№17 (214), вып. 40
Сентябрь 2015
Научный рецензируемый журнал
Основан В 1995 г.

Журнал входит
в Перечень ведущих рецензируемых
научных журналов и изданий,
выпускаемых в Российской Федерации,
в которых рекомендуется публикация
основных результатов диссертаций
на соискание ученых степеней
доктора и кандидата наук

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель:

НИУ «БелГУ»,
Издательский дом «Белгород»

Адрес редакции, издателя, типографии: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-50062 от 29 мая 2012 г.
Выходит 4 раза в год

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Математика Физика

BELGOROD STATE UNIVERSITY
SCIENTIFIC BULLETIN
Mathematics & Physics

Содержание

Оригинал-макет Ю.П. Вирченко
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 18.06.2015
Формат 60×84/8
Гарнитура Courier New
Усл.п.л. 22.64
Заказ 211
Цена свободная
Тираж 1000 экз.
Дата выхода 30.09.2015

Подписной индекс в Объединенном каталоге агенства «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет тиражирован в издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015, г.Белгород, ул.Победы, 85

№17 (214) Issue 40
September 2015
Scientific peer-reviewed journal
Founded in 1995

Journal included into the list of leading peer-reviewed journals and publications coming out in Russian Federation that are recommended for publishing key results of theses for Doktor and Kandidat degree-applicants.

Founder:
Federal state autonomous educational establishment of higher professional education «Belgorod State National Research University»

Publisher:
Belgorod State National Research University, Publishing House «Belgorod».

Address of editorial office: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate ПИ №ФС77-21121 May 29, 2012.

Publication frequency: 4/year

Belgorod State University Scientific Bulletin
Mathematics & Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета
Mathematics & Physics

Contents

Page layout: *Virchenko Yu.P.*
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing: 30.09.2015
Format: 60×84/8
Typeface: Courier New
Printer's sheets: 22.64
Order 211
Price: free
Calculation: 1000 copies
Date of publishing: 19.06.2015

Subscription reference in Russian Press common catalogue - 81631

Dummy layout is replicated at Belgorod National Research University, Publishing House "Belgorod"

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

МАТЕМАТИКА

MSC 35J15

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ГИПЕРПЛОСКОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ

В.П. Архипов

Старооскольский технологический институт НИТУ МИСиС, г. Старый Оскол, Россия

Ключевые слова: эллиптические уравнения, гиперплоскость вырождения, асимптотика, граничные задачи.

В полосе $\Omega = [0,1] \times R^n \subset R^{n+1},\ x \in [0,1],\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ рассматривается модельное вырождающееся эллиптическое уравнение

$$(a(x)u'_x(x,y))' + bu'_x(x,y) + Lu(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $a(x_0) = 0,\ a(x) > 0$ для $x \neq x_0,\ Lu(x,y) = r\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y_i^2},\ r > 0$ и гиперплоскость $x = x_0$ — гиперплоскость вырождения уравнения (1). В зависимости от знака коэффициента b (см. [1]) постановка граничных задач изменяется, что обусловлено поведением решений уравнения вблизи гиперплоскости вырождения $x = x_0$.

Настоящая работа посвящена выяснению точной асимптотики решений уравнения (1) вблизи гиперплоскости $x = x_0$. Для этого проводится анализ (в образах Фурье) решений обыкновенных вырождающихся дифференциальных уравнений с параметром

$$(a(x)v'_x(x,\xi))' + bv'_x(x,\xi) - r\xi^2 v(x,\xi) = g(x,\xi), \tag{2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n,\ \xi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, и устанавливаются их равномерные двусторонние асимптотики при $x \to x_0 \pm 0$ и $\xi \in R^n$. Исследования в значительной степени основываются на результатах работы [2].

Определим решения $v_{1,2}(x,\xi)$ однородного уравнения (2), допускающие при некотором $\delta > 0$ и $x \to x_0 + 0$ при $b < 0$ асимптотические представления

$$v_1(x,\xi) = w_1(x,\xi)\Phi(x,\xi) = w_1(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x,\xi),$$

$$w_1(x,\xi) = \frac{1}{C_1(\xi)\sqrt{\alpha(x,\xi)}} \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0+\delta} \frac{b + \alpha(\tau,\xi)}{2 \cdot a(\tau)}\, d\tau\right), \quad \alpha(\tau,\xi) = b^2 + 4a(\tau)r\xi^2, \tag{3}$$

$$v_2(x,\xi) = w_2(x,\xi)\Psi(x,\xi) = w_2(x,\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(x,\xi),$$

$$w_2(x,\xi) = \frac{1}{C_2(\xi)\sqrt{\alpha(x,\xi)}}\exp\left(\int\limits_x^{x_0+\delta}\frac{b-\alpha(\tau,\xi)}{2\cdot a(\tau)}\,d\tau\right), \tag{4}$$

где последовательности $\varphi_k(x,\xi)$, $\psi_k(x,\xi)$ задаются рекуррентными соотношениями $\varphi_{k+1}(x,\xi) = K_1\varphi_k(x,\xi)$, $\psi_{k+1}(x,\xi) = K_1\psi_k(x,\xi)$ с интегральными операторами

$$K_1\varphi(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} K_1(x,x_1,\xi)\varphi(x_1,\xi)\,dx_1, \quad K_2\psi(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x} K_2^+(x,x_1,\xi)\psi(x_1,\xi)\,dx_1,$$

$$K_1^+(x,x_1,\xi) = \begin{cases} h(x_1,\xi), & x_0 \le x_1 \le x \le x_0+\delta, \\ h(x_1,\xi)\exp\left(-\int\limits_x^{x_1}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}\,d\tau\right), & x \le x_1 \le x_0+\delta, \end{cases}$$

$$K_2^+(x,x_1,\xi) = -h(x_1,\xi) + h(x_1,\xi)\exp\left(-\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\alpha(\tau,\xi)}{a(\tau)}\,d\tau\right), \quad x_0 \le x_1 \le x \le x_0+\delta,$$

$$h(x,\xi) = \frac{(a_1(x)\xi^2 + a_2(x))r\xi^2}{2(b^2+4a(x)r\xi^2)^{5/2}}, a_1(x) = (5(a^2(x))'a'(x) - 4a(x)(a^2(x))'')r.a_2(x) = -b^2(a^2(x))'',$$

Аналогичные формулы выписываются и слева от гиперплоскости.

Отметим один результат для неоднородного уравнения. При $b<0$ и некотором $\delta>0$ установлено существование единственного решения $v_0(x,\xi)$ уравнения (2), удовлетворяющего условиям $v_0(x_0-\delta,\xi) = v_0(x_0+\delta,\xi) = 0$ и допускающего в частности равномерную по $x\in[0,1]$ оценку $|v_0(x,\xi)|^2 \le \dfrac{M_g}{1+|\xi|^2}$.

Формальное применение обратного преобразования Фурье к формулам (3), (4) дает асимптотическое представление решений однородного уравнения (1)

$$u_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1,k}(x,y), \quad u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2,k}(x,y), \tag{5}$$

$$u_{1,k}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_1(x,\xi)\varphi_k(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi, \quad u_{2,k}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_2(x,\xi)\psi_k(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi.$$

Главные (первые) члены асимптотик в (5) при этом имеют вид

$$u_{1,0}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_1(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi, \quad u_{2,0}(x,y) = \int\limits_{R^n} w_2(x,\xi)\exp(iy\xi)\,d\xi.$$

Построенные представления решений позволяют получать асимптотические формулы решений неоднородного уравнения и соответствующих ему граничных задач.

Литература

1. Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Труды Московского математического общества. – 1970. – 23. – С.113-178.

2. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, № 10. – С.1383-1393.

EXACT ASYMPTOTIC OF ELLIPTIC EQUATIONS NEAR DEGENERATION HYPERPLANE

V.P. Arkhipov

Starooskolsky Technology Institute NITU MISiS, Stary Oskol, Russia

Key words: elliptic equations, degeneration hyperplane, asymptotic, boundary problems.

MSC 45P05

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПЕРАТОРНЫХ ТОЖДЕСТВ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е.А. Аршава

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
ул. Сумская, 40, Харьков, 61002, Украина, e-mail: elarshava@mail.ru

Ключевые слова: интегральные операторы, вектор-функции, матричные операторы, ограниченные операторы.

Изучается задача обращения векторных интегральных операторов в пространстве $L^2_m(0,\omega)$ вектор-функций методом операторных тождеств, что является продолжением исследований, представленных в работах [1-3].

Введем пространство $L^2_m(0,\omega)$, которое состоит из вектор-функций

$$\vec{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)], \qquad \| \vec{f} \|_m = \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^{\omega} |f_k(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, m = 2.$$

Пусть задан оператор S, который ограничен в $L^2_m(0,\omega)$,

$$S\vec{f} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\omega} S(x,t)\vec{f}(t)dt, \qquad \alpha = \overline{\alpha} \neq 0 \tag{1}$$

и матричный оператор A_0 вида:

$$A_0\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(1 - e^{\alpha(\xi - t)}\right) f_1(\xi)d\xi \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(1 - e^{\alpha(\xi - t)}\right) f_2(\xi)d\xi \end{pmatrix},$$

$S(x,t)$-матрица, элементы которой принадлежат $L^2_{m\times m}(0,\omega)$ и удовлетворяют уравнению

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] S_{ij}(x,t) = 0.$$

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора вида* (1), *который действует в* $L^2_m(0,\omega)$, *верно представление*

$$(A_0S - SA_0^*)\vec{f} = \int_0^{\omega} \left(M_1(x) + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} M_2(x) + N_1(t) + \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha} N_2(t) \right) \vec{f}(t)dt,$$

где

$$M_1(x) = \begin{pmatrix} s_{11}(x,0) & s_{12}(x,0) \\ s_{21}(x,0) & s_{22}(x,0) \end{pmatrix}, \qquad M_2(x) = \begin{pmatrix} s'_{11}(x,0) & s'_{12}(x,0) \\ s'_{21}(x,0) & s'_{22}(x,0) \end{pmatrix},$$
$$N_1(t) = -\begin{pmatrix} s_{11}(0,t) & s_{12}(0,t) \\ s_{21}(0,t) & s_{22}(0,t) \end{pmatrix}, \qquad N_2(t) = -\begin{pmatrix} s'_{11}(0,t) & s'_{12}(0,t) \\ s'_{21}(0,t) & s'_{22}(0,t) \end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Если оператор S имеет ограниченный обратный T, то*

$$(TA_0 - A_0^*T)\vec{f} = \int_0^\omega R(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } \quad R(x,t) = \sum_{i=1}^4 P_i(t)Q_i(x), \tag{2}$$

P_i, Q_i - матрицы $(2\times 2)(i=\overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{array}{llll} S^*P_1 = E_m, & S^*P_2 = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}E_m, & S^*P_3 = N_1^*, & S^*P_4 = N_2^*, \\ SQ_1 = M_1, & SQ_2 = M_2, & SQ_3 = E_m, & SQ_4 = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}E_m. \end{array} \tag{3}$$

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекает

Теорема 2. *Если оператор S ограничен вместе со своим обратным T и существуют матрицы $P_i, Q_i(i=\overline{1,4})$, которые удовлетворяют соотношениям (3), то для оператора $T = S^{-1}$ верно представление*

$$T\vec{f} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx}\right)\int_0^\omega \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi(x,t)\vec{f}(t)dt, \text{ где } \vec{f} \in L_m^2(0,\omega),$$

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)}\int\limits_{x+t}^{2\omega+x-t}\int\limits_{x-t}^{\tau-2\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau}R\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right)d\xi d\tau + B(x+t), & x-t \le 0 \\ -\frac{1}{4}e^{\frac{\alpha}{2}(x+t)}\int\limits_{x+t}^{2\omega-x+t}\int\limits_{x-t}^{2\omega-\tau} e^{-\frac{\alpha}{2}\tau}R\left(\frac{\tau+\xi}{2},\frac{\tau-\xi}{2}\right)d\xi d\tau + B(x+t), & x-t > 0, \end{cases}$$

а матрица - функция $R(x,t)$ определяется формулой (2).

Литература

1. Сахнович Л.А. Уравнение с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи математических наук. – 1980. – 35, Вып. 4 (214). – С.69-129.

2. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений // Дифференциальные уравнения. – 1996. – 32, №10. – С.1427-1428.

3. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах, Т. 1. Математический анализ / Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С.25-29.

APPLICATION OF OPERATOR EQUALITIES METHOD FOR REVERSION OF VECTOR INTEGRAL OPERATORS

E.A. Arshava

Kharkov National University of Building and Architecture,
Sumskaya Str., 40, Kharkov, 61002, Ukraine, e-mail: elarshava@mail.ru

Key words: integral operators, vector functions, matrix operators, bounded operators.

MSC 35Q05

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.Н. Бабаев, А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, в которой следует определить начальные условия весовой задачи Коши, обеспечивающие заданные значения решения и её производной в произвольной точке $T > 0$.

Ключевые слова: абстрактное уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, задача управления.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $0 \le k < 1$ рассмотрим весовую задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0\,, \quad \lim_{t\to 0} t^k u'(t) = u_1\,. \tag{2}$$

В работах [1], [2] для уравнения (1) при значениях параметра $k > 0$ исследована разрешимость задачи Коши с условиями

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = 0 \tag{3}$$

и доказан критерий равномерной корректности этой задачи, который формулируется в терминах оценки нормы дробной степени резольвенты $R(\lambda)$ оператора A и ее производных. Множество операторов A, для которых равномерно корректна задача Коши (1), (3) обозначим через G_k, а соответствующий разрешающий оператор, который называется операторной функцией Бесселя, будем обозначать $Y_k(t)$.

Случай $k = 0$ подробно рассмотрен в классических работах [3], [4]. В них установлено, что задача (1), (3) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором косинус-оператор-функции $C(t)$.

Пусть задан оператор $A \in G_k$ и $u_0, u_1 \in D(A)$. Согласно работе [5], единственным решением задачи (1), (2) будет функция

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_{2-k}(t)u_1\,. \tag{4}$$

Отметим также, что при $k \ge 1$ задача (1), (2) корректной не является.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378 А-2013.

В настоящей работе рассмотрим задачу нахождения начальных условий u_0 и u_1 по заданным финальным значениям

$$u(T) = u_2\,, \quad u'(T) = u_3\,. \tag{5}$$

Полученная задача (1), (5) и будет простейшей задачей управления для абстрактного уравнения ЭПД (1).

Подставляя определяемое равенством (4) решение в финальные условия (5), получим систему операторных уравнений

$$F_1(T)u_0 + F_2(T)u_1 = u_2\,, \tag{6}$$

$$F_1'(T)u_0 + F_2'(T)u_1 = u_3\,, \tag{7}$$

где $F_1(t) = Y_k(t)$, $F_2(t) = (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_{2-k}(t)$.

Все операторы, входящие в систему (6), (7), являются ограниченными и коммутирующими друг с другом операторами. Поэтому систему (6), (7) можно решать так же, как и в скалярном случае. Важную роль при этом играет операторный определитель этой системы

$$W(t) = \begin{vmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ F_1'(t) & F_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $0 \le k < 1$ и $A \in G_k$. Тогда операторный определитель $W(t)$ удовлетворяет операторному уравнению*

$$W'(t) + \frac{k}{t}W(t) = 0 \tag{8}$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to 0} t^k W(t) = I \tag{9}$$

и, следовательно, $W(t) = t^{-k}I$.

□ Пусть $u_0 \in D(A)$. Тогда

$$W(t)u_0 = F_1(t)F_2'(t)u_0 - F_1'(t)F_2(t)u_0\,.$$

Вычисляя производную, получим

$$W'(t)u_0 = F_1'(t)F_2'(t)u_0 + F_1(t)F_2''(t)u_0 - F_1''(t)F_2(t)u_0 - F_1'(t)F_2'(t)u_0 =$$

$$= F_1(t)F_2''(t)u_0 - F_1''(t)F_2(t)u_0\,,$$

и, поскольку $F_1(t)u_0$ и $F_2(t)u_0$ удовлетворяют уравнению (1), после подстановки в левую часть (8), будем иметь

$$W'(t)u_0 + \frac{k}{t}W(t)u_0 = F_1(t)F_2''(t)u_0 - F_1''(t)F_2(t)u_0 + \frac{k}{t}F_1(t)F_2'(t)u_0 - \frac{k}{t}F_1'(t)F_2(t)u_0 =$$

$$= F_1(t)\left(F_2''(t) + \frac{k}{t}F_2'(t)\right)u_0 - \left(F_1''(t) + \frac{k}{t}F_1'(t)\right)F_2(t)u_0 =$$

$$= F_1(t)F_2(t)Au_0 - F_1(t)F_2(t)Au_0 = 0\,.$$

Поэтому в силу плотности $D(A)$ в E имеет место равенство (8).

Справедливость же начального условия (9) очевидно следует из представления

$$W(t)u_0 = F_1(t)F_2'(t)u_0 - F_1'(t)F_2(t)u_0 =$$

$$= t^{-k}Y_k(t)Y_{2-k}(t)u_0 + (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_k(t)Y_{2-k}'(t)u_0 - (1-k)^{-1}t^{1-k}Y_k'(t)Y_{2-k}(t)u_0$$

и равенства (см. [2])

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}Au_0\,. \qquad \blacksquare \tag{10}$$

Из теоремы 1 следует, что оператор $W(T)$ обратим и $W^{-1}(T) = T^k$. Кроме того, при решении системы (6), (7) методом исключения неизвестных, используется равенство (10) и формула сдвига по параметру для ОФБ (см. [1])

$$Y_m(t)u_0 = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2}s^kY_k(ts)u_0\,ds\,,$$

где $m > k$, $B(a,b)$ — бета-функция Эйлера.

Теорема 2. *Пусть $0 \le k < 1$, $A \in G_k$, $u_2 \in D(A)$, $u_3 \in E$. Тогда задача (1), (5) имеет единственное решение, определяемое равенством (4), где*

$$u_0 = \left(Y_{2-k}(T) + \frac{T^2}{k^2-4k+3}AY_{4-k}(T)\right)u_2 - \frac{T}{1-k}Y_{2-k}(T)u_3\,, \tag{11}$$

$$u_1 = T^kY_k(T)u_3 - \frac{T^{1+k}}{1+k}AY_{2+k}(T)u_2\,. \tag{12}$$

$\square$ Действительно, также как и в скалярном случае, рассмотрим два вспомогательных символических операторных определителя

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} u_2 & (1-k)^{-1}T^{1-k}Y_{2-k}(T) \\ u_3 & T^{-k}Y_{2-k}(T) + (1-k)^{-1}(3-k)^{-1}T^{2-k}AY_{4-k}(T) \end{vmatrix} =$$

$$= T^{-k}Y_{2-k}(T)u_2 + (1-k)^{-1}(3-k)^{-1}T^{2-k}AY_{4-k}(T)u_2 - (1-k)^{-1}T^{1-k}Y_{2-k}(T)u_3 =$$

$$= T^{-k}\left(\left(Y_{2-k}(T) + \frac{T^2}{k^2-4k+3}AY_{4-k}(T)\right)u_2 - \frac{T}{1-k}Y_{2-k}(T)u_3\right)$$

и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Y_k(T) & u_2 \\ (1+k)^{-1}TAY_{2+k}(T) & u_3 \end{vmatrix} = Y_k(T)u_3 - \frac{T}{1+k}AY_{2+k}(T)u_2 =$$

$$= T^{-k}\left(T^kY_k(T)u_3 - \frac{T^{1+k}}{1+k}AY_{2+k}(T)u_2\right)\,.$$

Умножая Δ_0 и Δ_1 на $W^{-1}(T) = T^k$, получим (11) и (12). $\blacksquare$

В частном случае, когда $k = 0$ и $A \in G_0$ решение задачи управления имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1\,,$$

где $C(t)$ — косинус-оператор-функция,

$$S(t) = \int\limits_0^t C(s)\,ds, \quad u_0 = C(T)u_2 - S(T)u_3\,, \qquad u_1 = C(T)u_3 - S(T)Au_2\,.$$

Литература

1. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – № 11(130); Вып. 27. – С.29-37.
2. Глушак А.В., Покручин О.А. Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. – №19(190); Вып. 36. – С.17-26.
3. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. – 1969. – 6. – P.50-70.
4. Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. mat. – 1966. – № 49. – P.1-47.
5. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов. Математика. – 1986. – №6. – С.55–56.

ABOUT AN CONTROL PROBLEM OF ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.N. Babaev, A.V. Glushak

Belgorod State University,
Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: Babaev@bsu.edu.ru, Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. The control problem of abstract Euler-Poisson-Darboux equation is under consideration. It consists of the foundation initial conditions of weight Cauchy problem which guarantee some given values of solution and its derivative in arbitrary point $T > 0$.

Key words: abstract Euler-Poisson-Darboux equation, control problem.

MSC 35J30

О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ ДВУКРАТНЫХ КОРНЕЙ

А.О. Бабаян

Государственный инженерный университет Армении,
ул. Терьян, 105, Ереван, 0009, Армения, e-mail: barmenak@gmail. com

Ключевые слова: задача Дирихле, индекс дефекта оператора, характеристическое уравнение, эллиптические уравнения.

Пусть $D = \{(x, y) : x^2+y^2 < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{13}$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что λ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ – корни характеристического уравнения $\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k} = 0$, удовлетворяют условиям $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = \lambda_4$, $\lambda_j \neq \pm i$, $\Im\lambda_j \neq 0$. Решение уравнения (13) ищется в классе $C^4(D) \bigcap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u\big|_\Gamma = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_\Gamma = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{14}$$

Здесь f и g – заданные на Γ функции, $\frac{\partial}{\partial N}$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ. Отметим, что если $\Im\lambda_j > 0$ $(\Im\lambda_j < 0)$ при $j = 1, \ldots, 4$, то есть, если уравнение (13) неправильно эллиптическое, то задача (13), (14) в классической постановке (когда $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$) не является корректной ([1]). Для неправильно эллиптического уравнения (13) второго порядка в [2] был указан класс граничных функций, обеспечивающий корректность задачи Дирихле (исключая случай бесконечномерного ядра). Случай правильно эллиптического уравнения (13) был рассмотрен в [3], [4]. Неправильно эллиптическое уравнение (13) четвертого порядка при некотором расположении корней характеристического уравнения было рассмотрено в [5]. В предлагаемом сообщении рассматривается случай двукратных корней (который не был рассмотрен в [5]), причем следует отметить связь полученных результатов для случая правильно и неправильно эллиптического уравнения. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $\Im\lambda_1 > 0 > \Im\lambda_3$ (правильно эллиптическое уравнение (13)). Обозначим $\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu = \frac{i+\lambda_3}{i-\lambda_3}$, $z = \mu\nu$ (заметим, что при этих условиях $|z| < 1$),

$$P_{2k-4}(z) = \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^j + C_{k+1}^3 z^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-3} C_{j+3}^3 z^{2k-j-4}, \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{15}$$

Теорема 1. *Однородная задача (13), (14) имеет конечное число K линейно независимых решений. Это число равно количеству номеров $k_j > 2$, для которых $P_{2k_j-4}(z) = 0$. Пусть $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$, тогда неоднородная задача (13), (14)имеет решение тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют K линейно независимым условиям.*

Пусть $\Im\lambda_1 \geq \Im\lambda_3 > 0$ (неправильно эллиптическое уравнение (13)). Обозначим $\mu = \dfrac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\nu = \dfrac{i-\lambda_3}{i+\lambda_3}$, предположим, что $|\mu| \leq |\nu|$. Пусть $\zeta = \mu\nu^{-1}$ и $B^{(m,\alpha)}(r)$ – множество функций, аналитических в области $r < |z| < 1$, которые вместе с производными до порядка m включительно удовлетворяют условию Гельдера в замкнутом кольце $r \leq |z| \leq 1$.

