва**, которая определяется из задачи Коши для характеристической функции порового пространства.

Для упрощения данной системы естественной была идея линеаризации исходной системы.

Различные частные случаи линеаризации рассматривались многими авторами: Дж. Бьюкенен - Р. Гильберт - Ж. Лин, М. Бакингем, Р. Барридж - Дж. Келлер, Т. Клопиу - Ж. Ферри - Р. Гилберт - А. Микелич - Л. Паоли, Т. Леви, Г. Нгуетсенг, Ж. Санчес-Хьюберт, Э. Санчес-Паленсия. Систематическое изучение описанной задачи можно найти в работе А.М. Мейрманова[5], где в зависимости от значения безразмерных параметров получаются различные типы физических процессов:

- очень медленных по времени процессов, таких как фильтрация жидкости;

- быстропротекающие процессы, такие как акустика или гидравлический удар;

- различные типы сплошных сред (сжимаемые или несжимаемые; пороупругие среды или абсолютно твердый скелет и т.д.).

Таким образом, у нас есть набор приближенных моделей, от простых до весьма сложных. Выбор той или иной модели зависит только от наших практических потребностей. Основная идея состоит в том, чтобы найти наиболее адекватные и правильные математические модели на микроскопическом уровне для каждого из рассмотренных физических процессов, которые базируются на основных принципах механики сплошных сред, и выполнить предельный переход по малому параметру усреднения.

Выбор модели на микроскопическом уровне должен основываться на

[5] *Мейрманов А.М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах// Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48. – № 3. – С. 645-667

определении теоретически малых параметров и безразмерных критериев, описывающих процесс (медленный или быстропротекающий, сжимаемая или несжимаемая среда и т.д).

Подчеркнем, что все наши результаты основаны на методе двухмасштабной сходимости Нгуетсенга[6].

Общие вопросы теории усреднения дифференциальных операторов рассматриваются в монографиях многих исследователей: В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник[7]; О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна, А.С. Шамаева[8]; В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова; А. Бенсусана, Ж.Л. Лионса, Д. Папаниколау; Э. Санчес-Паленсии; Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко; А.Л. Пятницкого, Г.А. Чечкина, А.С. Шамаева[9] и других авторов.

Если рассматривать только процесс диффузии, то такие модели достаточно хорошо и полно были изучены и описаны в монографиях В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник[7]; Э. Санчес-Паленсии[4].

Очень интересной с физической и математической точек зрения является задача о совместном определении распределения концентрации примеси при ее диффузии и конвекции, и поля скоростей несущей жидкости. Такая задача возникает, если определение поля скоростей зависит от содержания примеси в жидкости. Соответствующие модели динамики вязкой жидкости известны (смотри, например, работу Л.В. Овсянникова[10]) и для них либо коэффициент вязкости зависит от концентрации, либо концентрация линейным образом входит в массовую силу (объемное расширение), либо и то и другое. Возможно также появление концентрации в уравнении неразрывности. Все зависит от способа упрощения (линеаризации) исходных нелинейных уравнений. До последнего времени какие-либо результаты по моделям совместного определения распределения концентрации примеси и поля скоростей несущей жидкости отсутствовали. Только в последнее время появились работы Св.А. Гриценко, в которых в уравнениях динамики жидкости в абсолютно твердом

---

[6] *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence// Int. J. Pure and Appl. Math. – 2002. – V. 2. – № 1(2002). – P. 35- 86.

[7] *Jikov V. V., Kozlov S. M., and Oleinik O. A.* Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. – New York: Springer-Verlag, 1994

[8] *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: изд-во МГУ., 1990

[9] *Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.* Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск: Тамара Рожковская. Белая серия в математике и физике. – Т.3, 2007

[10] *Овсянников Л.В.* Введение в механику сплошных сред. Часть I, II. – Новосибирск: Новосибирский Государственный Университет, 1976

пористом грунте вязкость жидкости зависела от концентрации примеси. Модели, в которых поле скоростей несущей жидкости зависит и от концентрации примеси и от динамики упругого скелета грунта, до настоящего времени не изучались.

Усреднение конвективного уравнения диффузии с заданным полем скоростей можно найти в работах: Г. Аллэира, В. Панкратова, М. Гончаренко, Ж.-Л. Лионса, Г. Папаниколау, А. Боургета, Е. Марусик-Палока, А. Пятницкого, Ю. Хорнунга, В. Джагера, В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник, А.М. Мейрманова и других авторов.

Глава 1 содержит предварительные теоретические сведения, а также результаты, полученные в ходе проведения исследования, такие как принцип компактности для периодических структур, способы продолжения функций из одной области в другую и некоторые граничные свойства функции, заданной на периодическом множестве.