Теорема 2. *Однородная задача (13), (14) имеет конечное число K линейно независимых решений. Это число равно количеству номеров $k_j > 2$, для которых $P_{2k_j-4}(\zeta) = 0$ (P_{2k-4} определяется в (15)). Пусть $f \in B^{(2,\alpha)}(|\nu|)$ и $g \in B^{(1,\alpha)}(|\nu|)$, тогда неоднородная задача (13), (14)имеет решение тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют K линейно независимым условиям.*

Замечание. При $k = 3$ многочлен (15) P_2 имеет вид $P_2(z) = z^2 + 4z + 1$ и, следовательно, имеет корень $z = \sqrt{3} - 2$, который по модулю меньше единицы. Поэтому при $\mu = (\sqrt{3}-2)\nu^{-1}$ (правильно эллиптическое уравнение) или $\mu = (\sqrt{3}-2)\nu$ (неправильно эллиптическое уравнение) однородная задача (13), (14) имеет нетривиальное решение (в данном случае это функция $(1 - z\bar{z})^2$). Таким образом, дефектное число K может быть отлично от нуля. Численные эксперименты показывают, что при различных k многочлены (15) имеют различные нули в единичном круге, поэтому можно предположить, что число K может принимать только два значения: ноль или единица, однако это утверждение нуждается в доказательстве.

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / Москва: Наука, 1966.

2. Товмасян Н.Е. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм.ССР, сер. математика. – 1968. – 3, №6. – С.497-521.

3. Товмасян Н.Е., Закарян В.С. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях // Известия НАН Армении, сер. математика. – 2002. – 37, №6. – С.5-41.

4. Бабаян А.О. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении, сер. математика. – 2003. – 38, №6. – С.39-48.

5. Бабаян А.О. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. – С.56-69.

ABOUT DEFECT NUMBERS OF DIRICHLET'S PROBLEM IN CASE OF TWO-MULTIPLE ROOTS

A.O. Babayan

State Engeneering University of Armenia,
Neryan Str., 105, Erevan, 0009, Armenia, e-mail: barmenak@gmail. com

Key words: Dirichlet's problem, operator defect number, characteristic equation, elliptic equations.

MSC 53D15, 53B05

О ГЕОМЕТРИИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С φ-СВЯЗНОСТЬЮ

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия, e-mail: bukusheva@list.ru

Аннотация. На многообразии с контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ определяется и исследуется φ-связность. Находятся условия, при которых φ-связность является адаптированной к контактной метрической структуре.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, внутренняя связность, тензор кривизны Схоутена, φ-связность.

1. Введение. Понятия N-продолженной связности и N-связности на многообразии с почти контактной метрической структурой введены в работах [1,2]. Связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена [3,4] являются частными случаями N-связности. В основе определения N-связности лежат внутренняя связность [5,6] и эндоморфизм $N : D \to D$ распределения почти контактной метрической структуры. Выбирая эндоморфизм N, мы получаем связность с нужными свойствами. В настоящей работе мы останавливаемся на изучении случая $N = \varphi$.

Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$, ΓTX – $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Рассмотрим на X почти контактную метрическую структуру $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ [5], где φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma TX$, называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{span}(\vec{\xi})$ его оснащение: $TX = D \oplus D^\perp$. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = \mathrm{span}(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Будем называть D распределением почти контактной метрической структуры.

На протяжении всей работы мы будем использовать адаптированные координаты. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ многообразия X будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [5]. Пусть $P : TX \to D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = \mathrm{span}(\vec{e}_a)$. На многообразии X, таким

образом, определены неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$-адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, называется допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q} .$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'} ,$$

где $A^a_{a'} = \partial x^a / \partial x^{a'}$.

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами $h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x})$, $C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}} g)(\vec{x}, \vec{y})$, $g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y})$, $g(\vec{x}, \psi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$, $L\vec{x} = C\vec{x} - \psi\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma TX$. В случае контактного метрического пространства эндоморфизм ψ совпадает с эндоморфизмом φ. В адаптированных координатах получаем: $h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da} C_{db}$, $\psi^b_a = g^{da}\omega_{da}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$.

Теорема 1 [7]. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:* $\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a$, $\tilde{\Gamma}^n_{na} = 0$, $\tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0$, *где* $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой [5] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \quad \nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}} ;$$

$$2) \quad \nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = f \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + (\vec{x} f)\vec{y} ,$$

где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, X). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ - естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} – координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ – внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ - поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью называется [1,2] связность в векторном расслоении (D, π, X), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ – вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Кручением N-продолженной связности называется кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$ где ∇ – внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ – внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство $\nabla^N_{\vec{\xi}} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0$.

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$, где $Q = 1 - P$, названо Вагнером [8] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|} \Gamma^e_{b]c}$. Тензор кривизны Схоутена возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных: $2\nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c = R^c_{abe} v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c$.

В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n - 2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [8]. Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - \Gamma^a_n \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$, определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n)$ - соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}) \partial_{n+c}\,, \tag{1}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d) \partial_{n+c}\,, \tag{2}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}\,,$$

$$[\vec{u}, \partial_{n+a}] = N_a^c \partial_{n+c}\,.$$

Из (1), (2) получаем выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}\,, \tag{3}$$

$$K(\vec{\xi},\vec{x})\vec{y} = P(\vec{x},\vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y}\,,$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma D$.

Говорят, что классическая связность ∇ с компонентами $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ соответствует N-продолженной связности ∇^N, если в адаптированных координатах все компоненты $G^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равны нулю, за исключением $G^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}$, $G^a_{nc} = N^a_c$.

Бежанку [9] определяет связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы $\nabla^B_{\vec{x}} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}$. В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна (почти) K-контактности почти контактной метрической структуры. Определим на многообразии с контактной метрической структурой классическую связность ∇^{φ} с помощью равенства $\nabla^{\varphi}_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})\varphi\vec{y}$. Назовем введенную связность φ-связностью. Отличными от нуля компонентами φ-связности будут $\Gamma^{Na}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma^{Na}_{nc} = \varphi^a_c$. Таким образом, φ-связность соответствует φ-продолженной связности с внутренней метрической связностью без кручения. Тензоры кручения и кривизны φ-связности определяются равенствами $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})\varphi\vec{y} - \eta(\vec{y})\varphi\vec{x}$, $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\varphi\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y},\vec{z}) - (\nabla_{P\vec{y}}\varphi)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x},\vec{z}) - (\nabla_{P\vec{x}}\varphi)\vec{z})$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma TX$ (см. (2) (3)).

Найдем условия, при которых φ-связность является адаптированной к контактной метрической структуре. Проведем для этого необходимые вычисления. Равенство $\nabla^{\varphi}g = 0$ сведется к следующем двум равенствам, записанным в адаптированных координатах: $\nabla^{\varphi}_a g_{bc} = 0$, $\nabla^{\varphi}_n g_{bc} = 0$. Первое из этих равенств выполняется в силу метричности исходной внутренней связности. Второе равенство перепишем в виде: $\nabla^{\varphi}_n g_{bc} = \partial_n g_{bc} - \varphi^a_b g_{ac} - \varphi^a_c g_{ba} = 0$. Из определения контактного метрического пространства непосредственно следует, что последнее равенство эквивалентно равенству $\nabla^{\varphi}_n g_{bc} = \partial_n g_{bc} = 0$. Аналогично, равенство $\nabla^{\varphi}_v \varphi = 0$ эквивалентно равенство $\partial_n \varphi^b_a = 0$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *φ-связность, заданная на контактном метрическом многообразии, адаптирована к контактной метрической структуре тогда и только тогда, когда пространство является K-контактным.*

Литература

1. Галаев С.В. О почти контактных метрических пространствах с метрической N-связностью // Современные научные исследования и инновации. – 2015. – 4 [Элек-

тронный ресурс]. URL: http: //web.snauka.ru/issues/2015/04/52011 (дата обращения: 25.06.2015).

2. Галаев С.В. О метрической N-продолженной связности на почти контактном метрическом пространстве // Современные научные исследования и инновации. – 2015. – 5 [Электронный ресурс]. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/05/53580 (дата обращения: 25.06.2015).

3. Tanno S. Variational problems on contact Riemannian manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. –314 – P.349-379.

4. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. –1930. – 103. – P.752-783.

5. Галаев С.В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – 12:1. – С. 16-22.

6. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2013. – 4. – С.1-9.

7. Галаев С.В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2014. – 8. – С.42-52.

8. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1941. – 5. – С. 173-255.

9. Bejancu A. Kähler contact distributions // Journal of Geometry and Physics. – 2010. – 60. – P.1958-1967.

THE GEOMETRY OF THE CONTACT METRIC SPACES φ-CONNECTION

A.V. Bukusheva

Saratov State University,
Astrakhanskaya St., Saratov, Russia, e-mail: bukusheva@list.ru

Abstract. The φ-connectedness is defined on the manifold possessed the contact metric structure $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ which is studied. The sufficient conditions when such a connectedness is adapted with contact metric structure.

Key words: almost contact metric structure, interior connection, Schouten curvature tensor, φ-connection.

MSC 41A05

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ОБОБЩЁННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОШИ

Т.А. Виноградова

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: grapes1@yandex.ru

Ключевые слова: распределение Коши, интерполяционные разложения, ряды Фурье, распределение Лоренца.

В различных разделах математики имеется широкий круг задач, приводящих к неортогональным системам. Неортогональные системы весьма характерны для задач анализа различных сигналов и спектров. В общем виде эти задачи можно сформулировать как выделение отдельных компонент в исследуемой зависимости. В настоящее время широкую применимость получили методы теории всплесков, которые изначально строятся ортогональными. Однако, зачастую и конкретный тип всплеска, и его параметры выбираются чисто эвристически, на основе большого числа вычислительных экспериментов. Кроме того, прямой физический смысл имеют, как правило, не коэффициенты разложения при отдельных всплесках, а лишь некоторые их комбинации. Также, вопреки распространенному мнению, оказывается, что при правильной организации вычислений, многие стандартные методы ничуть не уступают всплесковым.

В последнее время среди получивших широкое распространение методов разложения функций часто используются аппроксимации мультипликативными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; w(a_k z)\,,$$

где f_k – коэффициенты разложения, а a_k – набор параметров мультипликативных сдвигов, а также аппроксимации аддитивными сдвигами некоторой целой функции $w(z)$ вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \; w(z-k).$$

Наиболее распространённые и известные разложения по мультипликативным сдвигам – это ряды Фурье, ряды Бесселя-Каптейна. Ещё более распространены разложения по аддитивным сдвигам с использованием всплесков, сплайнов, функций Рвачёвых, квадратичных экспонент (функций Гаусса).

В настоящей работе при анализе спектров предлагается использовать разложение исследуемого сигнала по компонентам заданного вида, полученным из каких-либо теоретических соображений. И если для работы с гауссовыми функциями существуют разработанные методы [1-4], то в случае функции Лоренца или распределений Коши такие методы только находятся в стадии разработки.

В работе изучаются интерполяционные разложения произвольной функции по целочисленным сдвигам обобщённого распределения Коши (Лоренца) вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{a}{b+(x-k)^c} \ ,$$

где a, b, c – некоторые положительные постоянные.

Для решения интерполяционной задачи в явном виде нужно найти коэффициенты разложения f_k, а эти коэффициенты выражаются через значения узловой функции $G_{a,b,c}(x)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$G_{a,b,c}(0) = 1, \quad G_{a,b,c}(m) = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \neq 0.$$

Для указанного метода интерполяции при значениях параметра $c \geq 2$ выведена явная формула для узловой функции, проведено подробное численное исследование задачи.

Отметим, что случай $c = 2$ был исследован Л.А. Мининым и Е.А. Киселёвым. Ими было получено разложение

$$G_{s,s^2,2}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(ikx) \, ,$$

и найдена явная интегральная формула для коэффициентов

$$g_k = \frac{(-1)^k \operatorname{sh}(\pi s)}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)\, dx}{\operatorname{ch}(sx)}.$$

В нашей работе получено в том числе обобщение этой формулы для случая $c > 2$.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / University of Linköping, Sweden, 2007.

2. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences. Springer. – 2011. – 173, №2. – P.231-241.

3. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. – 2010. – Т.67. – С.107-116.

4. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2009. – №13 (68), Вып.17/2. – С.89-99.

INTERPOLATION DECOMPOSITION OF FUNCTIONS ON INTEGER-VALUED SHIFTS OF GENERALIZED CAUCHY'S DISTRIBUTIONS

T.A. Vinogradova

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: grapes1@yandex.ru

Key words: Cauchy's distribution, interpolation decomposition, Fourier's series, Lorentz's distribution.

MSC 05A18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СВЯЗНЫХ ГРАФОВ НАД КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН

Л.П. Остапенко, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается комбинаторная задача о числе N_n различных связных графов над произвольным конечным множеством из n занумерованных вершин. Предлагается алгоритм вычисления значений функции N_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: разложения конечного множества, производящая функция, алгебра симметричных функций, связный граф.

1. Постановка задачи. Неориентированный конечный *простой* граф (т.е. граф с одним типом вершин и некратных ребер и не имеющий петель) с нумерованными вершинами представляется парой $\langle V, \Sigma \rangle$, в которой V – конечное множество, элементы которого называются *вершинами* и $\Sigma \subset V^{(2)}$, $V^{(2)}$ – множество всех пар элементов из V. Элементы множества Σ называются *ребрами* графа. Такое определение предполагает, в частности, что для любого графа $\langle V, \Sigma \rangle$ любая биекция (отличная от тождественной) множества V на себя, которая индуцирует отображение множества смежности Σ в множество смежности, отличное от Σ, приводит к графу, не совпадающему с $\langle V, \Sigma \rangle$. При этом графы различны, когда они имеют разные матрицы смежности, а не только тогда, когда они топологически различны, то есть их матрицы смежности не могут получены друг из друга одновременной перестановкой строк и столбцов. Изучение такого рода графов оказывается важным при построении разложений специального вида в статистической механике решеточных систем [1].

Множество Σ порождает бинарное отношение *смежности* на V, на основе которого вводится бинарное отношение *связности* на V. А именно, пара $\{x, y\} \subset V$ определяется как связная, если существует последовательность $\langle x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y \rangle$ вершин из V такая, что $\{x_j, x_{j+1}\} \in \Sigma$, $j = 0, 1, ..., n-1$, $x_0 = x$, $x_n = y$. Эта последовательность называется *путем* на графе $\langle V, \Sigma \rangle$. Если множество всех возможных путей на этом графе дополнить тривиальными путями $\langle x, x \rangle$, $x \in V$, то таким образом определенное отношение связности становится *рефлексивным*. Тогда, очевидно, что оно является отношением *эквивалентности*. Следовательно, отношение связности, согласно основному свойству отношений эквивалентности, разбивает множество V на непересекающиеся подмножества связных между собой вершин. Каждое такое связное множество V', вместе со всеми ребрами, которые образованы парами $\{x', y'\}$ вершин из V' такими, что $\{x', y'\} \in \Sigma$ составляет отдельный граф. Он называется *связной компонентой* исходного графа. Граф $\langle V, \Sigma \rangle$ называется *связным*, если у него, при указанном разбиении, имеется только одно подмножество эквивалентности, то есть он состоит из одной связной компоненты.

Поставим комбинаторную задачу об определении числа N_n всех возможных различных связных графов, то есть отличающихся множествами смежности, которые можно построить на заданном множестве V, $|V| = n$ вершин. Поясним, что понимается под числом N_n, вычислением его в простейших случаях.

Пример: Определим несколько первых значений числа N_n. Начиная с $n = 4$ перебор всех возможных связных деревьев становится довольно рутинным.

1. При $n = 1, V = \{1\}$ имеется только один граф $\langle\{1\}, \varnothing\rangle$, состоящий из единственной вершины 1. Он же, по определению, является связным.

2. При $n = 2$, $V = \{1, 2\}$ имеется два графа и один из них связный $\langle V = \{1, 2\}, \Sigma = \{\{1, 2\}\}\rangle$. Следовательно, $N_2 = 1$.

3. При $n = 3$, $V = \{1, 2, 3\}$ имеется четыре связных графа, соответственно, со следующими множествами смежности: $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $\Sigma = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $\Sigma = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$. Все они различны в смысле данного выше определения. Следовательно, $N_3 = 4$.

4. При $n = 4$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Среди связных графов с четырьмя вершинами имеется 16 различных древесных графов (см. [2]) и связные графы содержащие, по крайней мере, один цикл. Последние недревесные графы разобъем на группы согласно различному топологическому типу без учета нумерации вершин. Таких групп четыре. Каждую из них опишем множеством смежности, из которого все остальные множества смежности рассматриваемой группы графов получаются подходящей перестановкой вершин. Для каждой группы укажем число графов, имеющихся в ней, которое легко устанавливается на основе комбинаторных соображений.

Первую группу представляет множество смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\{3, 4\}\}$ и в этой группе имеется 12 графов. Вторую группу представляет множество смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ и в этой группе имеется 3 графа. Далее, третью группу представляет множество смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, в которой имеется 6 графов. Наконец, последняя группа содержит один граф с множеством смежности $\Sigma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. На основе такого перечисления заключаем, что имеется 22 связных недревесных графа. Следовательно, вместе с древесными графами, получаем, что $N_4 = 38$.

В настоящей работе мы представим алгоритм расчета числа N_n, не использующего прямой перебор всех возможных различных связных графов.

2. Метод производящей функции. Решение задачи основано на вычислении вспомогательной производящей функции

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_n(\varepsilon)\,, \tag{1}$$

где функция $N_n(\varepsilon)$ такова, что $N_n(1) = N_n$ и ряд сходится в некоторой области на комплексной плоскости ε. При этом

$$N_n(\varepsilon) = \left(\frac{d^n}{dz^n} F(z, \varepsilon)\right)_{z=0}. \tag{2}$$

Опишем определение функции $N_n(\varepsilon)$, при котором будет использована техника, разработанная нами в [3]. Равным образом эта техника будет использована при вычислении $F(z,\varepsilon)$.

Пусть $I_n = \{1,2,...,n\}$ – стандартное n-элементное множество. Заметим, прежде всего, что число M_n всех графов (не обязательно связных) над множеством I_n равно $2^{n(n-1)/2}$. Это связано с тем, что в отношении между двумя любыми вершинами с номерами i и j имеется только два возможных состояния: есть соединяющее их ребро, или оно отсутствует. Максимальное же число ребер, которыми можно соединить n вершин, равно $n(n-1)/2$. Если для каждого графа (не обязательно связного) над множеством вершин, отмеченных метками из I_n, ввести переменные σ_{ij}, равные 1, если в этом графе имеется ребро между вершинами с номерами i и j и – 0, в противном случае, то любой граф однозначно описывается функцией σ_{ij}, $i,j = 1 \div n$. Тогда число всех графов совпадает с числом всех указанных функций, которое, как раз, равно указанному выше значению.

Введем последовательность $\langle \varphi(I_n;\varepsilon_{ij}); n \in \mathbb{N}\rangle$ с элементами

$$\varphi(I_n;\varepsilon_{ij}) \equiv \prod_{\{i,j\}} (1+\varepsilon_{ij})\,, \tag{3}$$

где ε_{ij}, $i,j = 1 \div n$ могут принимать любые комплексные значения.

Напомним, что разложением множества I_n называется неупорядоченный набор непустых множеств ω_j, $j = 1 \div s$, которые называются *компонентами* этого разложения и которые составляют дизъюнктивное разложение множества I_n,

$$\bigcup_{l=1}^{s} \omega_l = I_n\,, \quad \omega_j \cap \omega_k \neq \varnothing\,, \quad j \neq k\,, \quad j,k = 1 \div s\,,$$

где s – мощность разложения. Кроме того, обратимся к специальной алгебре, с помощью которой нами были решены [2, 3] комбинаторные задачи, связанные с графами на множеством нумерованных вершин. А именно, последовательность $\Phi = \langle \varphi(I_n;\varepsilon_{ij}); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ с $\varphi(\varnothing) = 0$ можно рассматривать как элемент идеала $\mathbb{A}_0$ коммутативной алгебры $\mathbb{A}$ последовательностей $\langle \upsilon_m; m \in \mathbb{N}_+\rangle$ симметричных функций υ_m, определенных и измеримых на $[0,1]^m$ со значениями в $\mathbb{R}$, $\upsilon_m(X_m) \equiv \upsilon_m(x_1,x_2,...,x_m)$, $X_m = \langle x_1,x_2,...,x_m\rangle$. При $m = 0$ элементы этих последовательностей полагаются константами. Линейные операции в этой алгебре определяются естественным образом как линейные операции с последовательностями. Произведение $*$ в этой алгебре определяется для каждой пары последовательностей $\Upsilon^{(1)} = \langle \upsilon_m^{(1)}; m \in \mathbb{N}_+\rangle$ и $\Upsilon^{(2)} = \langle \upsilon_m^{(2)}; m \in \mathbb{N}_+\rangle$ на основе формулы (см. [2])

$$(\Upsilon^{(1)} * \Upsilon^{(2)})_n(X(I_n)) = \sum_{\omega \subset I_n} \upsilon^{(1)}_{|\omega|}(X(\omega))\upsilon^{(2)}_{|I_n \setminus \omega|}(X(I_n \setminus \omega))\,,$$

в которой использованы следующие обозначения: $X(\omega) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\rangle$ для каждого $\omega = \{i_1, i_2, ..., i_s\} \subset I_n$ и $|\omega| = s$ – число элементов в ω.

Единицей алгебры $\mathbb{A}$ является последовательность $\langle 1,0,0,...\rangle$. При этом максимальный идеал $\mathbb{A}_0$ этой алгебры состоит из последовательностей Υ функций с $\upsilon_0 = 0$. Для

элементов Υ из $\mathbb{A}_0$ имеет место формула (см., например, [1],[3])

$$\Big[\exp_* \Upsilon\Big]_n (X(I_n)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Big[\Upsilon_*^m\Big]_n (X(I_n)) = \sum_{\Omega} \prod_{\omega\in\Omega} \upsilon_{|\omega|}(X(\omega))\,, \tag{4}$$

где суммирование в правой части производится по всем разложениям множества I_n.

Производя перемножение всех скобок в определении (3), получим (см. по этому поводу [1]), что

$$\varphi(I_n;\varepsilon_{ij}) = (\exp_* \Psi)(I_n)\,, \tag{5}$$

где $\Psi = \langle \psi(I_n); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ и

$$\psi(I_n;\varphi_{ij}) = \sum_{\Phi_n} \prod_{\{i,j\}\in\Phi_n} \varepsilon_{ij}\,, \tag{6}$$

а суммирование производится по всем связным графам над I_n с отношением связности Φ_n. В частности, если $\varepsilon_{ij} = 1$, то $\psi_n = N_n$.

Положим, теперь, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$ и определим функцию $N_n(\varepsilon)$ следующим образом:

$$\psi(I_n;\varepsilon) \equiv \sum_{\Phi_n} \varepsilon^{l(\Phi_n)} \equiv N_n(\varepsilon)\,, \quad N_n(1) = N_n\,, \tag{7}$$

где $l(\Phi_n)$ – число ребер в графе $\langle I_n, \Phi_n\rangle$. При этом же условии

$$\varphi(I_n;\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{n(n-1)/2} \equiv M_n(\varepsilon)\,.$$

Заметим, что функции $M_n(\varepsilon)$ и $N_n(\varepsilon)$ являются целыми функциями параметра ε.

Для вычисления производящей функции (1) напомним (см.[3]), что если значение линейной формы $L(z;\cdot)$ на алгебре $\mathbb{A}$, зависящей от параметра $z \in \mathbb{C}$, на каждом элементе $\Upsilon \in \mathbb{A}$ определяется формулой

$$L(z;\Upsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} \upsilon_n(X_n) dX_n\,, \tag{8}$$

где $dX_n = dx_1 dx_2 ... dx_n$ – мера Лебега на $[0,1]^n$, то эта форма мультипликативна и ее значения заведомо конечны в том случае, когда последовательность функций Υ равномерно ограничена.

Это означает, что для каждой пары элементов $\langle \Upsilon^{(1)}, \Upsilon^{(2)}\rangle$ с равномерно ограниченными элементами имеет место равенство (см., например, [2, 3])

$$L(z;\Upsilon^{(1)} * \Upsilon^{(2)}) = L(z;\Upsilon^{(1)}) L(z;\Upsilon^{(2)})\,. \tag{9}$$

Следствием линейности и мультипликативности формы $L(z;\cdot)$ является формула

$$L\big(z;\exp_* \Upsilon\big) = \exp\big(L(z;\Upsilon)\big)\,, \tag{10}$$

имеющая место для любого элемента $\Upsilon \in \mathbb{A}_0$.

Положим теперь, что $\Upsilon = \Psi$. Тогда, согласно (5),

$$L = (z;\Phi) = L\big(z;\exp_*\Psi\big) = \exp\big(L(z;\Upsilon)\big)\,.$$

Это приводит к следующей формуле:

$$\big[L(z;\Phi)\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}M_n(\varepsilon) = \exp\big[L(z;\Psi)\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon} =$$

$$= \exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}N_n(\varepsilon) = \exp F(z,\varepsilon)\,, \tag{11}$$

которая связывает производящие функции последовательностей $\langle M_n(\varepsilon); n \in \mathbb{N}\rangle$ и $\langle N_n(\varepsilon); n \in \mathbb{N}\rangle$.

Заметим, что ряд в левой части (11), имеющий явный вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}(1+\varepsilon)^{n(n-1)/2}\,,$$

сходится при $|1+\varepsilon| < 1$. Следовательно, при этих же условиях сходится ряд для производящей функции $F(z;\varepsilon)$. Тогда при указанном ограничении на ε, согласно (2) и (11), справедлива формула

$$N_n(\varepsilon) = \left(\frac{d^n}{dz^n}\ln\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_m(\varepsilon)\right)_{z=0}\,. \tag{12}$$

Так как $N_n(\varepsilon)$ – целая функция от ε, то полученное в результате вычислений согласно этой формулы выражение можно аналитически продолжить для любых значений $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, в частности, и на значение $\varepsilon = 1$. В результате, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Число всех связанных графов над множеством вершин I_n определяется формулой*

$$N_n = \left(\frac{d^n}{dz^n}\ln\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_m(\varepsilon)\right)_{z=0,\varepsilon=1}\,. \tag{13}$$

3. Алгоритм вычисления N_n. Несмотря на то, что формула (11) не позволяет представить производящую функцию $F(z;\varepsilon)$ явной аналитической формулой, на основе (13) легко строится алгоритм вычисления чисел N_n для любого $n \in \mathbb{N}$, применение которого при этом позволяет избежать рутинного перебора всех возможных связных графов с фиксированным числом вершин. Этот алгоритм строится следующим образом.

Положим

$$N_n = \left(\frac{d^n}{dz^n}\ln(1+G(z;\varepsilon)\right)_{z=0,\varepsilon=1}\,, \tag{14}$$

где

$$G(z;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\varepsilon^{n(n-1)/2}\,.$$

Подставляя в (14) разложение

$$\ln(1+G(z;\varepsilon))=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l!}\,G^l(z;\varepsilon)$$

и дифференцируя его n раз почленно, используя правило

$$\frac{d^n}{dz^n}H_1(z)...H_l(z)=\sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle,s_j\in\mathbb{N}_+:\\ s_1+...s_l=n}}\frac{n!}{s_1!...s_l!}H_1^{(s_1)}(z)...H_l^{(s_l)}(z)\,,$$

получим при $H_1(z)=...=H_l(z)=G(z;\varepsilon)$, что

$$\left(\frac{d^s}{dz^s}G(z;\varepsilon)\right)_{z=0}=M_s(\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$N_n(\varepsilon)=n!\left(\frac{d^n}{dz^n}\ln\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_m(\varepsilon)\right)_{z=0}=n!\sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^{l-1}}{l!}\sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle,s_j\in\mathbb{N}_+:\\ s_1+...s_l=n}}\prod_{j=1}^{l}\frac{M_{s_j}(\varepsilon)}{s_j!}\,,$$

где мы использовали, что разложение $G(z;\varepsilon)$ начинается с первой степени z и, следовательно, ряд по m в правой части обрывается при $m=n$. Полагая $\varepsilon=1$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Для чисел N_n справедлива формула*

$$N_n=n!\sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^{l-1}}{l!}\sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle,s_j\in\mathbb{N}_+:\\ s_1+...s_l=n}}\prod_{j=1}^{l}\frac{2^{j(j-1)/2}}{s_j!}\,. \tag{15}$$

Правильность построенного алгоритма легко подтверждается вычислением значений N_n при $n=1,2,3,4$, и сравнением их с теми, которые были получены в п.**1** перебором графов.

Литература

1. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971. – 368 с.
2. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа древесных графов над конечным множеством вершин // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – №11(208); 39 – С.37-43.

3. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа разложений конечного множества // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – №5(202); 38 – С.84-88.

EVALUATION OF CONNECTED GRAPHS NUMBER WITH FINITE VERTEX SET

L.P. Ostapenko, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. Combinatorial problem about the number N_n of different connected graphs with arbitrary finite set of n numbered vertexes is studied. It is proposed the algorithm of values N_n calculation for each $n \in \mathbb{N}$.

Key words: partition of finite set, generation function, algebra of symmetric functions, connected graph.

MSC 34B05

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ СИНГУЛЯРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ОБЛАСТИ

В.И. Власов

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, e-mail: vlasov@ccas.ru

Ключевые слова: асимптотика, краевые задачи, сингулярная деформация, конформное отображение.

1. Область $g \in \overline{\mathbb{C}}$ принадлежит классу $(\mathcal{A})$, если она односвязна, и конформное отображение $\mathbb{U} \xrightarrow{conf} g$ круга $\mathbb{U}$ на нее непрерывно в $\overline{\mathbb{U}}$ в смысле метрики римановой сферы. Будем говорить, что $g \in (\gamma, \Gamma)$, если $g \in (\mathcal{A})$ и $\partial g = \gamma \cup \Gamma$, где Γ — кусочно–гладкая дуга без внешних и внутренних заострений, а дуга γ в некоторых g–окрестностях ее концевых точек является ляпуновской и соединяется с Γ в этих точках также без заострений. Если существует область $G \in (\mathcal{A})$, являющаяся расширением g через Γ, то будем писать $G \overset{\Gamma}{\supset} g$. (Уточнение этих и используемых ниже определений см. в [1], [2]).

Пусть выполняются условия: 1) границы областей G_0, $G_L \in (\mathcal{A})$ имеют общую дугу σ_L°, а G_L° — компонента пересечения $G_0 \cap G_L$, примыкающая к σ_L°; 2) для отображения $\mathcal{F}_0 : G_0 \xrightarrow{conf} \mathbb{H}$ введем точки M и N по формулам $M := \mathcal{F}_0^{-1}(\infty) \in \sigma_L^{\circ}$, $N_0 := \mathcal{F}_0^{-1}(0) \notin \operatorname{int} \sigma_L^{\circ}$; 3) L определим равенством $L := \sup_{z \in \mathcal{F}_0(\sigma_L)} |z|$, $\sigma_L := \partial G_L^{\circ} \setminus \operatorname{int} \sigma_L^{\circ}$. Тогда будем говорить, что G_L получена путем деформирования области G_0 вблизи точки N с параметром деформации L, соответствующим отображению $\mathcal{F}_0$, и писать $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$. Основанием для такого определения является

Предложение 1. *Если $\{G_L\}_{L=0}^{L_0}$, $L_0 > 0$, — семейство областей $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$, то при $L \to 0$:*

1) семейства $\{G_L\}$ и $\{G_L^{\circ}\}$ сходятся к G_0 как к ядру (в смысле Каратеодори [3]);

2) семейство дуг $\{\sigma_L^{\circ}\}$ сходится к ∂G_0 в смысле следующего равенства:

$$\sigma_L^{\circ} \setminus \mathcal{F}_0^{-1}(\mathbb{D}_+(L)) = \partial G_0 \setminus \mathcal{F}_0^{-1}(\mathbb{D}_+(L))$$

при достаточно малых L, где $\mathbb{D}_+(L) := \{z : |z| < L, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Теорема 1. *Если $G_L \in (G_0, \mathcal{F}_0, L)$, то для отображения $\mathcal{F}_L : G_L \xrightarrow{conf} \mathbb{H}$, подчиненного условию*

$$\mathcal{F}_L(w) \sim \mathcal{F}_0(w), \qquad w \to M, \tag{1}$$

справедливо разложение

$$\mathcal{F}_L(w) \;=\; \mathcal{F}_0(w) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \, L^{k+1} \left[\mathcal{F}_0(w)\right]^{-k}, \tag{2}$$

сходящееся на $\mathcal{F}_0^{-1}\big(\mathbb{K}_+(L)\big)$, *где* $\mathbb{K}_+ := \{z : |z| > L, \mathrm{Im} z \geq 0\}$. *Коэффициенты* $B_k = B_k(L)$ *вещественны, и при* $k > 0$ *справедлива оценка* $|B_k(L)| \leq 1/\sqrt{k}$, *а при условии* $N_L := \mathcal{F}_L^{-1}(0) \notin \mathrm{int}\,\sigma_L^{\mathrm{o}}$ *— следующая оценка:* $|B_0(L)| \leq 2$.

2. Пусть выполняются условия: области семейств $\{g_L\}$ и $\{G_L\}$, $L \in (0, L_0)$, принадлежат классу $(\mathcal{A})$,

$$G_0 \overset{\Gamma}{\supset} g_0 \in (\gamma_0, \Gamma), \qquad G_L \overset{\Gamma}{\supset} g_L \in (\gamma_L, \Gamma),$$

и для каждой из G_L отображение $\mathcal{F}_L : G_L \xrightarrow{conf} \mathbb{H}$ удовлетворяет условию (1). В каждой из областей семейства $\{g_L\}$, $L \in (0, L_0)$, рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta\psi_L(w) = 0, \quad w \in g_L; \qquad \psi_L(w) = 0, \quad w \in \mathrm{int}\,\gamma_L; \qquad \psi_L(w) = h(w) \in L_2(\Gamma), \tag{3}$$

решение которой в классе типа Харди $e_2(g_L, \Gamma)$ существует и единственно [2].

Теорема 2. *Справедливо асимптотическое разложение*

$$\psi_L(w) = \psi_0(w) + \sum_{k=2}^{\infty} L_k\, \psi_{(k)}(w), \qquad L \to 0,$$

равномерное по w *внутри* $\overline{g} \setminus N_0$, *где* $\psi_{(k)}(w)$ *является линейной комбинацией функций* $\mathrm{Im}\left[\mathcal{F}_0(w)\right]^{-n}$, $n = \overline{1, k-1}$, *с явно выписываемыми вещественными коэффициентами.*

Аналогичная теорема может быть сформулирована и для асимптотики величины $\mathrm{grad}\,\psi_L(N_L)$ при $L \to 0$.

С помощью этих теорем была получена асимптотика решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях со скругленными углами и асимптотика его градиента на закругляющей кривой при стремлении радиуса закругления к нулю [2], а также асимптотики решения аналогичной задачи в областях с узкой щелью, имеющей дно произвольной формы, и асимптотика его градиента на дне щели при стремлении ширины щели к нулю [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики», проект «Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики» и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Литература

1. Власов В.И. О вариации отображающей функции при деформировании области // Доклады АН СССР. – 1984. – 275, №6. – С.1299-1302.

2. Власов В. И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей / Москва: ВЦ АН СССР, 1987.

3. Caratheodory C. Gesammelte mathemetische Schriften / München: Dritter Band., 1955; München: Vierter Band., 1956.

4. Власов В. И., Пальцев А. Б. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. – 2003. – 43, №12. – С.1768-1805.

ABOUT SOLUTIONS ASYMPTOTIC OF SOME PLANE BOUNDARY PROBLEMS AT SINGULAR DOMAIN DEFORMATION

V.I. Vlasov

*Dorodnitcyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences,
Vavilova St., 40, Moscow, 119333, Russia, e-mail: vlasov@ccas.ru

Key words: asymptotic, boundary problems, singular deformation, conformal image.

MSC 35M10

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Гималтдинова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453103, Россия, e-mail: g_alfira@mail.ru

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева-Бицадзе, тип уравнения, задача Дирихле, уравнение смешанного типа.

Для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y)| -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,y)$ с условиями*:

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(\bigcup_{i=1}^{4} D_i), \qquad Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \bigcup_{i=1}^{4} D_i,$$

$$u(x,y)\big|_{x=1} = u(x,y)\big|_{x=-1} = 0, \quad y \in [-\alpha, \beta],$$

$$u(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad x \in [-1,1], \quad u(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-1,1],$$

где $D_{1,2} = D \cap \{x > 0, \pm y > 0\}$, $D_{3,4} = D \cap \{x < 0, \pm y < 0\}$, φ и ψ – заданные функции.

Задача Дирихле для смешанного уравнения с одной линией изменения типа в прямоугольной области изучалась в работах [1, 2].

В данной работе впервые для уравнения (1) с двумя перпендикулярными линиями изменения типа изучается задача Дирихле в прямоугольной области и спектральным методом [3] доказаны теоремы единственности и существования решения.

Разделив переменные $u(x,y) = X(x)Y(y)$, относительно x получим спектральную задачу:

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + dX = 0, \quad X(0+) = X(0-), \quad X'(0+) = X'(0-), \quad X(1) = X(-1) = 0,$$

собственные функции которой имеют вид:

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0; \end{cases} \qquad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0, \end{cases}$$

где $d = \pm\mu_k^2$ – собственные значения, μ_k являются корнями уравнения $\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{th} \mu$, для них справедлива асимптотическая формула: $\mu_k = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$.

Система $\{X_k^{(1)}(x),\ X_k^{(2)}(x)\}$ не ортогональна на $[-1,1]$. Соответствующая биортогональная система имеет вид:

$$Z_k^{(1)}(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos\mu_k}, & x>0,\\ \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x<0;\end{cases}\qquad Z_k^{(2)}(x)=\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}\mu_k}, & x>0,\\ \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos\mu_k}, & x<0.\end{cases}$$

Полнота системы $\{Z_k^{(1)}(x),\ Z_k^{(2)}(x)\}$ в $L_2[-1,1]$ доказывается аналогично [4].

Теорема 1. *Если существует решение задачи Дирихле, то оно единственно только тогда, когда для всех $k\in\mathbb{N}$*

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)=\cos(\mu_k\alpha)\operatorname{sh}(\mu_k\beta)+\sin(\mu_k\alpha)\operatorname{ch}(\mu_k\beta)\neq 0, \tag{2}$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)=\operatorname{ch}(\mu_k\alpha)\sin(\mu_k\beta)+\operatorname{sh}(\mu_k\alpha)\cos(\mu_k\beta)\neq 0. \tag{3}$$

Лемма. *Пусть $\alpha\in\mathbb{N}$ не равное числам $4p-3$, $p\in\mathbb{N}$, или $\alpha=p/q\in\mathbb{Q}$, $p,q\in\mathbb{N}$, НОД$(p,q)=1$, число $q-p$ не кратно 4. Тогда существуют постоянные $C_0>0$ и $k_0\in\mathbb{N}$ такие, что для всех $k>k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha,\beta)|\geq C_0e^{\pi k\beta}.$$

При аналогичных α и условиях на β справедлива оценка $|\Delta_k^{(2)}(\alpha,\beta)|\geq\tilde{C}_0e^{\pi k\alpha}$.

Если выполнены оценки леммы и при $k\leq k_0$ условия (2), (3), то решение задачи Дирихле определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(1)}(y)\cdot X_k^{(1)}(x)+u_k^{(2)}(y)\cdot X_k^{(2)}(x),\ u_k^{(j)}(y)=\int_{-1}^{1}u(x,y)Z_k^{(j)}(x)dx. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^1[-1,1]\cap C^4[-1,0]\cap C^4[0,1]$, $\varphi(-1)=\varphi(1)=\varphi''(-1)=\varphi''(1)=0$, $\psi(-1)=\psi(1)=\psi''(-1)=\psi''(1)=0$, $\varphi''(0+0)=-\varphi''(0-0)$, $\varphi'''(0+0)=-\varphi'''(0-0)$, и выполнены оценки леммы. Тогда если при указанных в лемме α и β при всех $k=\overline{1,k_0}$ выполнены условия (2) и (3), то существует единственное решение задачи Дирихле и оно определяется рядом (4).*

Литература

1. Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinious coefficient // Ann. math. pure and appl. – 1963. – 62. – P.371-377.

2. Хачев М.М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области –// Дифференц. уравнения. – 1978. – 14,№1. – С.136-139.

3. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. – 2007. – 413, №1. – С.23-26.

4. Ломов И.С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47, №3. – С.358-365.

DIRICHLET's PROBLEM OF LAVRENTIEV-BITSADZE'S EQUATION WITH TWO CURVES OF TYPE CHANGE IN RECTANGULAR DOMAIN

A.A. Gimaltdinova

Sterlitamak department of Bashkirian State University,
Lenin Av., 37, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: *g_alfira@mail.ru*

Key words: Lavrentiev-Bitsadze's equation, equation type, Dirichlet's problem, mixed type equation.

MSC 74F10

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ АКУСТИКА: СЛУЧАЙ ЖИДКОСТЬ – ПОРОУПРУГАЯ СРЕДА

А.А. Герус, С.А. Гриценко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: artur-gerus@mail.ru; sgritsenko@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются процессы изотермической акустики в композитной среде с двумя различными компонентами: жидкая область и упругое тело, пронизанное системой пор, заполненных жидкостью. Исследуется разрешимость начально-краевой задачи и выводятся усредненные модели для различных случаев.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Стокса, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

1. Введение и постановка задачи. В работе исследуется математическая модель акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Одна из компонент является некоторой жидкой областью $\Omega^{(f)}$, другая – пороупругой средой Ω. Пороупругая среда представляет собой твердый скелет и поровое пространство, заполненное той же жидкостью. Дифференциальные уравнения модели, описывающие движение жидкости в области $\Omega^{(f)}$ и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды. При выводе усредненных уравнений применяется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [1] и результаты А.М. Мейрманова [2]- [6].

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб: $Q = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,a)$, $0 < a < 1$, а область $\Omega^{(f)}$, занятая жидкостью, есть открытое дополнение области Ω:

$$Q = \Omega \cup \Omega^{(f)} \cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(f)}\,.$$

Движение жидкости в пороупругой области Ω описывается системой уравнений

$$\Big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\Big)\, p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0\,, \tag{1}$$

$$\big(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\mathbb{P} + \varrho^\varepsilon\mathbf{F}\,, \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon\bar{\alpha}_\mu\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}\,, \tag{3}$$

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда №14-17-00556 «Математическое моделирование флюидопотоков в нефтяных резервуарах с учётом разномасштабных свойств пласта-коллектора».

где $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^\varepsilon \in \Omega$, $\bar{c}_s$ и $\bar{c}_f$ – скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, ρ – плотность среды, $\mathbf{F}$ – заданный вектор распределенных массовых сил.

Пусть

$$\int_{Q_T} \Big(|\mathbf{F}(\mathbf{x},t)|^2 + \Big|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2\Big) dxdt = F^2 < \infty\,,$$

и выполнены предположения о периодичности порового пространства и о существовании пределов при $\varepsilon \to 0$ коэффициентов α_μ, α_λ,..., описанные в работе [7].

При выполнении предположения о периодичности порового пространства

$$\chi_0(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\chi\Big(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\Big)\,,$$

где $\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω.