В **Главе 2** рассматривается математическая модель конвекции-диффузии в абсолютно твердом скелете. В качестве основной модели на микроскопическом уровне мы рассмотрим модель $\mathbb{M}_1$, которая состоит из системы уравнений Стокса, описывающих движение сжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве и уравнения неразрывности. Рассматриваемая система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости и замыкается начальными и граничными условиями. При этом считается, что и динамическая вязкость, и плотность жидкости зависят от концентрации примеси.

$$\nabla\cdot\Big(\alpha_\mu(c^{\varepsilon})\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^{\varepsilon})+(\alpha_\nu\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{\varepsilon}-p^{\varepsilon})\mathbb{I}\Big)+ \rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon},\ t>0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}+c_f^2\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{\varepsilon}=0,,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon},\ t>0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t}+\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\,c^{\varepsilon}=\alpha_D\triangle\,c^{\varepsilon},\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon},\ t>0, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0,\ \ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon},\ \ t>0, \quad (4)$$

$$\nabla\,c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=0,\ \ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon},\ \ t>0, \quad (5)$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}, \quad (6)$$

$$p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0,\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{v}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) = (v_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t), v_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t), v_3^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t))$ - вектор скорости жидкости, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - давление жидкости, $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - концентрация примеси, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})$ - симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ - единичная матрица,

$$\rho(c^{\varepsilon}) = \chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})(\varrho_f + \delta c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)),$$

δ - положительная постоянная, $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор внешней нормали к Γ^{ε}, α_D - коэффициент диффузии, c_f - безразмерная скорость звука в жидкости, α_μ - безразмерная динамическая вязкость, пропорциональная ε^2:

$$\alpha_\mu = \varepsilon^2 \mu_1(c^{\varepsilon}),\ 0 < \mu_* \leqslant \mu_1(c^{\varepsilon}) \leqslant \mu_*^{-1},\ \mu_* = const.$$

Более того, для контроля за членом $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ в (1) мы предположим, что α_ν не зависит от ε:

$$\alpha_\nu = \nu_0 = const > 0.$$

Для упрощения доказательства, мы будем считать, что безразмерный коэффициент диффузии α_D так же не зависит от ε:

$$\alpha_D = D_0 = const > 0.$$

Всюду ниже в этой главе будем считать, что $c_0(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ измеримые функции,

$$0 \leqslant c_0(\boldsymbol{x}) \leqslant 1,\ \int_{\Omega_T} |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)|^2 dxdt \leqslant F^2 < \infty,$$

$$0 < \mu_* \leqslant \mu_1(c^{\varepsilon}) \leqslant \mu_*^{-1},\ \mu_1 \in C^2[0,\infty),$$

и ν_0, c_f^2, D_0, μ_*, δ положительные константы.

Основные результаты **Главы 2** сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 2.1 *Задача (1) - (7) имеет по крайней мере одно обобщенное решение* $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}, c^{\varepsilon}\}$.

Теорема 2.2 *Пусть тройка функций* $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}, c^{\varepsilon}\}$ *является обобщенным решением задачи (1) - (7). Тогда:*

I) *из последовательности параметров* $\{\varepsilon > 0\}$ *можно выделить подпоследовательность такую, что при* $\varepsilon \to 0$ *последовательности* $\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}\}$, $\{\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}^{\varepsilon}\}$, $\{\tilde{p}^{\varepsilon}\}$ *сходятся слабо в* $L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$ *к функциям* $\boldsymbol{v}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$, p *соответственно, а последовательность* $\{\tilde{c}^{\varepsilon}\}$ *сходится слабо в* $L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ *и сильно в* $L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$ *к функции* c;

II) *тройка предельных функций $\{\boldsymbol{v},\, p,\, c\}$ является обобщенным решением задачи диффузии - конвекции для сжимаемой жидкости в абсолютно твердом скелете, которая состоит из динамических уравнений*

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mu_1(c)}\mathbb{B}^{(f)}\big(-\frac{1}{m}\nabla q + (\varrho_f + \delta\, c)\boldsymbol{F}\big), \tag{8}$$

$$q = p + \frac{\nu_0}{c_f^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_f^2\,\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{10}$$

для скорости $\boldsymbol{v}$ и давления p сжимаемой жидкости, и конвективного уравнения диффузии

$$m\,\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla c = D_0\,\nabla\cdot\big(\mathbb{B}^{(c)}\nabla c\big) \tag{11}$$

для концентрации примеси c, в области Ω при $t > 0$, усредненных граничных

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{12}$$

$$\nabla\, c(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{13}$$

на границе S при $t > 0$, и начальных условий

$$p(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad c(\boldsymbol{x}, 0) = c_0(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{14}$$

В (8) - (14)

$$m = \langle\chi\rangle_Y = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})dy$$

пористость, постоянные матрицы $\mathbb{B}^{(f)}$ и $\mathbb{B}^{(c)}$ - симметричные и положительно определенные, $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор внешней нормали к границе S.