Движение жидкости в области $\Omega^{(f)}$ при $t > 0$ описывается системой уравнений Стокса

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\,p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0\,, \tag{4}$$

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\,\mathbb{P}^{(f)} + \varrho_f \mathbf{F}\,, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}^{(f)} = \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I}\,. \tag{6}$$

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности для перемещений:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t)\,, \tag{7}$$

и для нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} \mathbb{P}^{(f)}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0)\,. \tag{8}$$

Завершают задачу однородные граничные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = 0,\ (\mathbf{x},t) \in S_T = S\times(0,T)\,, \tag{9}$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0\,, \quad \mathbf{x}\in Q\,. \tag{10}$$

Пусть

$$\varrho_{(f)}^\varepsilon = (1-\zeta)\varrho_f + \zeta\big(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\big)\,.$$

Определение 1. *Пара функций* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *таких, что*

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)\,,\ p^\varepsilon \in L_2(Q_T)\,,$$

называется обобщенным решением задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10), если эти функции удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\Big((1-\zeta)\frac{1}{\bar c_f^2} + \zeta\,\big(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar c_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar c_s^2}\big)\Big)\,p^\varepsilon + \nabla\cdot\mathbf{w}^\varepsilon = 0\,, \tag{11}$$

почти всюду в Q_T, *и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T} \varrho^\varepsilon_{(f)}\big(\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)dxdt \;=\; \int_{Q_T}\big(\zeta\mathbb{P} + (1-\zeta)\mathbb{P}^{(f)}\big) \;:\; \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt \tag{12}$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}$ *таких, что* $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ *и* $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T) = 0$ *для* $\mathbf{x}\in Q$.

Теорема 1. *Для всех* $\varepsilon > 0$ *на произвольном интервале времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщенное решение* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10) и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(|p^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2 + \Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar\alpha_\lambda|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2\Big)dx+\\
&\quad+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(f)}}\Big(|p^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2 + \Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2\Big)dx + \int_0^T\int_{\Omega^{(f)}}\chi^\varepsilon\bar\alpha_\mu\Big|\mathbb{D}(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})\Big|^2dxdt+\\
&\quad+\max_{0<t<T}\int_\Omega\Big(\Big|\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar\alpha_\lambda\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)dx+\\
&+\max_{0<t<T}\int_{\Omega^{(f)}}\Big(\Big|\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t)\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)\Big|^2\Big)dx + \int_0^T\int_{\Omega^{(f)}}\chi^\varepsilon\bar\alpha_\mu\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big)\Big|^2dxdt+\\
&\qquad+\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon\bar\alpha_\mu\Big(\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big|^2 + \Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\Big)\Big|^2\Big)dxdt \leqslant C_0F^2\,,
\end{aligned}\tag{13}$$

где постоянная C_0 *не зависит от малого параметра* ε *и коэффициентов* $\bar\alpha_\lambda$, $\bar\alpha_\lambda^{(0)}$, $\bar\alpha_\mu$.

□ Доказательство теоремы основано на энергетических тождествах

$$\begin{aligned}
&\frac12\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\varrho^\varepsilon\Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\bar\alpha_p^\varepsilon}|p^\varepsilon|^2\Big)dx+\\
&\quad+\frac12\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(s)}}\Big(\varrho_s\Big|\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar\alpha_\lambda^{(0)}\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon):\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\big(\bar c_s^{(0)}\big)^2}|p^\varepsilon|^2\Big)dx+\\
&\qquad+\int_\Omega\chi^\varepsilon\Big(\bar\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big)dx = \int_Q\tilde\varrho^\varepsilon\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}dx\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\Big(\varrho^{\varepsilon}\Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big|^2+(1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+\frac{1}{\bar{\alpha}_p^{\varepsilon}}\Big|\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2\Big)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega^{(s)}}\Big(\varrho_s\Big|\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big|^2+(1-\chi^{\varepsilon})\bar{\alpha}_{\lambda}^{(0)}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\Big)+\frac{1}{\big(\bar{c}_s^{(0)}\big)^2}\Big|\frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial t}\Big|^2\Big)dx+$$
$$+\int_{\Omega}\chi^{\varepsilon}\Big(\bar{\alpha}_{\mu}\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big):\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}\Big)\Big)dx=\int_{Q}\tilde{\varrho}^{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}dx\,.$$

Эти тождества получаются подстановкой в уравнение (2) явного выражения для тензора $\mathbb{P}$ из уравнения состояния (3), умножением (2) на $\dfrac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$ и интегрированием по частям по области Q.

Для вывода априорных оценок применяется следующее неравенство Корна для периодических структур.

Пусть $\mathbf{w}\in\mathbf{W}_2^1(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|\nabla\mathbf{w}|^2dx\leqslant C\int_{\Omega_f^{\varepsilon}}|D(x,(\mathbf{w})|^2dx \tag{14}$$

для связного множества Ω_f^{ε}, и

$$\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|\nabla\mathbf{w}|^2dx\leqslant C\int_{\Omega_s^{\varepsilon}}|D(x,(\mathbf{w})|^2dx\,, \tag{15}$$

для связного множества Ω_s^{ε}. Константа C не зависит от ε.

Используя это неравенство, а также неравенства Гёльдера и Фридрихса-Пуанкаре, получаем требуемые априорные оценки. Далее существование обобщенного решения доказывается методом Галеркина.

2. Усредненные модели.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathbf{w}^{\varepsilon},p^{\varepsilon}\}$ *– обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10) и*

$$\mu_1=\lambda_1=\infty\,.$$

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\}$ *and* $\{p^{\varepsilon}\}$ *удовлетворяют системе уравнений акустики*

$$\varrho_f\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla p=\varrho_f\mathbf{F}\,, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{17}$$

в области $\Omega^{(f)}$ *при* $t>0$, *и системе уравнений акустики в области* Ω *при* $t>0$:

$$\hat{\varrho}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla p=\hat{\varrho}\mathbf{F}\,, \tag{18}$$

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\,\mathbf{v}=0\,, \tag{19}$$

где

$$m=\int_Y \chi(y)dy\,.$$

Соотношения (16)-(19) замыкаются однородным граничным условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0\,, \tag{20}$$

на границе S_T, однородными начальными условиями

$$p(\mathbf{x},0)=0,\ \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=0\,,\quad \mathbf{x}\in Q\,, \tag{21}$$

и условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)\,, \tag{22}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\ p(\mathbf{x},t)=\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\ p(\mathbf{x},t) \tag{23}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$.

Здесь

$$\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s\,,$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *есть нормальный вектор к S в точке $\mathbf{x}\in S$, и $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ – нормальный вектор к $S^{(0)}$ в точке $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$.*

Теорема 3. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10) и*

$$0\leqslant\mu_1\,,\quad \lambda_1<\infty\,.$$

Тогда пределы $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ системе уравнений акустики (16), (17), и системе уравнений акустики в области Ω_T, состоящей из уравнения баланса моментов в форме

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\int_0^t\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla\,p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau+\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\,, \tag{24}$$

и уравнения неразрывности (19).

Дифференциальные уравнения замыкаются граничным и начальным условиями (20), (21), и условиями непрерывности (22), (23).

Матрица $\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t)$ и функция $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ задаются формулами (61), (62).

Теорема 4. *Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ – обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$\mu_1=\infty\,,\quad 0\leqslant\lambda_1<\infty\,,$$

и $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$ *– продолжение из* Ω_f^ε *в* Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\, m\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\, m\,\mathbf{v}_f + \zeta\,\mathbf{v}^{(s)}\,, \tag{25}$$

и $\mathbf{w}^{(s)}$ *и* $\mathbf{w}_f$ *– пределы последовательностей* $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$, *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики (16), (17), и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения баланса моментов*

$$m\varrho_f\,\mathbf{v}_f + \varrho_s\,\mathbf{v}^{(s)} + \int_0^t \big(-\hat{\varrho}\mathbf{F} + \nabla\, p\big)(\mathbf{x},\tau)d\tau = 0\,, \tag{26}$$

для жидкой компоненты, уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(s)} - (1-m)\mathbf{v}_f = -\int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\Big(\nabla\, p + \varrho_s\Big(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial \tau} - \mathbf{F}\Big)\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{27}$$

для твердой компоненты, и уравнения неразрывности

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{(1-m)}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\Big(m\,\mathbf{v}_f + \mathbf{v}^{(s)}\Big) = 0\,. \tag{28}$$

Задача замыкается граничным и начальными условиями (20), (21), и условиями непрерывности (22), (23).

В (26)-(27)

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s\,,$$

и матрица $\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$ *задается формулой (72).*

В теореме используется обозначение:

$$\boldsymbol{w}_f^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\Big(\mathbf{w}^\varepsilon\Big)\,,$$

где

$$\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$$

– оператор продолжения из Ω_f^ε в Ω, такой, что $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)$, и

$$\int_\Omega |\mathbf{w}_f^\varepsilon|^2 dx \quad\leqslant\quad C_0\int_{\Omega_f^\varepsilon}|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx\,, \qquad \int_\Omega |\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_f^\varepsilon)|^2 dx \quad\leqslant\quad C_0\int_{Q_f^\varepsilon}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx\,. \tag{29}$$

Корректность такого продолжения обоснована в работе C.Conca [8].

Теорема 5. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *– обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$\lambda_1 = \infty\,, \quad 0 \leqslant \mu_1 < \infty\,,$$

и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$ *– продолжение из* Ω_s^ε *в* Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + \zeta\,(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\mathbf{v}^{(f)} + \zeta\,\mathbf{v}_s\,, \tag{30}$$

и $\mathbf{w}^{(f)}$ *и* $\mathbf{w}_s$ *являются пределами последовательностей* $\{\chi^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$, *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики (16), (17), и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения неразрывности*

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{(1-m)}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial\, p}{\partial t} + \nabla\cdot\big(\mathbf{v}^{(f)} + \mathbf{v}_s\big) = 0\,, \tag{31}$$

уравнения баланса моментов

$$\varrho_f\,\mathbf{v}^{(f)} + (1-m)\varrho_s\,\mathbf{v}_s = \int_0^t \Big(\hat{\varrho}\mathbf{F} - \nabla\, p\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau\,, \tag{32}$$

для твердой компоненты и и уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(f)} - m\,\mathbf{v}_s = -\int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla\, p + \varrho_f\Big(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \tau} - \mathbf{F}\Big)\Big)(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{33}$$

для жидкой компоненты.

Задача замыкается граничным и начальными условиями (20), (21), и условиями непрерывности (22), (23).

В (32)-(33)

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s\,,$$

и матрица $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t)$ *задается формулой (81).*

Здесь как и в предыдущей теореме $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$, где

$$\mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_s^\varepsilon) \to \mathbf{W}_2^1(\Omega)$$

– оператор продолжения из Ω_s^ε в Ω, такой что $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_s^\varepsilon \times (0,T)$, и

$$\int_\Omega |\mathbf{w}_s^\varepsilon|^2 dx \quad\leqslant\quad C_0\int_{\Omega_s^\varepsilon}|\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx\,, \quad \int_\Omega |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^\varepsilon)|^2 dx \quad\leqslant\quad C_0\int_{\Omega_s^\varepsilon}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx\,. \tag{34}$$

Теорема 6. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *– обобщенное решение задачи (1)-(3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$\mu_1 = \infty\,, \quad 0 < \lambda_0 < \infty\,,$$

и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости),* p *(давление), и* $\mathbf{w}_s$ *(перемещение твердой части) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$, $\{p^\varepsilon\}$, *и* $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\mathbf{v}_s\,, \tag{35}$$

удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики (16), (17), и уравнению Ламе*

$$\hat{\varrho}\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = \nabla\cdot\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)\big) + \hat{\rho}\mathbf{F} \tag{36}$$

в области Ω_T, *с однородным граничным условием*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\,, \tag{37}$$

на границе $\partial\Omega^{(f)}\backslash S^{(0)}$ *при* $t>0$, *с однородными начальными условиями*

$$p(\mathbf{x},0) = 0,\ \ \mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0 \tag{38}$$

для скорости жидкости и давления в области $\Omega^{(f)}$, *с однородным граничным условием*

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t) = 0\,, \tag{39}$$

на границе $\partial\Omega\backslash S^{(0)}$ *при* $t>0$, *и однородными начальными условиями*

$$\mathbf{w}_s(\mathbf{x},0) = \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0 \tag{40}$$

для перемещения твердой части в Ω.

На общей границе $S_T^{(0)}$ *выполняются условия непрерывности*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{41}$$

и

$$-\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} p\,(\mathbf{x},t)\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \Big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}_s(\mathbf{x},t)\big)\Big)\cdot\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)\,. \tag{42}$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ *– нормаль к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$.

В (36)

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s\,,$$

и симметричный положительно определенный постоянный тензор 4 ранга $\mathfrak{N}_3^s$ *задается формулой (98).*

Теорема 7. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *– обобщенное решение задачи (1) – (3), (4)-(6), (7), (8), (9), (10),*

$$0 < \mu_1 < \infty\,, \quad 0 < \lambda_0 < \infty\,,$$

и $\mathbf{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}\big(\mathbf{w}^\varepsilon\big)$.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + \zeta\,(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = (1-\zeta)\mathbf{v} + \zeta\,\mathbf{v}^{(f)} + \zeta\,\mathbf{v}_s\,, \tag{43}$$

удовлетворяют системе уравнений акустики (16), (17) в области $\Omega_T^{(f)}$, *граничному и начальным условиям(37)-(38).*

В области Ω_T *предельные функции* p_f *(давление жидкости),* $\mathbf{w}^f$ *(перемещение жидкости), и* $\mathbf{w}_s$ *(перемещение твердой части) последовательностей* $\{\zeta\,\chi^\varepsilon\,p^\varepsilon\}$, $\{\zeta\,\chi^\varepsilon\,\mathbf{w}^\varepsilon\}$, *и* $\{\zeta\,\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ *удовлетворяют системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности*

$$\frac{1}{c_f^2}p_f + \nabla\cdot\,\mathbf{w}^{(f)} = \mathbb{C}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \frac{c_0^s}{\lambda_0}p_f\,, \tag{44}$$

уравнения баланса моментов

$$\varrho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t^2} + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} = \nabla\cdot\,\big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) - p_f\,\mathbb{C}_1^s\big) + \hat{\varrho}\mathbf{F}\,, \tag{45}$$

для твердой компоненты, и уравнению баланса моментов

$$-\int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\mu_1, \infty; t-\tau)\cdot\Big(\nabla\,p_f + \varrho_f(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial \tau^2} - \mathbf{F})\Big)(\mathbf{x}, \tau)d\tau = \frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} - m\,\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} \tag{46}$$

для жидкой компоненты.

Эти дифференциальные уравнения замыкаются условиями непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega}} \big(\mathbf{v}^{(f)}(\mathbf{x}, t) + (1-m)\frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)\,, \tag{47}$$

и

$$-\lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega^{(f)}}} p\,(\mathbf{x}, t)\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\,\to\,\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\,\in\,\Omega}} \Big(\lambda_0\,\mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}\big(x, \mathbf{w}_s(\mathbf{x}, t) - p_f\,\mathbb{C}_1^s\big)\Big)\cdot\,\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) \tag{48}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$, *однородными граничными и начальными условиями (39) и (40) для перемещения твердой части, и однородными граничными и начальными условиями*

$$\mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\,, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega\backslash S^{(0)}\,, \quad t\in(0, T)\,, \tag{49}$$

$$\mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x},0)=0\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{50}$$

для перемещения жидкости.

В (44)-(49) $\mathbf{n}(\boldsymbol{x}^0)$ *– нормальный вектор к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *– нормальный вектор к* $\partial\Omega$ *в точке* $\mathbf{x}\in\partial\Omega$,

$$\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s\,,$$

симметричный положительно определенный постоянный тензор 4 ранга $\mathfrak{N}_2^s$, *матрицы* $\mathbb{C}_0^s$ *и* $\mathbb{C}_1^s$, *постоянная* c_0^s *заданы формулами (90), (91) и (92), а матрица* $\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t)$ *описана формулой (81).*

3. Доказательство теорем 2-5. Главная проблема в доказательстве этих теорем состоит в условиях непрерывности на общей границе $S^{(0)}$ между областями $\Omega^{(f)}$ и Ω. Эти условия следуют из предельного интегрального тождества

$$-\int_{Q_T}p\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\,dxdt\;=\;\int_{Q_T}\int_Y\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big(\mathbf{F}\,-\,\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Big)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)dy\,dx\,dt\,, \tag{51}$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, и интегрального тождества

$$\int_{Q_T}\Big(\Big((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2}+\zeta\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\Big)\frac{\partial p}{\partial t}\,\psi-\nabla\psi\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Big)dxdt=0 \tag{52}$$

для любой гладкой функции $\psi\in W_2^{1,0}(Q_T)$.

Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ – двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, и

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f+\zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f\,\chi(\mathbf{y})+\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,\varrho_s)\big)\,.$$

Для всех случаев (51) и (52) влекут систему уравнений акустики (16) и (17) в области $\Omega_T^{(f)}$, условия непрерывности (22) и (23) на общей границе $S^{(0)}$, и уравнение неразрывности

$$\Big(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}=0 \tag{53}$$

в области Ω_T.

Все различия сконцентрированы в уравнении динамики в области Ω_T и в представлении скорости смеси $\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$.

Доказательство теоремы 2. Для этого случая $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ и интегральное тождество (51) влечет уравнение динамики

$$\hat{\varrho}\,\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=-\nabla\,p+\hat{\varrho}\,\mathbf{F} \tag{54}$$

в области Ω_T.

Доказательство теоремы 3. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\Big(\frac{1}{\bar{c}_f^2}+\frac{1}{\bar{c}_s^2}\Big)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}=0\,,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\ t>0\,,$$

Используя вложение $\nabla\, p\in \mathbf{L}_2(\Omega_T\times Y)$, то есть $\nabla p\in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, $\nabla\,(\dfrac{\partial p}{\partial t})\in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, выводим микроскопическое уравнение моментов баланса:

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2}=\nabla_y\cdot\Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\mathbb{D}\big(y,\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}\big)+\lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbb{D}(y,\mathbf{W})-\Pi\,\mathbb{I}\Big)-$$
$$-\nabla\, p+\varrho(\mathbf{y})\mathbf{F}\,,\quad \mathbf{y}\in Y\,,\quad t>0\,,\qquad (55)$$

где

$$\varrho(\mathbf{y})=\varrho_f\,\chi(\mathbf{y})+\varrho_s\,\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,,$$

и микроскопическое уравнение неразрывности

$$\nabla_y\cdot\mathbf{W}=0\,,\quad \mathbf{y}\in Y\,.\qquad (56)$$

Эти уравнения замыкаются однородными начальными условиями

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)=\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{y},0)=0\,,\quad \mathbf{y}\in Y\,.$$

Мы рассматриваем периодическое решение задачи как сумму

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,,$$

$$\Pi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\Pi^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{3}\int_0^t\Pi_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,,$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t)=\big(F_1(\mathbf{x},t)\,F_2(\mathbf{x},t),F_3(\mathbf{x},t)\big)\,.$$

В свою очередь, пары $\{\mathbf{W}^{(i)},\,\Pi^{(i)}\}$, и $\{\mathbf{W}_F^{(i)},\,\Pi_F^{(i)}\}$ для $i=1,2,3$ есть решения периодических начально-краевых задач в области Y для $t>0$

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t^2}=\nabla_y\cdot\Big(\mu_1\chi(\mathbf{y})\nabla_y\big(\frac{\partial\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\big)+$$
$$+\lambda_1\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\nabla_y\mathbf{W}^{(i)}-\Pi^{(i)}\,\mathbb{I}\Big),\ \nabla_y\cdot\mathbf{W}^{(i)}=0\,,\qquad (57)$$

$$\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},0)=0\,,\quad \varrho(\mathbf{y})\frac{\partial\mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},0)=-\mathbf{e}_i,\quad \mathbf{y}\in Y\,,\qquad (58)$$

и

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \Big(\mu_1 \chi(\mathbf{y}) \nabla_y \big(\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\big) + \\ + \lambda_1 \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\nabla_y \mathbf{W}_F^{(i)} - \Pi_F^{(i)}\,\mathbb{I}\Big),\ \nabla_y \cdot \mathbf{W}_F^{(i)} = 0\,, \quad (59)$$

$$\mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},0) = 0\,, \quad \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y \quad (60)$$

соответственно.

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,,$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Big\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y (t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)d\tau + \\ + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Big\langle \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y (\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau = \\ = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\,,$$

где

$$\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t) = \sum_{i=1}^{3}\Big\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y (t)\otimes \mathbf{e}_i\,, \quad (61)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Big\langle \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\Big\rangle_Y (\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)d\tau\,. \quad (62)$$

Полученные соотношения дают следующее представление для скорости смеси:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \quad (63)$$

Доказательство теоремы 4. Для этого случая скорость смеси задана формулой:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = m\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}\,, \quad \mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x},t) = \int_Y \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy\,.$$

Интегральное тождество (51) влечет уравнение динамики (26) для жидкой компоненты.

Получим представление (27).

Если $\mathbf{W}^{(s)} = \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{W}$, то пара $\{\mathbf{W}^{(s)}, \Pi^{(s)}\}$ удовлетворяет микроскопическому уравнению динамики для твердой компоненты

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\Delta_y \mathbf{W}^{(s)} - \nabla_y \Pi^{(s)} - \nabla\, p\,, \tag{64}$$

микроскопическому уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{W}^{(s)} = 0$$

в области Y_s, и начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},0,\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},0,\mathbf{y}) = 0\,, \quad \mathbf{y}\in Y_s\,. \tag{65}$$

В силу теоремы Нгуетсенга $\mathbf{W}^{(s)}, \partial^2\mathbf{W}^{(s)}/\partial t^2\, \nabla_y \mathbf{W}^{(s)} \in L_2(Q_T\times Y_s)$. Эти условия вместе с формулой (58) обеспечивают граничное условие

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t)\,, \quad (\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T) \tag{66}$$

Решения $\{\mathbf{W}^{(s)}, \Pi^{(s)}\}$ периодических начально-краевых задач (64)-(66) имеют вид

$$\mathbf{W}^{(s)} = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

$$\Pi^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(s)}, \Pi_i^{(s)}\}$, $i = 1,2,3$, в свою очередь являются решениями периодических начально-краевых задач

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\triangle_y \mathbf{W}_i^{(s)} - \nabla_y \Pi_i^{(s)}\,, \quad (\mathbf{y},t)\in Y_s\times(0,T)\,, \tag{67}$$

$$\nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0\,, \quad (\mathbf{y},t)\in Y_s\times(0,T)\,, \tag{68}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},0) = 0\,, \quad \varrho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i,\ \mathbf{y}\in Y_s\,, \tag{69}$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0\,, \quad (\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T)\,, \tag{70}$$

Однозначная разрешимость задач (67)-(70) следует из энергетического тождества

$$\int_{Y_s}\Big(\varrho_s\Big|\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)\Big|^2 + \frac{\lambda_1}{2}\Big|\nabla \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t)\Big|^2\Big)dy = \frac{(1-m)}{\varrho_s}\,.$$

Задача (67)-(70) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_s^{(i)}$, равных нулю на $S^{(0)}$ и при $t=0$, понимается как интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{Y_s} \Big(\varrho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \lambda_1 \nabla \mathbf{W}_i^{(s)} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \Big) dy dt = \int_{Y_s} \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, 0) dy$$

для любой соленоидальной 1-периодической гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, равной нулю на $S^{(0)}$ и при $t=T$. По определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy = \\ &= (1-m) \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \int_0^t \Big(\sum_{i=1}^3 \Big(\int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t-\tau) dy \Big) \otimes \mathbf{e}_i \Big) \cdot \Big(\nabla p(\mathbf{x}, \tau) + \\ &\quad + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \Big) d\tau = (1-m) \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \\ &\quad - \int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t-\tau) \cdot \Big(\nabla p(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \Big) d\tau \,, \end{aligned} \tag{71}$$

где

$$\mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t) = \sum_{i=1}^3 \Big(\int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) dy \Big) \otimes \mathbf{e}_i \,. \tag{72}$$

Доказательство теоремы 5. Здесь скорость смеси задана формулой

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \big(1 - \chi(\mathbf{y})\big) \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \,,$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t} + (1-m) \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} \,, \quad \mathbf{w}^{(f)}(\mathbf{x}, t) = \int_Y \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy \,.$$

Интегральное тождество (51) влечет уравнение динамики (32) для твердой компоненты. Докажем представление (33)

Если мы положим $\mathbf{W}^{(f)} = \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}$, то предельное интегральное тождество для пары $\{\mathbf{W}^{(f)}, \Pi^{(f)}\}$ эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2} \Delta_y \Big(\frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t} \Big) - \nabla_y \Pi^{(f)} - \nabla\, p \tag{73}$$

в области $Y_f \times (0, T)$, начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(f)}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = 0 \,, \quad \mathbf{y} \in Y_f \tag{74}$$

и граничному условию

$$\mathbf{W}^{(f)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \boldsymbol{w}_s(\mathbf{x}, t) \,, \quad (\mathbf{y}, t) \in S^{(0)} \times (0, T) \,. \tag{75}$$

Таким образом, решение $\{\mathbf{W}^{(f)}, \Pi^{(f)}\}$ периодической начально-краевой задачи (73)-(75) имеет вид

$$\mathbf{W}^{(f)} = \mathbf{w}_s(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

$$\Pi^{(f)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(f)}(\mathbf{y},t-\tau)\Big(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(f)}, \Pi_i^{(f)}\}$, $i = 1,2,3$, в свою очередь, есть решения следующих периодических начально-краевых задач:

$$\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t^2} = \frac{\mu_1}{2}\triangle_y(\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}) - \nabla_y\Pi_i^{(f)},\ (\mathbf{y},t)\in Y_f\times(0,T)\,, \tag{76}$$

$$\nabla_y\cdot\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t) = 0\,,\quad (\mathbf{y},t)\in Y_f\times(0,T)\,, \tag{77}$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},0) = 0\,,\quad \varrho_f\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i\,,\quad \mathbf{y}\in Y_f\,, \tag{78}$$

$$\mathbf{W}_i^{(f)}(\mathbf{y},t) = 0\,,\quad (\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T)\,. \tag{79}$$

По определению

$$\frac{\partial\mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \int_{Y_f}\frac{\partial\mathbf{W}^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy =$$
$$= m\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t} - \int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\int_{Y_f}\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)dy\Big)\otimes\mathbf{e}_i\Big)\cdot\big(\nabla p\,(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\big)d\tau =$$
$$= m\frac{\partial\mathbf{w}_s}{\partial t} - \int_0^t\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot\Big(\nabla p\,(\mathbf{x},\tau) + \varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_s}{\partial\tau^2}(\mathbf{x},\tau)\Big)d\tau\,, \tag{80}$$

где

$$\mathbb{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t) = \sum_{i=1}^{3}\Big(\int_{Y_f}\frac{\partial\mathbf{W}_i^{(f)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)dy\Big)\otimes\mathbf{e}_i. \tag{81}$$

Доказательство теорем 6 и 7. Для этих случаев двухмасштабный предел $P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ последовательности $\{p^\varepsilon\}$ задается формулой

$$(1-\zeta)\,p + \frac{\zeta}{m}\chi(\mathbf{y})\,p_f(\mathbf{x},t) + \zeta\,\big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\,P_s(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,.$$

Для $\mu_1 = \infty$ двухмасштабный предел $\mathbf{W}$ последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ есть

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,,$$

и для $\mu_1 < \infty$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,.$$

Двухмасштабный предел $\{\mathbf{w}_s^\varepsilon\}$ равен $\{\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\}$, и двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s^\varepsilon)\}$ есть

$$\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\big) + \mathbb{D}\big(y,\mathbf{U}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\big)\,.$$

Интегральное тождество (51) заменяется на

$$\int_{Q_T} \big(\zeta\,\lambda_0\big(m\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) + \langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big) - p\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt = \int_{Q_T}\int_Y \varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big(\mathbf{F} - \frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Big)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t)dy\,dx\,dt \quad (82)$$

с любыми гладкими функциями $\boldsymbol{\varphi}$, равными нулю на границе ∂Q, а интегральное тождество (52) заменяется на

$$\int_{Q_T}\Big(\eta\int_Y\Big(\frac{1-\zeta}{\bar c_f^2} + \Big(\frac{\chi}{\bar c_f^2} + \frac{1-\chi}{\bar c_s^2}\Big)\zeta\Big)\frac{\partial P}{\partial t}dy - \nabla\eta\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\Big)dxdt = 0 \quad (83)$$

с любыми гладкими η.

В (82)

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big(1-\zeta(\mathbf{x})\big)\varrho_f + \zeta(\mathbf{x})\big(\varrho_f\chi(\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\varrho_s\big)\,.$$

Для $\mu_1 = \infty$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,,$$

и для $\mu_1 < \infty$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \big(1-\chi(\mathbf{y})\big)\mathbf{w}_s(\mathbf{x},t)\,.$$

Соотношения (82) и (83) дают систему уравнений акустики (16), (17) в $\Omega_T^{(f)}$, усредненные уравнения баланса моментов (36) и (44), уравнение неразрывности (45) в Ω_T, условия непрерывности (41), (42), (47), и (48) на общей границе $S_T^{(0)}$, и граничные условия (37) и (49).

Предельные функции $\mathbf{w}_s$ и p_f удовлетворяют в области Ω_T макроскопическому уравнению неразрывности для жидкой компоненты

$$\frac{m}{c_f^2}p_f + m\nabla\cdot\mathbf{w}_s = \langle\nabla_y\cdot\mathbf{U}\rangle_{Y_s}\,. \quad (84)$$

Действительно, мы можем записать уравнение неразрывности в виде

$$\int_{\Omega_T}\big(\frac{1}{c_f^2}\chi^\varepsilon p^\varepsilon\xi(\mathbf{x},t) - \mathbf{w}^\varepsilon\cdot\nabla\xi(\mathbf{x},t)\big)dxdt = \int_{\Omega_T}(1-\chi^\varepsilon)\xi(\mathbf{x},t)\nabla\cdot\mathbf{w}_s^\varepsilon dxdt\,.$$

Переход к пределу при $\varepsilon\to 0$ дает

$$\int_{\Omega_T}\Big(\frac{1}{c_f^2}\chi^\varepsilon p^\varepsilon\xi(\mathbf{x},t) - \mathbf{w}^\varepsilon\cdot\nabla\xi(\mathbf{x},t)\Big)dxdt \to \int_{\Omega_T}\Big(\xi\frac{m}{c_f^2}p_f - \mathbf{w}_s\cdot\nabla\xi\Big)dxdt =$$

$$= \int_{\Omega_T} \xi\Big(\frac{m}{c_f^2} p_f + \nabla \cdot \mathbf{w}_s\Big) dxdt\,,$$

$$\int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon) \nabla \cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon \xi(\mathbf{x},t) dxdt \to \int_{\Omega_T} \xi\big((1-m)\nabla \cdot \mathbf{w}_s + \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}\big) dxdt\,.$$

Используя теорему Нгуетсенга, получаем требуемое уравнение (84).

Запишем теперь уравнение неразрывности в области Ω_s^ε в следующей форме

$$(1-\chi^\varepsilon) p^{\,\varepsilon} = -c_s^2 (1-\chi^\varepsilon) \nabla \cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon\,,$$

и интегральное тождество в следующей форме

$$I_f^\varepsilon + I_s^\varepsilon = \int_{\Omega_T} \varrho^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \varphi \, dxdt\,, \tag{85}$$

где

$$I_f^\varepsilon = \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{v}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\varphi) dxdt + \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \, p^\varepsilon \nabla \cdot \varphi dxdt\,,$$

$$I_s^\varepsilon = \int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon)\big(\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon) : \mathbb{D}(x,\varphi) + c_s^2 (\nabla \cdot \mathbf{w}_s^\varepsilon)(\nabla \cdot \varphi)\big) dxdt =$$

$$= \lambda_0 \int_{\Omega_T} (1-\chi^\varepsilon)\big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s^\varepsilon)\big) : \mathbb{D}(x,\varphi) dxdt\,,$$

и

$$\mathfrak{N}^{(0)} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij} \otimes \mathbb{J}^{ij} + \frac{c_s^2}{\lambda_0} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}\,.$$

Здесь использовано обозначение:

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)\,,$$

тензор четвертого ранга $A \otimes B$ определяется следующим образом:

$$(A \otimes B) : C = A(B : C)$$

для любого тензора второго ранга C.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (85) с двумя различными типами пробных функций. Вначале используем пробную функцию $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, а затем пробную функцию $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$. Получим макроскопическое уравнение баланса моментов

$$\nabla \cdot \Big(\lambda_0 \, \mathfrak{N}^{(0)} : \big((1-m)\, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U})\rangle_{Y_s}\big)\Big) - m \, \nabla p + \hat{\varrho} \mathbf{F} = 0\,, \tag{86}$$

и микроскопическое уравнение баланса моментов

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathfrak{N}^{(0)} : \big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(y, \mathbf{U})\big) + \frac{1}{\lambda_0} p \, \mathbb{I}\big)\Big) = 0\,. \tag{87}$$

Чтобы вычислить $\mathfrak{N}_2^s$ и $\mathbb{C}_1^s$ мы должны решить (87) и найти $\langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s}$ как оператор от $\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s)$ и p.

Пусть $\mathbf{U}_2^{(ij)}(\mathbf{y})$ и $\mathbf{U}_2^{(0)}(\mathbf{y})$ есть решения периодических задач

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \big(\mathbb{J}^{(ij)} + \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\big)\Big)\Big) = 0\,, \tag{88}$$

и

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)}) + \mathbb{I}\big)\Big) = 0 \tag{89}$$

в Y.

Разрешимость задач (88) и (89) следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_s} \Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\Big) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})dy = -\int_{Y_s} \Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})dy,$$

$$\int_{Y_s} \Big(\mathfrak{N}^{(0)} : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\Big) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})dy = -\int_{Y_s} \mathbb{I} : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})dy (= -\langle \nabla\cdot\mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s})\,,$$

и соответствующих энергетических оценок.

Таким образом,решение $\mathbf{U}$ задачи (87) имеет вид

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_2^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{\lambda_0}\, p(\mathbf{x},t)\, \mathbf{U}_2^{(0)}(\mathbf{y})\,.$$

Поэтому

$$\langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U})\rangle_{Y_s} = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s} D_{ij} + \frac{1}{\lambda_0}\, p\, \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s} =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + \frac{1}{\lambda_0}\, p\, \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s},$$

и

$$\mathfrak{N}_2^s = \mathfrak{N}^{(0)} : \Big((1-m)\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(ij)})\rangle_{Y_s} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\Big) \tag{90}$$

$$\mathbb{C}_1^s = m\,\mathbb{I} - \langle \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_2^{(0)})\rangle_{Y_s}\,. \tag{91}$$

Выразим правую часть (84) используя (90):

$$\langle \nabla_y\cdot\mathbf{U}\rangle_{Y_s} = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s} D_{ij} + \frac{1}{\lambda_0}\, q \langle \nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s} =$$

$$= \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(ij)}\rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij}\Big) : \mathbb{D}(x,\mathbf{w}_s) + \Big(\frac{1}{\lambda_0}\langle \nabla_y\cdot\mathbf{U}_2^{(0)}\rangle_{Y_s}\Big)\, p\,.$$

Таким образом,

$$\mathbb{C}_0^s = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_2^{(ij)} \rangle_{Y_s} \mathbb{J}^{ij}\,, \quad c_0^s = \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_2^{(0)} \rangle_{Y_s}\,. \tag{92}$$

Очевидно, $c_0^s < 0$.

Если $\mu_1 = \infty$, то $\mathbf{w}_s = \mathbf{w}$, и

$$p_f = \frac{1}{\beta}\big(\mathbb{I} + \mathbb{C}_0^s\big) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) = \widetilde{\mathbb{C}} : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\,,$$

$$\nabla \cdot \big(\lambda_0\, \mathfrak{N}_2^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s) - p_f\, \mathbb{C}_1^s\big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0\,,$$

где

$$\beta = \frac{m}{c_f^2} - \frac{c_0^s}{\lambda_0} > 0\,.$$

Два последних уравнения можно привести к виду

$$\nabla \cdot \Big(\big(\lambda_0\, \mathfrak{N}_2^s + \mathbb{C}_1^s \otimes \widetilde{\mathbb{C}}\big) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\Big) + \hat{\varrho}\mathbf{F} = 0\,. \tag{93}$$

Теперь необходимо показать, что тензор $\mathfrak{N}_3^s$ записанный в форме

$$\mathfrak{N}_3^s = \lambda_0\, \mathfrak{N}_2^s + \mathbb{C}_1^s \otimes \widetilde{\mathbb{C}}$$

является симметричным и положительно определенным.

Используя макроскопическое уравнение неразрывности (84) для жидкой компоненты, перепишем микро- и макроскопические уравнения баланса моментов (86) и (87) как

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathbb{D}(y, \mathbf{U}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\,(\nabla_y \cdot \mathbf{U})\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}\mathbb{I} + \\ + \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)(\nabla \cdot \mathbf{w}_s)\,\mathbb{I}\Big)\Big) = 0\,. \tag{94}$$

$$\nabla \cdot \Big(\big((1-m)\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}\rangle_{Y_s})\big) + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}\rangle_{Y_s}\mathbb{I} + \\ + \Big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big)\Big)(\nabla \cdot \mathbf{w}_s)\,\mathbb{I}\Big) + \frac{1}{\lambda_0}\,\hat{\rho}\mathbf{F} = 0\,. \tag{95}$$

Подставляя в (94)

$$\mathbf{U} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbf{U}_3^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij} + \mathbf{U}_3^{(0)}(\mathbf{y})(\nabla \cdot \mathbf{w}_s)\,,$$

мы приходим к следующим периодическим краевым задачам в Y_s:

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\Big)\Big) = 0\,, \quad (96)$$

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)}) + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\mathbb{I} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\mathbb{I} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\Big)\Big) = 0\,. \quad (97)$$

Однозначная разрешимость этих задач при условиях

$$\langle\mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s} = \langle\mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} = 0$$

следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_s}\Big(\big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij}\big) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}(\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)})^2\Big)dy + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(\int_{Y_s}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}dy\Big)^2 = 0\,,$$

$$\int_{Y_s}\Big(\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)}) + \frac{c_s^2}{\lambda_0}(\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)})^2\Big)dy + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(\int_{Y_s}\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}dy\Big)^2 + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\int_{Y_s}\nabla_y \cdot \widetilde{\mathbf{U}}^0 dy = 0\,.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_3^s = (1-m)\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \Big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big)\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + \\ \sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\sum_{i,j=1}^{3}\langle\nabla\cdot\mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \\ \langle\mathbb{D}(y,\mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{I} + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla\cdot\mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\,. \quad (98)\end{aligned}$$

Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$ – произвольные симметричные матрицы

$$\boldsymbol{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_3^{(ij)}\zeta_{ij}\,, \quad \boldsymbol{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{U}_3^{(ij)}\eta_{ij}\,, \quad \boldsymbol{Y}_\zeta^0 = \mathbf{U}_3^{(0)}\operatorname{tr}\zeta\,, \quad \boldsymbol{Y}_\eta^0 = \mathbf{U}_3^{(0)}\operatorname{tr}\eta\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{N}_3^s : \zeta\big) : \eta = (1-m)\zeta : \eta + \Big((1-m)\,\frac{c_s^2}{\lambda_0} + m\,\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big)\operatorname{tr}\zeta\operatorname{tr}\eta + \\ + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\eta + \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s} : \eta + \\ + \langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta^0)\rangle_{Y_s} : \eta + \Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla\cdot\boldsymbol{Y}_\eta^0\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta\,. \quad (99)\end{aligned}$$

Симметричность тензора $\mathfrak{N}_3^s$ в форме

$$\big(\mathfrak{N}_3^s : \zeta\big) : \eta = \big(\mathfrak{N}_3^s : \eta\big) : \zeta$$

следует из равенств

$$\big(\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{ij}\big) + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \\ \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (100)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle (\nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)})^2\rangle_{Y_s} + \\ \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\big)^2 = 0\,, \quad (101)$$

$$\big(\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)})\rangle_{Y_s} : \mathbb{J}^{ij}\big) + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(ij)}\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (102)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(0)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{U}_3^{(kl)})\rangle_{Y_s} + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\, \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(0)}\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \mathbf{U}_3^{(kl)}\rangle_{Y_s}\,, \quad (103)$$

которые получаются умножением (96) и (97) на $\mathbf{U}_3^{(kl)}$ и $\mathbf{U}^{(0)}$, и интегрированием по частям.

Действительно, перепишем эти соотношения в форме

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s} : \zeta + \\ + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (104)$$

$$\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta^0) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta^0)\rangle_{Y_s} + \frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta^0\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta^0\rangle_{Y_s} + \\ + \Big(\frac{c_s^2 - c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta^0\rangle_{Y_s}\, \mathrm{tr}\, \eta + \frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\zeta^0\rangle_{Y_s}\, \langle \nabla_y \cdot \boldsymbol{Y}_\eta^0\rangle_{Y_s} = 0\,, \quad (105)$$

$$\langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta+ \\ +\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}=0\,, \quad (106)$$

$$\langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}+\Big(\frac{c_s^2-c_f^2}{\lambda_0}\Big)\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta+ \\ +\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\,, \quad (107)$$

и просуммируем равенства (99) и (104)-(107):

$$\begin{aligned}
\big(\mathfrak{N}^s_3:\zeta\big):\eta &= (1-m)\zeta:\eta+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s}:\eta+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta+\\
&+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta+\\
&+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta)\rangle_{Y_s}:\eta+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}^0_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}+\\
&+\frac{c_s^2}{\lambda_0}\Big((1-m)\operatorname{tr}\zeta\operatorname{tr}\eta+\langle\nabla\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\eta+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta+\\
&+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\eta+\\
&+\langle\nabla\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\,\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\Big)+\\
&+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\Big(m^2\operatorname{tr}\zeta\operatorname{tr}\eta-m\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\eta-m\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta+\\
&\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}-m\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\eta-\\
&-m\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}\operatorname{tr}\zeta+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\zeta\rangle_{Y_s}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\eta\rangle_{Y_s}+\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}^0_\zeta\rangle_{Y_s}\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Y}_\eta\rangle_{Y_s}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\big(\mathfrak{N}^s_3:\zeta\big):\eta=\langle\big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}})+\zeta\big):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\eta}})+\eta\big)\rangle_{Y_s}+ \\ +\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle(\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}+\operatorname{tr}\zeta)(\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\eta}}+\operatorname{tr}\eta)\rangle_{Y_s}+ \\ +\frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\rangle_{Y_s}-m\operatorname{tr}\zeta\big)\big(\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\eta}}\rangle_{Y_s}-m\operatorname{tr}\eta\big)\,, \quad (108)$$

где $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{Y}_\zeta+\boldsymbol{Y}^0_\zeta$.

Последнее соотношение показывает симметричность тензора $\mathfrak{N}^s_3$ и положительную определенность. В частности, для $\zeta=\eta$

$$(\mathfrak{N}^s_3:\zeta):\zeta=\langle\big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}})+\zeta\big):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}})+\zeta\big)\rangle_{Y_s}+ \\ +\frac{c_s^2}{\lambda_0}\langle(\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}+\operatorname{tr}\zeta)^2\rangle_{Y_s}+\frac{c_f^2}{\lambda_0}\big(\langle\nabla_y\cdot\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\zeta}}\rangle_{Y_s}-m\operatorname{tr}\zeta\big)^2\,. \quad (109)$$

Поэтому,

$$\left(\mathfrak{N}_3^s : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s)\right) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) \geqslant a_0\, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}_s),\ \ a_0 = \mathrm{const} > 0\,.$$

Литература

1. Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. Two-scale convergence // Int. J. Pure and Appl. Math. – 2002. – 2, №1. – C.35-86.
2. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – 48. – C.519-538.
3. Meirmanov A. Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. – 2008. – 19. – C.259-284.
4. Meirmanov A. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – 40. – №3. – C.1272-1289.
5. Meirmanov A. Double porosity models in incompressible poroelastic media // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – 20, №4. – C.635-659.
6. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163, №2. – C.111-172.
7. Герус А.А., Гриценко С.А. Модель акустики в конфигурации упругое тело - пороупругая среда // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2014. – №25 (196); Вып.37. – C.68-75.
8. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. – 1985. – 64. – C.31-75.

THE ISOTHERMAL ACOUSTICS: CASE LIQUID – POROELASTIC MEDIUM

A.A. Gerus, S.A. Gritsenko

Belgorod State University,

Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: artur-gerus@mail.ru; sgritsenko@bsu.edu.ru

Abstract. Processes of isothermal acoustics in composite medium with two different components are under consideration. Composite medium consists of liquid and poroelastic medium. Poroelastic medium is filled with a fluid. Solvability of initial-boundary problem in generalized form is investigated. Homogenized models are derived in various cases.

Key words: composite medium, periodic structure, Stokes' equations, Lame's equations, acoustics equations, poroelastic, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.

MSC 11S40

О НУЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С L-ФУНКЦИЯМИ ГЕККЕ МНИМЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ, КОТОРЫЕ ЛЕЖАТ НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Д.Б. Демидов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия, e-mail: demidovnext@yandex.ru

Ключевые слова: L-функции, мнимые квадратичные поля, критическая прямая, линейные комбинации, число нулей.