Теорема 2.3 *Пусть$\{\boldsymbol{v}^{(k)},\, p^{(k)},\, c^{(k)}\}$ обобщенное решение задачи (1) - (7) с $c_f^2 = k$. Тогда:*

I) *существует подпоследовательность $k_n \to \infty$ такая, что последовательности $\{\boldsymbol{v}^{(k_n)}\}$, $\{p^{(k_n)}\}$ сходятся слабо в $L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$ к функциям $\boldsymbol{v}^{(\infty)}$, $p^{(\infty)}$ соответственно, а последовательность $\{c^{(k_n)}\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ и сильно в $L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$ к функции $c^{(\infty)}$;*

II)*тройка предельных функций $\{\boldsymbol{v}^{(\infty)},\, p^{(\infty)},\, c^{(\infty)}\}$ является обобщенным решением задачи конвекции-диффузии несжимаемой жидкости в* *абсолютно твердом скелете, которая состоит из системы уравнений фильтрации Дарси с переменной вязкостью*

$$\boldsymbol{v}^{(\infty)} = \frac{1}{\mu_1(c^{(\infty)})}\mathbb{B}^{(f)}\big(-\frac{1}{m}\nabla p^{(\infty)} + (\varrho_f + \delta\, c^{(\infty)})\boldsymbol{F}\big), \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^{(\infty)} = 0 \tag{16}$$

для скорости $\boldsymbol{v}^{(\infty)}$ и давления $p^{(\infty)}$ несжимаемой жидкости в области Ω при $t > 0$, конвективного уравнения диффузии (11) с полем скоростей $\{\boldsymbol{v}^{(\infty)}\}$ для концентрации примеси $c^{(\infty)}$, граничных условий (12) и (13), и начального условия (14) для концентрации примеси.

Теорема 2.4 *Пусть тройка $\{\boldsymbol{v}^{(\lambda)},\, p^{(\lambda)},\, c^{(\lambda)}\}$ является обобщенным решением задачи (1) - (7) с $\nu_0 = \lambda$. Тогда:*

I) *существует подпоследовательность $\lambda_n \to 0$ такая, что последовательности $\{\boldsymbol{v}^{(\lambda_n)}\}$, $\{p^{(\lambda_n)}\}$ сходятся слабо в $L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$ к функциям $\boldsymbol{v}^{(0)}$, $p^{(0)}$ соответственно, а последовательность $\{c^{(\lambda_n)}\}$ сходится слабо в $L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega)\big)$ и сильно в $L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$ к функции $c^{(0)}$;*

II) *тройка предельных функций $\{\boldsymbol{v}^{(0)},\, p^{(0)},\, c^{(0)}\}$ является обобщенным решением задачи диффузии-конвекции для слабосжимаемой жидкости в абсолютно твердом скелете, которая состоит из системы уравнений фильтрации Дарси с переменной вязкостью*

$$\boldsymbol{v}^{(0)} = \frac{1}{\mu_1(c^{(0)})}\mathbb{B}^{(f)}\big(-\frac{1}{m}\nabla p^{(0)} + (\varrho_f + \delta\, c^{(0)})\boldsymbol{F}\big), \tag{17}$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + c_f^2\, \nabla \cdot \boldsymbol{v}^{(0)} = 0 \tag{18}$$

для скорости $\boldsymbol{v}^{(0)}$ и давления $p^{(0)}$ слабосжимаемой жидкости в области Ω при $t > 0$, конвективного уравнения диффузии (11) с полем скоростей $\{\boldsymbol{v}^{(0)}\}$ для концентрации $c^{(0)}$, граничных условий (12) и (13), и начального условия (14).

Глава 3 посвящена математическим моделям диффузии-конвекции в пороупругой среде. Мы рассмотрим две модели, описывающие процесс диффузии-конвекции в пороупругой среде, состоящие из системы уравнений Стокса, описывающей движение несжимаемой вязкой жидкости в поровом пространстве и системы уравнений Ламе, описывающей перемещение несжимаемого твердого скелета. Рассматриваемая система дополняется конвективным уравнением диффузии для примеси в жидкости и замыкается начальными и краевыми условиями. При этом считается, что плотность жидкости зависит от концентрации примеси.