Получена новая нижняя оценка числа нулей на коротких промежутках для линейных комбинаций L–функциям Гекке мнимых квадратичных полей.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ на промежутке $(0,T\,]$.

В 1921 году Харди и Литтлвуд [1] доказали, что

$$N_0(T) \geq c_1\,T, \quad c_1 > 0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

В 1942 году А. Сельберг [2] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq c_2\,T\log T, \quad c_2 > 0 \text{ — абсолютная постоянная.}$$

Для арифметических рядов Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению риманова типа, но не имеющих эйлерова произведения, правильных по порядку нижних оценок для числа их нулей на отрезках критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ пока не получено.

В 1980 году С.М. Воронин [3] доказал, что

$$N_0(T,f) > c_3 T \exp\left\{\frac{\sqrt{\log\log\log\log T}}{20}\right\},$$

где $N_0(T,f)$ — число нулей ρ функции Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ таких, что $\Re\rho = \frac{1}{2}$, $0 < \Im\rho \leq T$, $c_3 > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1989 году А.А. Карацуба [4] с помощью нового метода оценок снизу числа нулей некоторых рядов Дирихле на отрезках критической прямой показал, что

$$N_0(T,f) \geq T\sqrt{\log T}\,(\log T)^{-\varepsilon},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, $T > T_0(\varepsilon) > 1$.

В 1991 году А.А. Карацуба [5] поставил и решил своим методом 1989 года задачу о нижней оценке числа нулей линейных комбинаций L–функций Дирихле на отрезке критической прямой.

В 1996 году С.А. Гриценко рассмотрел вопрос о числе $N_0(T,f)$ нулей на отрезке $[0,T]$ функции

$$f(t)=\sum_{j=1}^{N} a_j Z(t,F_j), \tag{1}$$

где a_j — произвольные вещественные числа, а $Z(t,F_j)$ — аналоги функции Харди, соответствующие функциям $F_j(s)$ из класса Сельберга степени 2 ($j=1,\dots,N$).

В [6] доказано, что при условии справедливости некоторых гипотез, являющихся гипотезами Сельберга и их слегка усиленными вариантами, справедлива оценка

$$N_0(T,f)\gg T\exp\{\sqrt{\log\log\log T}\}. \tag{2}$$

В 1997 году С.А. Гриценко [7] доказал неравенство (4) безусловно в случае, когда $F_1(s),\dots,F_N(s)$ — L–функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля.

В 2010 году И.С. Резвякова [8] применила к последней задаче метод А.А. Карацубы [3] и получила оценку

$$N_0(T,f)\gg T(\log T)^{2/h(-D)}\exp\{-c\sqrt{\log\log T}\},$$

где $h(-D)$ — порядок группы классов идеалов, $c>0$.

Мы рассмотрели задачу о нулях функции $f(t)$, определяемой равенством (3), лежащих на коротких промежутках. Основной результат изложен в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\varepsilon>0$ — произвольно малое число, $T^{15/16+5\varepsilon}\le H\le T$. Пусть $F_1(s),\dots,F_N(s)$ — L–функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля вида $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$, где p_0 — простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, а функция $f(t)$ определена равенством (3), в котором $a_1,a_2,\dots,a_N$ — произвольные вещественные числа. Пусть $N_0(T,f)$ — число нулей функции $f(t)$ на отрезке $[0,T]$.*

Тогда существует $c>0$ такое, что

$$N_0(T+H,f)-N_0(T,f)\gg H(\log T)^{2/h(p_0)}\exp\{-c\sqrt{\log\log T}\},$$

где $h(p_0)$ — число классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeroes of Riemann's zeta–function on the critical line // Math. Z. – 1921. – 10. – P.283-317.

2. Selberg A. On the zeroes of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. – 1942. – V.10.

3. Воронин С.М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – 44, №1. – С.63-91.

4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – 54, №2. – С.303-315.

5. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – 55, №.3. – С.483-514.

6. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга // Изв. РАН.Сер. матем. – 1996. – 60, №4. – С.3-42.

7. Гриценко С.А. О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с L-функций Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН.Сер. матем. – 1997. – 61, №1. – С.45-69.

8. Резвякова И.С. О нулях линейных комбинаций L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН.Сер. матем. – 2010. – 74, №6. – С.183-222.

ABOUT ZEROS OF LINEAR COMBINATIONS OF SPECIAL TYPE FUNCTIONS CONNECTED WITH HECKE'S L-FUNCTIONS OF IMAGINARY QUADRATIC FIELDS WHICH LIE IN SHORT INTERVALS OF CRITICAL STRAIGHT LINE

D.B. Demidov

Belgorod State University,

Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: demidovnext@yandex.ru

Key words: . L-functions, imagine quadratic fields, critical straight line, linear combinations, zero number.

MSC 35R30

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Н.Д. Иванова

Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Ключевые слова: обратные задачи, вырожденные уравнения, банахово пространство, ограниченные операторы.

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (является линейным непрерывным), оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в пространстве $\mathcal{X}$). Снабдим область определения D_M оператора M нормой его графика $\|\cdot\|_{D_M}$.

Рассмотрим задачу нахождения функций $x : [0,T] \to \mathcal{X}$ и $u : [0,T] \to \mathcal{U}$ из соотношений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t \in [0,T]\,, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0\,, \tag{2}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t)\,, \quad t \in [0,T]\,. \tag{3}$$

При условии сильной (L,p)-радиальности оператора M [1] имеем представление пространств в виде прямых сумм $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$. Обозначим через P и Q проекторы, действующие, соответственно, вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$ и вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$. Сужения операторов L и M на подпространства $\mathcal{X}^k$ обозначим через $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0,1$. При этом существуют обратные операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, а также сильно непрерывная полугруппа операторов $\{X(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geq 0\}$, разрешающая однородное уравнение (1).

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{U})$, $\mathcal{X}^1 \subset \ker\Phi$, $B \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $y \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $\Psi \in C^1([0,T];\mathcal{U})$, существует обратный оператор $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}$ и при этом $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B)^{-1} \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $\Phi HB(t) = 0$ при всех $t \in [0,T]$, $x_0 \in D_M$,*

$$(I-P)x_0 = M_0^{-1}(I-Q)(B(0)(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(0))^{-1}\times$$
$$\times\left(\Psi(0) + \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(0)\right) + y(0)).$$

Тогда решение $x \in C^1([0,T];\mathcal{X}) \cap C([0,T];D_M)$, $u \in C^1([0,T];\mathcal{U})$ задачи (1)–(3) существует, единственно, имеет вид

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)L_1^{-1}Q(B(s)u(s) + y(s))ds-$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}\left((I-Q)(B(t)u(t)+y(t))\right)^{(k)},$$

$$u(t) = -(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}\left(\Psi(t)+\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(t)\right)$$

и удовлетворяет условиям

$$\|x\|_{C^1([0,T];\mathfrak{X})} \le c\left(\|Px_0\|_{D_M} + \|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})} + \|y\|_{C^1([0,T];\mathfrak{Y})}\right),$$

$$\|u\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})} \le c\left(\|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathfrak{U})} + \|y\|_{C^1([0,T];\mathfrak{Y})}\right),$$

где $c > 0$ не зависит от x_0, y, Ψ.

Замечание 1. Условие $\Phi HB(t) = 0$ при всех $t \in [0,T]$ выполнено в следующих случаях:

- оператор M сильно $(L,0)$-радиален, тогда $H = 0$;
- $\mathrm{im}B(t) \subset M[\ker L]$, тогда $HB(t) \equiv 0$;
- $\mathrm{im}L_0 \subset M[\ker \Phi]$, тогда $\Phi H = 0$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T > 0$, β, $\delta \in \mathbb{R}$. Обратная задача

$$(\beta+\Delta)(v(x,0)-v_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$(1-\delta)v + \delta\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = (1-\delta)w + \delta\frac{\partial w}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{5}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + b_1(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{6}$$

$$0 = v + (\beta+\Delta)w + b_2(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{7}$$

с условиями переопределения на подпространстве вырождения

$$\int_\Omega K(y)w(y,t)dy = \psi(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{8}$$

может быть исследована в рамках задачи (1)–(3). Искомыми функциями здесь являются $v(x,t)$, $w(x,t)$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Система уравнений (6), (7) с точностью до линейной замены функций $v(x,t)$, $w(x,t)$ совпадает с линеаризацией квазистационарной системы уравнений фазового поля [2], описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода.

Литература

1. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – 12, Вып. 3. – С.173-200.

2. Плотников П.И., Клепачева А.В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. – 2001. – 42, №3. – С.651-669.

INVERSE PROBLEM FOR STRONG DEGENERATED EVOLUTION EQUATION

N.D. Ivanova

South-Ural State University,
Lenin Av., 76, Cheliabinsk, 454080, Russia, e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com

Key words: inverse problems, degenerate equations, Banach's space, bounded operators.

MSC 45A05

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ *)

В.А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, РФ, e-mail: kalitvin@gmail.com

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, частные интегралы, компактные операторы.

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^t \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s),$$

где $(t,s) \in D$, l, m, n, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, $D \times T \times [c,d]$, D соответственно функции, $T = \{\tau : a \le \tau \le t \le b\}$, $S = \{\sigma : c \le \sigma \le s \le d\}$.

Отметим, что оператор V, определяемый суммой первых трех слагаемых правой части уравнения, не является компактным в $C(D)$, если хотя бы одно из ядер $l(t,s,\tau)$ или $m(t,s,\sigma)$ принимает ненулевые значения [1].

Найти точное решение данного уравнения удается в редких случаях. Поэтому важное значение имеют численные методы построения его решений. При этом использование хорошо известных численных методов решения линейных интегральных уравнений второго рода (обоснование которых обычно использует компактность интегральных операторов [2,3]) для решения линейных уравнений с частными интегралами требует осторожности и обоснования; в частности, из-за отсутствия компактности у оператора V требуется обоснование применения метода механических квадратур.

Уравнение решается численно с применением квадратурных и кубатурной формул, изучается сходимость вычислительных процессов.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками

$$t_p = a + ph \ (p = 0,1,\dots,P,\ a + Ph \le b < (P+1)h),$$

$$s_q = c + qg \ (q = 0,1,\dots,Q,\ c + Qg \le d < (Q+1)g)$$

соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя квадратурные формулы

$$\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i,s_q) + r^l_{pq},$$

*Работа поддержана Минобрнауки России (проект № 1.4407.2011)

$$\int_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r_{pq}^m$$

и кубатурную формулу

$$\int_a^{t_p}\int_c^b n(t_p, s_q, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pq}^n,$$

где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n — остатки квадратурных и кубатурной формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках $(t_p, s_0), (t_0, s_q)$, (t_p, s_q) $(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$.

Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$$x_{00} = f(a, c),\ x_{p0} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{p0i} x_{i0} + f_{p0} + \delta_{p0},\ x_{0q} = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{0qj} x_{0j} + f_{0q} + \delta_{0q},$$

$$x_{pq} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x_{p_j} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq}$$

$(p = 1, \ldots, P;\ q = 1, \ldots, Q)$, где $f_{p0} = f(t_p, s_0)$, $f_{0q} = f(t_0, s_q)$, $f_{pq} = f(t_p, s_q)$.

Теорема. *Если r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$; существуют такие числа A, B, C, что $|\alpha_{pi}| \le A < \infty$, $|\beta_{jq}| \le B < \infty$, $|\gamma_{pqij}| \le C < \infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon > 0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ будут выполняться неравенства*

$$|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \epsilon\ (p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q),$$

а последовательность функций

$$x_{pq}(t, s) = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l(t, s, t_i) x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m(t, s, s_j) x_{pj} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q} \gamma_{pqij} n(t, s, t_i, s_j) x_{ij} + f(t, s)$$

равномерно сходится на D к решению $x(t, s)$ при $h \to 0$, $g \to 0$.

Литература

1. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 178 с.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений / М.: Наука, 1969. – 456 с.

3. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп / С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2006. – 288 с.

ABOUT NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR VOLTERRA EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

W.A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvin@mail.ru

Key words: integral Volterra equations, partial integrals, compact operators.

MSC 26D07

НЕРАВЕНСТВА ЯНГА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

А.А. Ковальчук, С.М. Ситник

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Ключевые слова: неравенство Янга, неравенство Гельдера

Оценка произведений нескольких величин в терминах суммы некоторых других величин является известной математической задачей. Подобные неравенства играют существенную роль в самой математике и многих её приложениях: математической экономике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных уравнениях, теории сигналов, оценивании сложности прикладных алгоритмов и т.д. Примером таких оценок является неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. Другим классическим примером является доказанное в 1912 г. английским математиком Вильямом Янгом знаменитое неравенство, названное впоследствии его именем. Для двух чисел в простейшем случае неравенство Янга записывается в виде

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{1}$$

при условиях $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1, x, y > 0$.

С.М. Ситником было замечено, что на самом деле неравенство Янга в традиционной формулировке — это не одно, а пара неравенств. Так как левая часть неравенства (1) симметрична, то на самом деле справедливо аналогичное второе неравенство

$$xy \leq \frac{x^q}{q} + \frac{y^p}{p}, \tag{2}$$

и поэтому возникает естественная задача о сравнении неравенств (1) и (2).

Далее без ограничения общности будем полагать, что выполнены условия

$$y \geq x, p \geq 2 \geq q > 1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3), тогда*
1. Если $y \geq x \geq 1$, то оценка (1) лучше, чем (2).
2. Если $1 \geq y \geq x \geq 0$, то оценка (2) лучше, чем (1).
3. Если $y \geq 1 \geq x \geq 0$, то возможны два варианта. При соотношении

$$y > y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

точнее неравенство (1). При соотношении

$$1 < y < y_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

при данном y существует критическое значение $x = x, 0 < x < 1$, которое является единственным решением трансцендентного уравнения

$$\frac{x^p}{p} - \frac{x^q}{q} = \frac{y^p}{p} - \frac{y^q}{q}. \tag{4}$$

В этом случае при $x \in (0, x)$ оценка (2) лучше, чем (1), а при $x \in (x, 1)$ оценка (1) лучше, чем (2).

На все рассмотренные случаи можно привести численные примеры [2-4].

Аналогичные результаты получены и для n чисел, но только в том случае, когда все числа лежат с одной стороны от единицы. Когда числа могут быть расположены с разных сторон от единицы, то результаты неизвестны даже для трёх чисел. Получены только некоторые результаты на основе компьютерных вычислений. Всего в этом случае получаем $n!$ вариантов обобщений неравенства Янга.

Теорема 2. *При условии, что выполнены неравенства $0 \le x \le y \le z \le \dots$, наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры p, q, r упорядочены по возрастанию $p \le q \le r \dots$, а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) — по убыванию.*

Теорема 3. *При условии, что выполнены неравенства $1 \le x \le y \le z \le \dots$, наилучшим (в смысле с наименьшей правой частью) из неравенств Янга будет то, в котором параметры p, q, r упорядочены по убыванию $p \ge q \ge r \dots$, а наихудшим (в смысле с наибольшей правой частью) – по возрастанию.*

Рассмотрен также случай неравенств Янга (теперь мы знаем, что их два!) с парой произвольных взаимно дополнительных функций Янга. По обычной схеме [1] можно из полученного уточнённого неравенства Янга вывести уточнённое неравенство Гёльдера (или исторически более точно: Роджерса-Гёльдера-Рисса). Результаты получаются как для дискретного, так и для интегрального случаев.

Литература

1. Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M. Classical and new inequalities in Analysis / Kluwer, 1993.

2. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy-Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey// http:arxiv.org/abs/1012.3864, 2012. – 51 p.

3. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств // В кн.: Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия «Математический форум». Том 3 / Исследования по математическому анализу. Ред. Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев / Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО Алания: Владикавказ, 2009. – С.221-266.

4. Ситник С.М. Сколько неравенств заключено в неравенстве Юнга // Труды Всероссийской заочной научно–практической конференции «Актуальные проблемы обучения математи-

ке», посвящённой 155-летию со дня рождения Андрея Петровича Киселёва / Орёл: Орловский государственный университет, 2007. – С.464-469.

WILLIAMS-YANG'S INEQUALITIES FOR SEVERAL VARIABLES

A.A. Kovalchuk, S.M. Sitnik

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Key words: Yang's inequality, Gölder's inequality.

MSC 35K55

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. Кожевникова, А.А. Леонтьев

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453100, Россия, e-mail: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Ключевые слова: параболические уравнения, неограниченные области, первая смешанная задача.

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндре $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1, n}\,. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = \overline{1, n}$, подчиняются условиям: $a(0) = 0$, $a(s) \in C^1(0, \infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2} \leq a_\alpha(s) \leq \widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2}, \quad p_1 a_\alpha(s)/2 \leq a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leq \widehat{b}a_\alpha(s), \quad \alpha = \overline{1, n}\,,$$

с положительными константами $\widehat{a} \geq \overline{a}$, $2\widehat{b} \geq p_1 > k$ $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n)$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\widehat{b} = p_n$.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения задачи (1)-(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$ от показателей нелинейности.

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространств $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам $\|u\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L_k(\Omega)}$, $\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{L_k(D^T)} + \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(D^T)}$, $\|u\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} + \|u_t\|_{L_k(D^T)}$.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *с функцией* $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *назовем функцию* $u(t, \mathbf{x})$ *такую, что при всех* $T > 0$ $u(t, \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T} \left(-|u|^{k-2}uv_t + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}v_{x_\alpha} \right) d\mathbf{x}dt = \int\limits_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0, \mathbf{x})d\mathbf{x},$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x}) = 0$.

Существование решения задачи (1)-(3) доказывается методом галеркинских приближений, который был предложен Ф.Х. Мукминовым для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщен авторами статьи на уравнения вида (1) (см. [1], [2]).

Утверждение. *Если* $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/p_n$, *то обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи (1)-(3) с ограниченной начальной функцией* $\varphi(\mathbf{x})$ *является ограниченным.*

Приведем результат об убывании для областей, расположенных вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Предполагается, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 1. *Существуют* $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b}) > 0$ *и ограниченное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *такие, что при всех* $t \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)} .$$

Для $r > 0$ введем следующие обозначения:

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} = 1\right\},$$

$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1\right\},\ \Omega^r = \{\mathbf{x} \in \Omega \ |x_s < r\}.$$

Предполагается, что выполнено условие: $\lim\limits_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0$. Иначе достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0\,.$$

Теорема 2. *Пусть* $s \in \overline{2,n}$. *Если выполнены условия:*

$$\mu_1(r) \geq C r^{-a}, \quad r > 1\,, \quad a, C > 0\,, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho) d\rho = \infty\,,$$

то существуют $M(p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}) > 0$ *и ограниченное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *такие, что для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Литература

1. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3, №4. – С.64-85.

2. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях // Уфимский математический журнал. – 2013. – 5, №1. – С.65-83.

SOLUTIONS DECREASING OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS WITH DOUBLE NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

L.M. Kozhevnikova, A.A. Leontiev

Sterlitamak department of Bashkir State University
Lenin Av., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Key words: parabolic equations, unbounded domains, first mixed problem.

MSC 35J65

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. Кожевникова, А.А. Хаджи

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак, 453100, Россия, e-mail: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

Ключевые слова: эллиптические уравнения, неограниченные области, граничные задачи, анизотропные уравнения.

Работа посвящена некоторому классу анизотропных эллиптических уравнений второго порядка, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}-|u|^{k-2}u=\Phi(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$p_n\geq ...\geq p_2\geq p_1>1,\ k>1.$$

Для него в произвольной неограниченной области $\Omega\subseteq\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\}$, $n\geq 2$, рассматривается задача Дирихле с однородным граничным условием

$$u\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Основной результат этой работы — исследование зависимости скорости убывания решения задачи (1), (2) от геометрии неограниченной области Ω и показателей нелинейности.

Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$, $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}+\|v\|_k.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *с* $\Phi(\mathbf{x})\in L_{k/(k-1)}(\Omega)$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha}v_{x_\alpha}+(|u|^{k-2}u+\Phi(\mathbf{x}))v\right\}d\mathbf{x}=0$$

для любой функции $v(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$.

И.М. Колодий [1] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. Здесь приведен результат об ограниченности решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

Теорема 1. *Пусть $u(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи* (1), (2) *и выполнены условия*

$$1 < \sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha < 1 + n/k^2, \quad k^2 - nk + n \geq 0.$$

Тогда

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega} |u(\mathbf{x})| \leq C,$$

где C — константа, зависящая от p_α, k, n, $\|\Phi\|_{k/(k-1)}$.

Двусторонние оценки, характеризующие убывание решения задачи Дирихле для анизотропных уравнений без младших членов, получены в работе [2]. Здесь приведем оценку сверху для решения уравнения (1).

Будем рассматривать неограниченные области расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$). Введем обозначения: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \,\Big|\, a < x_s < b\}$, значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Определим геометрическую характеристику неограниченной области Ω :

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{p_1,\gamma_r} \,\Big|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{p_1,\gamma_r} = 1\right\}, \quad r > 0.$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

$$\int_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty,$$

$$\operatorname{supp}\Phi(\mathbf{x}) \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0.$$

Теорема 2. *Существуют положительные числа κ, $\mathcal{M}$ такие, что для ограниченного обобщенного решения $u(\mathbf{x})$ задачи* (1), (2) *при $r > 2R_0$ справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,\Omega_r}^{p_\alpha} + \|u\|_{r,\Omega_r}^{r} \leq \mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right).$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-0081-а).

Литература

1. Колодий И.М. Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // Вестник МГУ. – 1970. – №5. – С.45-52.

2. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Вестник СамГТУ. – 2013. – 30, №1.

SOLUTIONS DECREASING OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH YOUNGER TERMS IN UNBOUNDED DOMAINS

L.M. Kozhevnikova, A.A. Khadzhi

Sterlitamak department of Bashkir State University
Lenin Av., 68, Sterlitamak, 453103, Russia, e-mail: kosul@mail.ru, anna_5955@mail.ru

Key words: elliptic equations, unbounded domains, boundary problems, anisotropic equations.

MSC 35J60

ГЛАДКОСТЬ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Н. Конёнков

Рязанский государственный университет,
ул. Свободы, 46, Рязань, 390000, Россия, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

Ключевые слова: потенциал простого слоя, параболические уравнения, эллиптические уравнения, анизотропное пространство Гельдера.

В слое $D = R^n \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv u_t - a_{ij}(x,t)u_{ij} - b_i(x,t)u_i - c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

вещественнозначные коэффициенты которого удовлетворяют условию равномерной параболичности

$$(\exists\, \delta_0 > 0)\ (\forall P \in \bar{D},\ \forall \xi \in R^n) \quad a_{ij}(P)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \tag{2}$$

и принадлежат анизотропным пространствам Гельдера:

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\bar{D}), \quad \alpha \in (0,1). \tag{3}$$

Для области $\Omega \subset D$ с компактной «боковой» границей $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ и функции ψ рассматриваем модифицированный потенциал простого слоя

$$\hat{U}\varphi(P) = \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} \Gamma(x,t,y,\tau)\psi(y,\tau)\varphi(y,\tau)\, ds d\tau, \quad \Sigma_\tau = \Sigma \cap \{t = \tau\}, \tag{4}$$

где $\Gamma(x,t,y,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1). При $\psi \equiv 1$ получается потенциал простого слоя $U\varphi$.

Обозначим через $\underset{\circ}{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ пространство с нормой

$$|f;\Omega|^{(k,\alpha)} = ||f;\Omega||^{(k,\alpha)} + \sup_{(x,t)\in\Omega} t^{-(k+\alpha)/2}|f(x,t)|,$$

где $||f;\Omega||^{(k,\alpha)}$ — норма в пространстве $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Если $\varphi \in \underset{\circ}{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\Sigma \in C^{1,\alpha}$, то потенциал простого слоя $U\varphi \in \underset{\circ}{C}^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ [1]. При этом $U\varphi$ не будет, вообще говоря, принадлежать $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Исследуется вопрос о принадлежности потенциала (4) анизотропному пространству Гельдера $\underset{\circ}{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ при условии, что «боковая» граница области принадлежит лишь классу $C^{1,\alpha}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), $\Sigma \in C^{1,\alpha}$ компактна. Тогда существует положительная функция*

$$\psi \in C^{0,\alpha}(\Sigma), \qquad (\exists\, \delta > 0)\ \psi(P) \geq \delta > 0 \quad \forall\, P \in \Sigma,$$

такая, что модифицированный потенциал простого слоя является ограниченным оператором из $\underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma)$ в $\underset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, т.е.

$$\hat{U}\varphi(P) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\ \forall\, \varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

причем

$$(\exists\, C > 0) \quad \forall \varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad |\hat{U}\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \leq C|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Функция ψ определяется неоднозначно (с точностью до множителя — не обращающейся в нуль функции из класса $C^{1,\alpha}(\Sigma)$). Если «боковая» граница области Ω более гладкая, то одну из таких функций ψ можно указать явно:

Теорема 2. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (2) и (3), область Ω — цилиндрическая, $\Sigma \in C^{2,\alpha}$ компактна. Тогда для $\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\nu_i\nu_j$, где $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — внутренняя единичная нормаль к сечению Σ_t,*

$$\hat{U}\varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0) \quad \forall \varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad C_1|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)} \leq |\hat{U}\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \leq C_2|\varphi; \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Если старшие коэффициенты параболического оператора L принадлежат $C^{1,\alpha}(\bar{D})$, то $a[\nu] \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ и для самого потенциала простого слоя мы получаем

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $a_{ij}|_{\Sigma} \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда потенциал простого слоя*

$$U\varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow \varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma),$$

$$(\exists\, C_1, C_2 > 0) \quad \forall \varphi \in \underset{\circ}{C}{}^{1,\alpha}(\Sigma) \quad C_1|\varphi, \Sigma|^{(1,\alpha)} \leq |U\varphi, \Omega|^{(2,\alpha)} \leq C_2|\varphi, \Sigma|^{(1,\alpha)}.$$

Используя представление эллиптического потенциала простого слоя с помощью параболических потенциалов [2], получены аналогичные утверждения для потенциала простого слоя, ядром которого является главное фундаментальное решение [3] для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Литература

1. Бадерко Е.А. О гладкости 2m-параболического потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. – 1990. – 26, № 1. – С.3-10.

2. Конёнков А.Н. О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. – 2002. – 38, № 2. – С.247-256.

3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / М.: ИЛ, 1957.

FLEXIBILITY OF HIGHEST DERIVATIVES OF SIMPLE LAYER POTENTIAL OF PARABOLIC AND ELLIPTIC EQUATIONS OF SECOND ORDER

A.N. Konenkov

Ryazan State University,
Svobody Str., 46, Ryazan, 390000, Russia, e-mail: a.konenkov@rsu.edu.ru

Key words: simple layer potential, parabolic equations, elliptic equations, anisotropic Gölder space.

MSC 35J25

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПЛОХИМИ УСЛОВИЯМИ СОГЛАСОВАНИЯ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская

Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11, Минск, Беларусь, e-mail: Korzyuk@bsu.by
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, e-mail: Kozlovskaja@bsu.by

Ключевые слова: классические решения, условия согласования, граничные задачи, дифференцируемость.

В последнее время при математическом моделировании в различных областях науки широко используются численные методы, при этом ослабло внимание к аналитическим исследованиям поставленных задач. Численные методы чаще всего базируются на предположениях существования классических решений этих задач, однако при одних и тех же выбранных граничных условиях без правильного выбора функций в этих условиях, удовлетворяющих так называемым условиям согласования, не будет существовать классического решения рассматриваемой задачи: решение не будет иметь ту гладкость во всей области его определения, которую предполагает применяемый в данном случае численный метод. Показывается влияние кроме правильного выбора граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными условий согласования для функций, которые задаются в качестве граничных условий.

В частности, на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе, доказывается, что решение или его производные терпят разрыв на определенном множестве внутри области задания уравнения, если отсутствуют полностью или частично условия согласования на заданные функции в граничных условиях и правую часть уравнения.

В области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается волновое уравнение

$$(\partial_{tt} - a^2 \partial_{xx}) u(y, x) = f(t, x), \ (t, x) \in Q, \tag{1}$$

где a^2 – положительное действительное число, $\partial_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – частные производные по t и x второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются начальные и граничные условия

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \ x \in [0, l], \tag{2}$$

$$u(t, 0) = \mu^{(1)}(t), \quad u(t, l) = \mu^{(2)}(t), \ t \in [0, \infty), \tag{3}$$

Функции φ, ψ, $\mu^{(i)}$, $i = 1, 2$, f удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\varphi(0) - \mu^{(1)}(0) = \delta^{(1)}, \quad \psi(0) - \mu^{(1)\prime}(0) = \delta^{(2)}, \quad \mu^{(1)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(0) - f(0,0) = \delta^{(3)}, \tag{4}$$

$$\varphi(l) - \mu^{(2)}(0) = \sigma^{(1)}, \quad \psi(l) - \mu^{(2)\prime}(0) = \sigma^{(2)}, \quad \mu^{(2)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(l) - f(0,l) = \sigma^{(3)}, \tag{5}$$

где $\mu^{(i)\prime}$ и $\mu^{(i)\prime\prime}$ – производные функций $\mu^{(i)}$ первого и второго порядков, $i = 1, 2$, φ'' – производная второго порядка функции φ.

Отметим, что классическое решение задачи (1)-(3) получено в статьях [1,2] при некоторых более жестких условиях согласования. Кроме доказательства нарушения гладкости решения задачи (1)-(3) при невыполнении частично или полностью условий согласования (4), (5) построено по несколько другой схеме в отличие от [1, 2] классическое решение задачи (1)-(5).

Сначала рассмотрим однородное уравнение (**??**), т.е. уравнение

$$(\partial_{tt} - a^2\partial_{xx})u(y,x) = 0, \ (t,x) \in Q, \tag{6}$$

Согласно [3, 4] общее решение уравнения (1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы

$$u(t,x) = g^{(1)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) \tag{7}$$

для любых функций $g^{(i)} : D\left(g^{(i)}\right) \ni z \to g^{(i)}(z) \in \mathbb{R}$ из класса C^2, где области определения $D\left(g^{(1)}\right) = (-\infty, l]$, $D\left(g^{(2)}\right) = [0, \infty)$ и значения $g^{(i)}\left(x + (-1)^i t\right)$ определяются для любых $(t,x) \in \overline{Q}$, $\overline{Q}$ – замыкание области Q. Здесь для определенности считаем число $a > 0$.

Решение задачи (6),(**??**), (**??**) заключается в определении функций $g^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ через заданные функции. Это делается поэтапно. В работе также построено классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с интегральными по времени граничными условиями специального вида, имеющим определенный физический смысл. Решение получено с помощью метода характеристик, предполагающего разбиение области на подобласти и решение своей начально-краевой задачи в каждой из подобластей.

В области $\Omega = \{0 < t < \infty, 0 < x < l\}$ требуется определить функцию $u(x,t) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{6}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = c_1 \int\limits_0^t \left.\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + g_1(t), \quad t \ge 0, \tag{8}$$

$$u(x,t)|_{x=l} = c_2 \int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=l} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + g_2(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

где $\varphi(x) \in C^2(0 \leq x \leq l)$, $\psi(x) \in C^1(0 \leq x \leq l)$, $g_1(t) \in C^2(0 \leq t < \infty)$, $g_2(t) \in C^2(0 \leq t < \infty)$, $a = \text{const}$, $a > 0$, $c_1 = \text{const}$, $c_1 > 0$, $c_2 = \text{const}$, $c_2 > 0$.

Литература

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – 53, № 1. – С.45-49.

2. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2009. – 17, № 2. – С.23-34.

3. Корзюк В.И. Уравнения математической физики / Минск: Издательский центр БГУ, 2011. – 460 с.

4. Корзюк В.И., Козловская И.С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных // Дифференциальные уравнения. – 2012. – 48, № 5. – С.700-709.

CLASSICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEMS WITH BAD CONDITIONS OF GIVEN FUNCTIONS CONSISTENCY

V.I. Korzyuk, I.S. Kozlovskaya

Belarus State University,
Nezavisimosty Av., 4, Minsk, Belarus, e-mail: Korzyuk@bsu.by

Key words: classical solutions, consistency conditions, boundary problems, differentiability.

MSC 26A33

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ПРОДОЛЖЕНИЕМ ПО СТАРШИМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

М.В. Кукушкин

Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, 89, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: kukushkinmv@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается вариант метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для краевой задачи для уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Изучается близость точного решения к приближённому в варианте метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам.

Ключевые слова: дробные интегралы, метод фиктивных областей, задача Дирихле.

Обоснование метода фиктивных областей на дифференциальном уровне для задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в варианте с продолжением по старшим и младшим коэффициентам рассмотрено в работе А.Н. Бугрова [1], где получены неулучшаемые по порядку ε оценки для $u(x)-u_\varepsilon(x)$. Отметим также работы: [2], В.Я. Ривкинда [3,4], В.Д. Копченова [5], А.Н. Коновалова [6], С.А. Войцеховского [7]. Вторая и третья краевые задачи для эллиптических уравнений рассмотрены в работах Л.А. Руховца [8], В.Д. Копченова [9], А.Н. Бугрова [1], Г.П. Астраханцева [10]. В работах Л.А. Руховца [11], А.Д. Ляшко, М.М. Карчевского, Н.Н. Саримова [12] дается обоснование метода фиктивных областей для видоизмененной задачи Дирихле [13] для эллиптических уравнений в многосвязной области. Некоторые квазилинейные эллиптические уравнения рассмотрены в работах С.А. Войцеховского [14,15], В.Н. Новиченкого [16].

Результатом настоящей работы является обоснование метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для задачи Дирихле для уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах для области звездного типа. Разрешается вопрос единственности решения задачи в области звездного типа при условии, когда младшие коэффициенты допускают расширения из некоторого класса функций.

Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать: $i,j=1,2,...,n.,\ \alpha_i\in(0,1)$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения

$$\Omega=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E^n\,,\ a<x_i<b\,,\ i=1,2,...,n\}\,,$$

$$\langle f,g\rangle_0\equiv\langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx,\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}\,,$$

$$I^\alpha_{b-}(L_1)=\{f(x):f(x)=D^{-\alpha}_{bx}\varphi(t),\ \varphi(x)\in L_1(a,b)\}\,.$$

Пусть $G \subseteq \Omega$ ограниченная односвязная область звездного типа, с достаточно гладкой границей ∂G, в $\bar{G}$ определен дифференциальный оператор второго порядка с дробной производной в младших членах действующий из пространства $W_2^l(G)$, $l \geq [\frac{n}{2}] + 2$

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_{x_i}[a_{ij}(x)\mathcal{D}_{x_j}u(x)] - \sum_{i=1}^{n} c_i(x) D_{ax_i}^{\alpha_i} u, \quad x \in \bar{G}\,, \tag{1}$$

$$r_1 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\gamma_i\gamma_j \leq r_2 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2\,, \quad 0 < r_1 \leq r_2\,, \tag{2}$$

$$a_{ji}(x) \in W_2^1(G)\,, \tag{3}$$

коэффициенты $c_i(x)$- сужения на $\bar{G}$ функций $\omega_i(x)$ из $\bar{\Omega}$, удовлетворяющих условиям

$$\omega_i(x) \equiv \omega_i(x_i) \in I_{b-}^{\alpha}(L_1),\ \varphi_i(x_i) \geq 0\,.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f(x) \in L_2(G)\,, \tag{4}$$

$$u(x) \in W_2^l(G),\ u(\partial G) = 0\,. \tag{5}$$

Рассмотрим вариант метода фиктивных областей для задачи (4),(5) с продолжением по старшим коэффициентам. Фиктивной областью будем полагать: $G_0 = \bar{\Omega} \setminus \bar{G}$. Приближенное решение $u_\varepsilon(x)$ найдем из решения краевой задачи

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_{x_i}[a_{ij}^{\varepsilon}(x)\mathcal{D}_{x_j}u_\varepsilon(x)] - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) D_{ax_i}^{\alpha_i} u_\varepsilon = f^{\varepsilon}(x), \quad x \in \bar{\Omega}\,, \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(x) \in W_2^l(\Omega),\ u_\varepsilon(\partial\Omega) = 0 \tag{7}$$

на общей границе Γ областей G и G_0 ($\Gamma = \partial G \bigcap \partial G_0$) выполнены условия сопряжения

$$[u_\varepsilon(x)] = 0,\ \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}u_\varepsilon(x)\right] = 0, \tag{8}$$

где ν внешняя относительно G нормаль к Γ, а $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе границы Γ

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x)\,, & x \in \bar{G}\,, \\ \delta_{ij}\varepsilon^{-2}\,, & x \in G_0\,. \end{cases} \tag{9}$$

Правая часть уравнения (6) берется в виде

$$f^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in \bar{G}\,, \\ 0\,, & x \in G_0\,. \end{cases} \tag{11}$$

С целью получения оценки близости решения задачи (6)-(8) к решению исходной задачи (4)-(5), продолжим $u(x)$ в G_0, положив $u(x) = 0,\ x \in G_0$. Рассмотрим разность

$$\sigma(x) = u(x) - u_\varepsilon(x)\,. \tag{12}$$

Согласно (4)–(7) имеем

$$L_\varepsilon \sigma = 0,\ x \in \bar{\Omega}\,, \tag{13}$$

$$\sigma(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\,. \tag{14}$$

По условиям (8) с учетом выбранного продолжения $u(x)$ в G_0 на Γ для $\sigma(x)$ имеем

$$[\sigma(x)] = 0,\ \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)\right] = \theta(x)\,, \tag{15}$$

где

$$\theta(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}u(x),\ x \in \Gamma\,.$$

Уравнение (13) умножим на $\sigma(x)$, и проинтегрируем его по Ω. Тогда с учетом условий сопряжения (15) и граничных условий (14) будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} L_\varepsilon\sigma(x)dx = \int\limits_{G} L_\varepsilon\sigma(x)dx + \int\limits_{G_0} L_\varepsilon\sigma(x)dx = -\int\limits_{G}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx-$$

$$-\varepsilon^{-2}\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx + \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(-\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx - \int\limits_{\Omega}\sigma(x)\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)D_{ax_i}^{\alpha_i}\sigma dx\,.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx + \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\cos(-\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(\nu, x_i)\mathcal{D}_{x_j}u(x)dx = \int\limits_{\Gamma}\sigma(x)\theta(x)dx\,,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\sigma(x)\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)D_{ax_i}^{\alpha_i}\sigma dx + \varepsilon^{-2}\int\limits_{G_0}\sum_{i=1}^{n}|\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2dx+$$

$$+\int\limits_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(x)\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)\mathcal{D}_{x_j}\sigma(x)dx = \int\limits_\Gamma \sigma(x)\theta(x)dx\,. \tag{16}$$

Заметим, что согласно сделанным предположениям относительно $\sigma(x)$, $\omega_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n.$, $x \in \bar{\Omega}$, из [17, стр.46] и из рассуждений в ходе доказательства теоремы 1 [18], следует, что первое слагаемое в левой части (16) неотрицательно. Оценим второе слагаемое в (16). Учитывая неотрицательность всех слагаемых левой части и применив неравенство Коши-Буняковского к правой части (16), будем иметь

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{G_0} \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx \le \left(\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Gamma |\theta(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Используя первое неравенство Эрлинга [19,20], получим

$$\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2 dx \le C_1 \left(\int\limits_{G_0} |\sigma(x)|^2 dx + \int\limits_{G_0} \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx\right). \tag{18}$$

Заметим, что для функций, равных нулю на части границы области G_0, имеет место частный случай неравенства Фридрихса [21]

$$\int\limits_{G_0} |\sigma(x)|^2 dx \le C_2 \int\limits_{G_0} \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx\,. \tag{19}$$

Тогда, согласно (18) и (19), будем иметь

$$\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2 dx \le C_3 \int\limits_{G_0} \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx\,. \tag{20}$$

Объединяя (17) и (20), получим

$$\int\limits_{G_0} \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx \le \varepsilon^4 C_3 \int\limits_\Gamma |\theta(x)|^2 dx = \varepsilon^4 C_4\,. \tag{21}$$

Из (19) и (21) следует

$$\int\limits_{G_0} |\sigma(x)|^2 dx \le \varepsilon^4 C_5\,. \tag{22}$$

Для оценки $\sigma(x)$ в G используем равенство (16) и условие (2), тогда аналогично (17) получим

$$r_1 \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx \le \left(\int\limits_\Gamma |\sigma(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Gamma |\theta(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Из (20),(21),(23) следует

$$\int\limits_G \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{D}_{x_i}\sigma(x)|^2 dx \le \varepsilon^2 C_6 \,. \tag{24}$$

Учитывая, что $\sigma(x) = 0,\ x \in \partial G \setminus \Gamma$, из (19), (24) следует

$$\int\limits_G |\sigma(x)|^2 dx \le \varepsilon^2 C_7 \,, \tag{25}$$

и теперь из (24),(25) следует оценка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(G)} \le \varepsilon C_8 \,. \tag{26}$$

Таким образом, установлена близость $u_\varepsilon(x)$ и $u(x)$ в смысле метрики, порождаемой нормой пространства $W_2^1(G)$.

Заметим, что, в силу теоремы 2 [18], имеет место энергетическое неравенство

$$\|L_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \ge C\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \,, \tag{27}$$

которое дает непрерывную зависимость сильного решения от правой части (6). Учитывая в следствии (27) единственность решения задачи (6),(7), из (26) в силу неравенства треугольника следует единственность решения задачи (4)-(5).

Литература

1. Бугров А.Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа // Численые методы решения задач теории упругости и пластичности. Ч.2 / Новосибирск, 1978. –С.24-35.
2. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1991.
3. Ривкинд В.Я. Об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и об одном численом методе решения задачи Дирихле // Докл.АН СССР. – 1963. – 149;6. – С.1264-1267.
4. Ривкинд В.Я. Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. Физика. – 1964. – 3. – С.37-52.
5. Копченов В.Д. Приближенное решение задачи Дирихле методом фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. – 1968. – 4;1. – С.151-164.
6. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики / Новосибирск, 1975. – С.191-199.
7. Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка // 1981. – Деп. в ВИНИТИ. – 2455-81.
8. Руховец Л.А. Замечание к методу фиктивных областей // Дифференциальные уравнения. –1967. – 3;4. – С.698-701.

9. Копченов В.Д. Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач // Труды МИ АН СССР. – 1974. – 131. – С.119-127.
10. Астраханцев Г.П. Метод фиктивных областей для эллиптических уравнений второго порядка с естественными граничными условиями // ЖВМ и МФ. – 1978. – 18;1. – С.118-125.
11. Руховец Л.А. Метод фиктивных областей в задачах об установившихся ветровых течениях // Численные методы механики сплошной среды. – 1981. – 12;2. – С.98-116.
12. Карчевский М.М., Саримов Н.Н. Метод фиктивных областей для одной задачи теории смазки подшибников скольжения // Сеточные методы решения задач математической физики. – Казань, 1984. – С.75-80.
13. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Физматгиз, 1962.
14. Войцеховский С.А.Метод фиктивных областей для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – 56. – С.7-14.
15. Войцеховский С.А. Метод фиктивных областей для одного класса нелинейных краевых задач // Вычислительная и прикладная математика. – 1986. – 58. – С.16-19.
16. Новиченко В.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительная и прикладная математика. – 1985. – 57. – С.39-42.
17. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. / М.: Физматлит, 2003.
18. Кукушкин М.В. Полусильное решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной в младших членах // Доклады АМАН (в печати).
19. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. / М.: Наука, 1976.
20. Морен К. Методы гильбертого пространства. / М.: Мир, 1965.
21. Ректорнс К. Вариационные методы в математической физике и технике. / М.: Мир, 1985.

FICTITIOUS DOMAINS METHOD WITH CONTINUATION WITH RESPECT TO LEADING COEFFICIENTS FOR NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES IN LOWER TERMS

M.V. Kukushkin

Institute of Applied Mathematics And Automation,
Shortanova St., 53, Nalchik, 360000, Russia, e-mail: kukushkinmv@rambler.ru

Abstract. A variant of fictitious domains method is under consideration with continuation with respect to leading coefficients. It is applied for numerical solution of boundary-value problem for the second order differential equation with fractional derivatives in lower terms. The result is proved on proximity of exact and numerical solutions.

Key words: fractional integrals, fictitious domain method, Dirichlet's problem.

MSC 11P99

БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Ключевые слова: бинарные аддитивные задачи, квадратичные формы, мнимое квадратичное поле, ряды Дирихле.

Рассматривается задача получения асимптотических формул для числа решений уравнения с квадратичными формами, родственная проблеме делителей Ингама.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_1(\overline{m})$ и $Q_2(\overline{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 и A_2, $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$.

Теорема 1. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $n, h \in N$, $h \le n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{3/4+\varepsilon}).$$

$G_i(q,l,\overline{0}) = \sum\limits_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ $(i = 1, 2)$ *— двойные суммы Гаусса.*

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценки А. Вейля [1] для суммы Клоостермана.