Математическая модель $\mathbb{M}_2$, описывается в области Ω следующей системой уравнений:

$$\nabla\cdot\big(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t})+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-p^{\varepsilon}\mathbb{I}\big)+ \rho(c^{\varepsilon})\boldsymbol{F}=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t>0, \tag{19}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}^{\varepsilon}=0\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t>0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\nabla c^{\varepsilon}=D_0\triangle c^{\varepsilon},\ \boldsymbol{x}\in\Omega_f^{\varepsilon},\ t>0, \tag{21}$$

дополненной следующими условиями:

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=0\quad \text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in S=\partial\Omega, \tag{22}$$

$$\chi^{\varepsilon}\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=0\quad \text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{23}$$

$$\int_{\Omega}p^{\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}=0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}}=0\ \ \text{при}\ \ \boldsymbol{x}\in\Gamma^{\varepsilon}\cup S,\ \ t>0, \tag{25}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=c_0(\boldsymbol{x}),\ \text{при}\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{\varepsilon}_{f}, \tag{26}$$

где $\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=(w_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),w_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t),w_3^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t))$ - перемещение сплошной среды, $p^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - давление в сплошной среде, $c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ - концентрация примеси, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})$ - симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ - единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ - характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^{\varepsilon})=\chi^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})(\varrho_f+\delta c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)),$$

μ_0 - безразмерная вязкость жидкости, λ_0 - безразмерная постоянная Ламэ, δ - положительная постоянная, $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор внешней нормали к Γ^{ε}, D_0 - коэффициент диффузии.

Математическая модель $\mathbb{M}_3$, описывается в области Ω аналогичной системой уравнений:

$$\nabla\cdot\big(\chi^{\varepsilon}\mu_0\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t})+(1-\chi^{\varepsilon})\lambda_0\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon})-p^{\varepsilon}\mathbb{I}\big)+ \rho(\varphi(c^{\varepsilon}))\boldsymbol{F}=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t>0, \tag{27}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^{\varepsilon} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_0 \nabla c^{\varepsilon} - \varphi(c^{\varepsilon}) \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \right) \boldsymbol{x} \in \Omega^{\varepsilon}_f,\ t > 0, \tag{29}$$

которая замыкается следующими условиями

$$\boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{при} \ \ \boldsymbol{x} \in S = \partial\Omega,\ t > 0, \tag{30}$$

$$\int_{\Omega} p^{\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} = 0,\ t > 0, \tag{31}$$

$$D_0 \frac{\partial c^{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi(c^{\varepsilon}) \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ \text{ при } \ \boldsymbol{x} \in \Gamma^{\varepsilon},\ t > 0, \tag{32}$$

$$\chi^{\varepsilon} \boldsymbol{w}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad \text{при} \ \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{33}$$

$$c^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, 0) = c_0(\boldsymbol{x}), \text{ при } \boldsymbol{x} \in \Omega^{\varepsilon}_f. \tag{34}$$

Функция $\varphi(c^{\varepsilon}) \in C^2(-\infty, \infty)$, такая что

$$\varphi(c^{\varepsilon}) = \begin{cases} -1/2, & c^{\varepsilon} < -1/2 \\ c^{\varepsilon}, & 0 \le c^{\varepsilon} \le 1 \\ 3/2, & c^{\varepsilon} > 3/2. \end{cases}$$

Основные результаты **Главы 3** сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 3.1 *Пусть*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \big(|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})| + |\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})| \big) = F < \infty.$$

Тогда модель $\mathbb{M}_2$ имеет хотя бы одно обобщенное решение.

Теорема 3.2 *Пусть*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \max_{\Omega_T} |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)| = F < \infty.$$

Тогда модель $\mathbb{M}_3$ имеет хотя бы одно обобщенное решение.

Теорема 3.3 *Пусть выполнены условия Теоремы 3.1. Тогда:*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$, $\{\nabla \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$, $\{\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\}$, $\{\nabla \boldsymbol{v}^{\varepsilon}\}$, $\{p^{\varepsilon}\}$, $\{\widetilde{c}^{\varepsilon}\}$ и $\{\nabla \widetilde{c}^{\varepsilon}\}$ сходятся слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\nabla \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_f}(\partial \boldsymbol{w}/\partial t)$, $\nabla \boldsymbol{v} = \nabla(\mathbb{E}_{\Omega^{\varepsilon}_f}(\partial \boldsymbol{w}/\partial t))$, p, c и ∇c соответственно;

2) предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T, которая состоит из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{35}$$

усредненного уравнения баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m(\varrho_f + \delta c)\boldsymbol{F} = 0, \tag{36}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau,$$

и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbb{B}^{(c)}\boldsymbol{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D_0\mathbb{B}^{(c)}\nabla c), \tag{37}$$

дополненной граничными

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \tag{39}$$

на внешней границе $S = \partial\Omega$ *при* $t > 0$*, начальными условиями*

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \tag{40}$$

$$c(\boldsymbol{x}, 0) = m\,c_0(\boldsymbol{x}), \tag{41}$$

в области Ω *и условием нормировки*

$$\int_\Omega p\,(\boldsymbol{x}, t)dx = 0, \tag{42}$$

где в (38) - (42) $\boldsymbol{n}$ *- единичный вектор внешней нормали к границе* S*,*

$$m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})dy,$$

тензор $\mathfrak{N}_1$ *симметричный и положительно определенный, а постоянная матрица* $\mathbb{B}^{(c)}$ *- симметричная и положительно определенная.*

Теорема 3.4 *Пусть выполнены условия Теоремы 3.2. Тогда:*

1) последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$*,* $\{\nabla\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$*,* $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$*,* $\{\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$*,* $\{p^\varepsilon\}$*,* $\widetilde{c}^\varepsilon$ *и* $\nabla\widetilde{c}^\varepsilon$ *сходятся слабо в* $L_2(\Omega_T)$ *к функциям* $\boldsymbol{w}$*,* $\nabla\boldsymbol{w}$*,* $\boldsymbol{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\boldsymbol{w}/\partial t)$*,* $\nabla\boldsymbol{v} = \nabla(\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\boldsymbol{w}/\partial t))$*,* p*,* c *и* ∇c *соответственно;*

2) предельные функции являются решением усредненной системы уравнений в области Ω_T*, состоящей из уравнения неразрывности*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{43}$$

усредненного уравнения баланса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m(\varrho_f + \delta\varphi(c))\boldsymbol{F} = 0, \tag{44}$$

где тензор $\widehat{\mathbb{P}}$ определяется как и в предыдущей теореме и усредненного конвективного уравнения диффузии

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_0\mathbb{B}^{(c)}\nabla c) - \nabla \cdot \Big(\varphi(c)\mathbb{B}^{(c)}\boldsymbol{v}\Big) \tag{45}$$

Система уравнений (43) - (45) замыкается начальными и граничными условиями (38) - (41), и условием нормировки (42).

Если область Y_f симметрична относительно поворотов на угол $\pi/2$ вокруг главных осей декартовой системы координат, то тогда матрица $\mathbb{B}^{(c)}$ приводима к диагональному виду.

Более того, согласно **Теореме 3.4** система (43) - (45) примет вид

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + m(\varrho_f + \delta c)\boldsymbol{F} = 0, \tag{46}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{47}$$

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \lambda\nabla c \cdot \boldsymbol{v} = \lambda\nabla \cdot (D_0\nabla c) \tag{48}$$

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. М. Мейрманову за постановку задач, поддержку и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Meirmanov A.M., Zimin R. Some compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation// Electronic Journal of Differential Equations. – 2011. – № 115. Vol. 2011. – P. 1-11.

[2] Meirmanov A., Zimin R. Mathematical models of a diffusion-convection in porous media// Electronic Journal of Differential Equations. – 2012. – № 105 – Vol. 2012. – P. 1-16.

[3] Зимин Р.Н. О продолжении функций, заданных на периодических множествах// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2010. – № 17 (88). – Вып. 20. – С. 65-72.

[4] Мейрманов А.М., Зимин Р.Н. Об одном принципе компактности для периодических структур// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2011. – № 5 (100). Вып. 22. – С. 47-53.

[5] Мейрманов А.М., Зимин Р.Н., Гальцев О.В., Гальцева О.А. Корректная разрешимость задачи о нелинейной диффузии в несжимаемой пороупругой среде на микроскопическом уровне// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2012. – № 5 (124). Вып. 26. – С. 116-128.

[6] Мейрманов А.М., Зимин Р.Н., Гальцев О.В., Гальцева О.А. О разрешимости задачи диффузии-конвекции в пороупругой среде на микроскопическом уровне// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2012. – № 11 (130). Вып. 27. – С. 38-47.

[7] Мейрманов А.М., Зимин Р.Н., Гальцев О.В., Гальцева О.А. Математические модели диффузии в пороупругих средах// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2012. – № 17 (136). Вып. 28. – С. 77-90.

Подписано в печать 20.03.2013. Гарнитура Times New Roman.
Формат 60 × 84/16. Усл. п. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 100.
Оригинал-макет тиражирован в ИД «Белгород» НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85