Остаточный член асимптотической формулы в теореме 1 можно улучшить, используя оценку Х.Иванца [2] для суммы сумм Клоостермана.

Теорема 2. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $2 \nmid \delta_F$, h – натуральное число, такое, что $\delta_F \mid h$, $h \le n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{Q_1(\overline{m})-Q_2(\overline{k})=h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m})+Q_2(\overline{k})}{n}} = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|}\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0}) + O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

В случае, когда квадратичные формы $Q_1(\overline{m})$, $Q_2(\overline{k})$ принадлежат одному классу, условие $2 \nmid \delta_F$ в формулировке теоремы 2 можно снять. В частности, справедлива

Теорема 3. *Пусть ε — произвольное положительное число, $n \in N$, h — натуральное число, такое, что $4 \mid h$, $h \ll n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{m_1^2+m_2^2-k_1^2-k_2^2=h} e^{-\frac{m_1^2+m_2^2+k_1^2+k_2^2}{n}} = \frac{\pi^2 n}{2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} S^2(q,l,0) S^2(q,-l,0) + O(n^{7/12+\varepsilon}),$$

где $S(q,l,0) = \sum\limits_{s=1}^{q} \exp(2\pi i l s^2/q)$ — сумма Гаусса.

Вторым основным результатом являются асимптотические формулы дробных моментов некоторых рядов Дирихле.

Теорема 4. *Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\ln T} \le \sigma < 1$ справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\sigma-1/2)^{-1/m^2} e^{-0,1\Phi(T)}\right),$$

где $d_k(n)$ – коэффициенты разложения функции $\zeta^k(s)$ в степенной ряд.

Наша формула справедлива при весьма близких к $1/2$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение результата И.Ш. Джаббарова [3].

В 1989 году А. Сельберг [4] определил класс рядов Дирихле $L(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, $(\Re s > 1)$ удовлетворяющих некоторым условиям и высказал ряд гипотез.

Получение асимптотических формул для моментов функций Сельберга представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 5. *Пусть $\sum\limits_{n \le x} |a(n)|^2 n^{-1} = \log x + O(1)$, где $a(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $L(s)$ степени 2. Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \le \sigma < 1$ справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_T^{2T} |L(\sigma+it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_{1/m}(n) a(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(T e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Литература

1. Estermann T. On Kloostermann's sum // Mathematika. – 1961. – №8. – P.83-86.

2. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – №70. – P.219-288.

3. Джаббаров И.Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. – 1985. – 38(4). – С.481-493.

4. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno. – 1992. – P.365-387.

BINARY ADDITIVE PROBLEMS WITH QUADRATIC FORMS

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Key words: binary additive problems, quadratic forms, imagine quadratic field, Dirichlet's series.

MSC 34M99

ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ

М.Х. Нуман Эльшейх

Ключевые слова: операторы Лапласа, уравнение Шредингера, граф, компактный носитель, самосопряженные расширения.

В сообщении рассматриваются операторы Лапласа на графах с конечным или счётным числом рёбер. Работа является продолжением исследований [2], в которых изучался граф с конечным множеством ребер. Даётся описание самосопряжённых расширений симметрического оператора, изначально заданного на гладких финитных функциях, носитель которых не содержит точек ветвления.

Граф с одной вершиной. Граф Γ мы определяем как объединение n экземпляров полупрямых $\Gamma_j = [0, +\infty)$, $j = 0, \ldots, n$ с общим началом Q, называемым вершиной графа. Предполагается, что на Γ задана Борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую полупрямую Γ_j совпадало со стандартной мерой Лебега, тогда $L_2(\Gamma) = \oplus L_2(\Gamma_j)$. Пусть $C_0^\infty(\Gamma)$ – векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точки Q, и $L_0 = \oplus L_0^j$ – линейный оператор, определяемый на $C_0^\infty(\Gamma)$, соотношением $L_0 u = \{L_0^j u_j\}$, $L_0^j u_j = \dfrac{1}{m_j}\Delta_j u_j + iB_j(x)\dfrac{\partial u_j}{\partial x} + i\dfrac{\partial(B_j(x)u_j)}{\partial x} + C_j(x)u_j$. Здесь $\{u_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ -– сужения функции u на полупрямые Γ_j. Предполагается, что при всех j числа $m_j > 0$ и функции $B_j(x)$, $C_j(x)$ вещественнозначны, ограничены и непрерывно дифференцируемы на полупрямой Γ_j. Через b_j обозначим предельное значение функции $B_j(0)$ в точке Q. Оператор L_0 с областью определения $D(L_0) = C_{0,0}^\infty(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(L_0^*)$ сопряжённого оператора L_0^* является линейное подпространство $D(L_0^*) = \oplus_{j=1}^n W_2^2(P_j) := W_2^2(\Gamma) \subset H$. Сужения всякой функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ на полупрямые P_j, $j = 1, \ldots, n$ обладают граничными значениями в вершине, которые обозначим через $u_j(0)$, где символ $u(0)$ означает $u(0) = (u_1(0)u_2(0)\ldots u_n(0))^T \in C_n$. Это то же верно для первых производных этих сужений, для них используем аналогичные обозначения.

Теорема фон Неймана (см. [1]) предоставляет описание множества самосопряжённых расширений симметрического оператора. Нами получено явное описание множества самосопряжённых расширений оператора L_0 в терминах условий на линейные подпространства в пространстве граничных значений $G = \frac{D(L_0^*)}{D(L_0)} = \{(u(0), u'(0))\} = C_{2n}$.

Теорема 1. *Пусть $m = 1$, $B(x) = 0$ и $C(x) = 0$. Оператор L с областью определения $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ самосопряжен тогда и только тогда когда матрица A удовлетворяет равенству $A = A^*$.*

□ Если $u \in D(L_0)$ и $v \in D(L_0^*)$, то справедливо равенство

$$(L_0 u, v)_H - (u, L_0^* v)_H = \big((u(0))^T, \overline{v'}(0)\big)_{C_n} - \big((u'(0))^T, \overline{v}(0)\big)_{C_n} = 0.$$

Следовательно $(L_0u, v)_H - (u, L_0^*v)_H = \left[\overline{v'}(0) - A^T\overline{v}(0)\right](u(0))^T = 0$.

Следы $(u(0))^T$ принимают произвольные значения, поэтому равенство $v'(0) = A^*v(0)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(L_0^*)$, что и доказывает теорему 1. ■

Следствие 1. *Если* $M = \mathrm{diag}\frac{1}{m_k}$, $k = 1, \ldots, n$, $C = (c_{i,j})$, *где* $c_{i,j} \in L_\infty(\Gamma)$ *и* $B = \mathrm{diag}b_k$, *то оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, *самосопряжен тогда и только тогда когда матрица* A, M *и* B *удовлетворяет равенству* $A = M^{-1}A^*M - 2iM^{-1}B$.

Граф с несколькиим вершинами. Пусть граф Γ представляет собой набор из n вершин $Q_1, \ldots, Q_n$, из каждой из которых исходит r_j, $r_j \in \mathrm{N}$ ребер Γ_j^i, представляющих собой либо бесконечные полупрямые, либо отрезки, соединяющие вершину Q_j с другими вершинами. Сохраним обозначения предыдущего раздела. Введем операторы L_0, L_0^* и пространство граничных значений функций из $D(L_0^*)$ и их производных, линейно изоморфное пространству C_{2m}, где $m = r_1 + \ldots + r_n$. Через $u(Q_j)$ обозначим совокупность предельных значений функции по ребрам, входящим в точку Q_j, а через $u(0)$ обозначим m–мерный вектор $(u(Q_1)\ldots u(Q_n)^T$, для вектора предельных значений производной $u'(0)$ используем аналогичные обозначения.

Теорема 2. *Пусть* $m = 1$, $B(x) = 0$ *и* $C(x) = 0$. *Оператор* L *с областью определения* $D(L) = \left\{u \in W_2^2(\Gamma) : \begin{pmatrix} u'(Q_1) \\ \vdots \\ u'(Q_n) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(Q_1) \\ \vdots \\ u(Q_n) \end{pmatrix}\right\}$, *где* A – *матрица размерности* $2m \times 2m$, *самосопряжен тогда и только тогда когда матрица* A *удовлетворяет равенству* $A = A^*$.

Граф с одной вершиной и со счётным множеством лучей. Обозначим через μ – счётно аддитивную вероятностную меру на N такую, что $\mu(k) = \mu_k > 0$, и $L_2(N, 2^N, \mu, \mathrm{C})$ – гильбертово пространство граничных значений с нормой $\|\{u_n\}\|^2 = \int_N |u_n|^2 d\mu(n) = \sum_{k=1}^\infty |u_n|^2\mu(k)$. Сужения всякой функции на полупрямую обладают граничными значениями в вершине: $u(0) = (u_1(0)\ldots u_n(0)\ldots)^T \in L_{2,\mu}$. Это то же верно для первых производных этих сужений $u'(0)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu_k = 1$, $m = 1$, $B(x) = 0$ *и* $C(x) = 0$. *Оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, *самосопряжен тогда и только тогда когда оператор* A *самосопряжен в пространстве* L_2.

Следствие 3. *Если* $\mu_k \in L_1$, $b_k \in L_\infty$, E, B – *операторы в пространстве* $L_2(N, 2^N, \mu, \mathrm{C})$, *заданные диагональными матрицами с числами* μ_k, b_k *на диагонали,* $C = (c_{ij})$,*где* $c_{ij} \in L_\infty(\Gamma)$. *Тогда оператор* L *с областью определения* $D(L) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$, *самосопряжен тогда и только тогда когда выполняется* $A = E^{-1}A^*E - 2iB$.

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики «Функциональный анализ». Т.1 / М.: Мир, 1977.

2. Сакбаев В., Смолянов О. Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения / ДАН. – 2010. – 433:3. – С.314-317.

LAPLACE OPERATORS OF SCHRÖDINGER EQUATION ON GRAPHS

M.H. Numan El'sheikh

Key words: Laplace's operators, Schrödinger's equation, graph, compact support, self-conjugate extensions.

MSC 26A33

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАМЯТЬЮ

Е.Н. Огородников

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Ключевые слова: динамические системы, задача Коши, память, вектор-функции, дробные производные.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$(ED_{0t}^{\alpha} - GD_{0t}^{\beta})(\dot{x} - Ax - f) = g(t), \tag{1}$$

где G, A — постоянные действительные. а E — единичная $[n \times n]$-матрицы ($n \in \mathbb{N}$); $x = x(t)$ — $[n \times 1]$-вектор искомых, а $f = f(t)$ и $g = g(t)$ — $[n \times 1]$-векторы заданных функций, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $t \in [0, T]$ ($T > 0$); $D_{0t}^{\alpha}u = (D_{0t}^{\alpha}u)(t)$ и $D_{0t}^{\beta}u = (D_{0t}^{\beta}u)(t)$ — левосторонние дробные производные Римана-Лиувилля вектор-функции $u = u(t)$ порядков $\alpha > \beta \geq 0$ соответственно [1],[2]. Поводом для изучения систем уравнений подобного типа послужили аналогичные примеры скалярных дифференциальных уравнений, возникающие в задачах математического моделирования дробных осцилляторов, конструктивной основой которых в рамках принятых механических аналогий являлась гипотеза о наличии в динамической системе неидеальной вязко-упругой связи, описываемой дробным аналогом некоторых реологических моделей типа Кельвина, Зенера и др. [3].

Пусть $\alpha > \beta \geq 0 : \alpha \in (n-1, n], \beta \in (m-1, m]$, где $m \leq n$ ($n, m \in \mathbb{N}$). Вводится класс вектор-функций

$$L_G^{\alpha,\beta}(0,T) = \{u(t) : u(t) \in L(0,T), I_{0t}^{n-\alpha}u \in AC^{n-m}[0,T], \\ (D_{0t}^{\alpha-m} - GI_{0t}^{m-\beta})u \in AC^{m}[0,T]\}.$$

Далее вводится вектор-функция $u(t) = \dot{x}(t) - Ax(t) - f(t)$, относительно которой обосновывается корректность постановки предварительной задачи типа Коши в классе вектор-функций $L_G^{\alpha,\beta}(0,T)$ для системы уравнений (1) с условиями

$$\lim_{t\to 0+}(D_{0t}^{\alpha-k} - GD_{0t}^{\beta-k})u = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-m-j}u = a_{m+j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-m, \tag{3}$$

где a_k ($k = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, n-m$) — заданные $[n \times 1]$-векторы.

Отмечается, что для $\beta < \alpha : \alpha - s \leq \beta < \alpha - s + 1$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) начальное условие (3) можно заменить локальным весовым условием $\lim\limits_{t\to 0+}[t^{n-\alpha}u(t)]^{(k)} = b_{n-k}$, $k =$

$0, 1, \ldots, s-1$. Решение начальной задачи (2), (3) удается найти в явном виде в терминах обобщённой дробной матричной экспоненциальной функции и интегрального оператора с указанной матрицей в ядре:

$$\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; G; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(Gt^\alpha; \mu) = t^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Gt^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + \mu)},$$

$$E^{\mu,\alpha}_{0t;G} u = \int_0^t \mathrm{Exp}(\alpha, \mu; G; t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

где $E_\alpha(z; \mu)$ — функция типа Миттаг-Леффлера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [1]. Оно имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Exp}(\alpha - \beta, \alpha - k + 1; G; t) a_k + (E^{\alpha,\alpha-\beta}_{0t;G} g)(t).$$

Окончательно задача сводится к решению классической задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + f + u, \quad x(0) = x_0,$$

структура которого хорошо известна.

Приведем пример дробно-осцилляционного уравнения

$$(D^\alpha_{0t} + \lambda I)(\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega^2 x - f) = 0, \tag{4}$$

в котором $\alpha \in (0, 1)$; r, ω — известные постоянные величины, $x = x(t)$ координата частицы, I — тождественный оператор. Оно возникает в случае, когда вязко-упругая связь подчиняется следующему определяющему соотношению:

$$\beta\sigma + D^\alpha_{0t}\sigma = E(\beta\varepsilon + D^\alpha_{0t}\varepsilon) + \eta(\beta\dot{\varepsilon} + D^\alpha_{0t}\dot{\varepsilon}), \tag{5}$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — направление и деформация связи; β, η, E, $\alpha \in (0, 1)$ — константы модели (5), определяемые экспериментально.

Обоснована корректность начальной задачи для уравнения (4) с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0+} I^{1-\alpha}_{0t} \ddot{x} = u_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

в классе функций $x(t) : \ddot{x}(t) \in L^{\alpha,1}(0, T)$. Решение находится в явном виде.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М: Физматлит, 2003.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / Elsevier: North-Holland Mathematics Studies, 2006.

3. Огородников Е.Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ. – 2013. – 1(30). – С.245-252.

ABOUT CAUCHY TYPE PROBLEM FOR THE CLASS OF MODEL DYNAMIC SYSTEMS WITH MEMORY

E.N. Ogorodnikov

Samara State Technological University,
Molodogvardeiskaya Str., 244, Samara, 443100, Russia, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Key words: dynamic systems, Cauchy's problem, memory, vector functions, fractional derivatives.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 103

MSC 35F10

РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Е.Ю. Панов

Новгородский государственный университет,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия, e-mail:
Eugeny.Panov@novsu.ru

Ключевые слова: энтропийные решения, квазилинейные уравнения, функция Каратеодори, корректность, ренормализация решений.

В слое $(t,x) \in \Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$ рассматривается задача Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \mathrm{div}_x \varphi(u) = g(t,x,u), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{1}$$

где вектор потока $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, а функция-источник $g(t,x,u)$ является функцией Каратеодори, такой что $|g(t,x,k)| \in L^1_{loc}(\Pi_T)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет одностороннему условию Липшица: $\exists L = L(g) \geq 0$: $g(t,x,v) - g(t,x,u) \leq L(v-u)$ $\forall v,u \in \mathbb{R}$, $v > u$. Начальная функция $u_0(x)$ предполагается лишь измеримой. В случае $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \equiv 0$ хорошо известен классический результат С.Н. Кружкова [1] о существовании и единственности ограниченного обобщенного энтропийного решения задачи (1). Для неограниченных решений теряется свойство конечности скорости распространения начального возмущения, что может приводить к потере корректности задачи Коши. В частности, естественные требования $u, g(t,x,u) \in L^1_{loc}(\Pi_T)$, $\varphi(u) \in L^1_{loc}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$ могут оказаться слишком ограничительными. Однако, отказавшись от этих требований, мы не можем рассматривать энтропийные условия (и даже само уравнение) в рамках теории распределений. Для корректного определения таких решений $u = u(t,x)$ (называемых *ренормализованными*) используются энтропийные условия для суперпозиций $s(u)$, где s - ограниченные функции. Ренормализованные энтропийные решения (р.э.р.) задачи (1) были впервые введены в работе [2] в случае $g \equiv 0$ и $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В [2] доказаны существование и единственность р.э.р. В статье [3] эти результаты были обобщены на случай произвольных измеримых начальных данных. В настоящей работе мы распространяем результаты [3] на неоднородный случай. Пусть $s_{a,b}(u) = \max(\min(u,b),a)$ - срезающая функция на уровнях $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\chi_{(a,b]}(u)$ – характеристическая функция промежутка $(a,b]$.

Определение. *Измеримая функция $u = u(t,x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным субрешением (р.э.субр.) задачи (1), если $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$:*

$$(s_{a,b}(u))_t + \mathrm{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u) g(t,x,u) = \mu_b - \mu_a \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \tag{2}$$

где μ_k, $k \in \mathbb{R}$ – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T и

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\mu_k(\Pi_T)+\int_{u>k}(g(t,x,k))^- dtdx\right)=0\,,\quad \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(s_{a,b}(u(t,x))-s_{a,b}(u_0(x)))^+=0$$

в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Измеримая функция $u=u(t,x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным суперрешением (р.э.суперр.) задачи (1), если выполнено (2) для некоторого семейства неотрицательных локально конечных мер $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ на Π_T и

$$\lim_{k\to-\infty}\left(\mu_k(\Pi_T)+\int_{u<k}(g(t,x,k))^+ dtdx\right)=0\,,\quad \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(s_{a,b}(u(t,x))-s_{a,b}(u_0(x)))^-=0$$

в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Наконец, р.э.р. задачи (1) называется измеримая функция $u=u(t,x)$, которая одновременно является р.э.субр. и р.э.суперр. этой задачи.

С использованием варианта метода удвоения переменных установлен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть измеримые функции $u=u(t,x)$, $v=v(t,x)$ являются, соответственно, р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1) с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t,x,u)$, $h(t,x,u)$. Пусть $L=\min(L(g),L(h))$ и $q(t,x)=\sup\limits_{u\in\mathbb{R}}(g(t,x,u)-h(t,x,u))^+$. Тогда, для почти всех $t\in(0,T)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u(t,x)-v(t,x))^+dx\le e^{Lt}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-v_0(x))^+dx+\int_{(0,t)\times\mathbb{R}^n}q(\tau,x)d\tau dx\right).$$

Из Теоремы 1 вытекает следующий принцип сравнения:

Следствие. *Пусть функции $u=u(t,x)$, $v=v(t,x)$ являются р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1), с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t,x,u)$, $h(t,x,u)$, соответственно. Тогда, если $u_0(x)\le v_0(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, $g(t,x,u)\le h(t,x,u)$ почти всюду на $\Pi_T\times\mathbb{R}$, то и $u(t,x)\le v(t,x)$ почти всюду на Π_T.*

Из принципа сравнения следует единственность р.э.р. Существование р.э.р. в общем случае может нарушаться. Так, например, задача $u_t+(u^2)_x=x^2$, $u(0,x)\equiv 0$ не имеет р.э.р. Поэтому, для существования р.э.р. нужны дополнительные условия на входные данные задачи. Мы предположим, что $u_0(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)+L^1(\mathbb{R}^n)$, $g(t,x,0)\in L^\infty(\Pi_T)+L^1(\Pi_T)$. Справедлива следующая

Теорема 2. *При сделанных предположениях существует р.э.р. задачи (1).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-01-00230-а.

Литература

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. – 1970. – 81, №2. – С.228-255.

2. Bénilan Ph., Carrillo J., Wittbold P. Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 2000. – 29. – P.313-327.

3. Лысухо П.В., Панов Е.Ю. Ренормализованные энтропийные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Проблемы математического анализа. – 2010. – 51. – С.3-20.

RENORMALIZED ENTROPY SOLUTIONS OF NONUNIFORM QUASI LINEAR EQUATIONS OF FIRST ORDER

E.Yu. Panov

Novgorod State University,
Bolshaya Sankt-Peterburgskaya Str., 41, Velikii Novgorod, 173003, Russia, e-mail:
Eugeny.Panov@novsu.ru

Key words: entropy solutions, quasilinear equations, Karatheodory's function, correctness, renormalization of solutions.

MSC 42A82

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ

А.Б. Певный, С.М. Ситник

Сыктывкарский государственный университет,
Октябрьский пр., 55, Сыктывкар, респ. Коми, 167001, Россия, e-mail: pevnyi@syktsu.ru
Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. При исследовании математических моделей задачи обычно сводятся к конечномерным, для которых возникает необходимость обоснования их корректности, и, в частности, установлению однозначной разрешимости линейных систем с матрицами коэффициентов специального вида. В работе для решения этой задачи вводится класс вещественных положительно определённых функций и доказываются неравенства для них. Рассматривается приложение техники положительно определённых функций к доказательству однозначной разрешимости конечномерных моделей, возникающих при разложении сигналов по целочисленным сдвигам гауссианов.

Ключевые слова: положительно определённые функции, теорема Бохнера, неравенство М.Г. Крейна, гауссиан, целочисленные сдвиги.

1. Вещественные положительно определённые функции и неравенства для них. Теория положительно определённых функций (п.о.ф.) возникла в начале 20 века на стыке нескольких разделов математики: линейной алгебры, теории функций, преобразования и рядов Фурье, интегральных и дифференциальных уравнений, теории групп. Из литературы по п.о.ф. отметим одну из первых оригинальных работ [1], содержащую по существу все современные определения, обзоры [2-3], из монографий особенно выделим очень качественно написанную книгу [4], а также [5-7]. В настоящей работе вводится понятие вещественной положительно определённой функции (в.п.о.ф.), определение для которых отличается от классического использованием только вещественных, а не комплексных последовательностей. Для этого класса функций доказываются варианты известных неравенств М.Г. Крейна и Е.А. Горина. В качестве приложения рассматривается доказательство однозначной разрешимости конечномерной линейной системы, возникающей в задаче о разложении сигнала по целочисленным сдвигам гауссианов [8].

Отметим, что для авторов инициирующей послужила статья Е.А. Горина [9].

Будем рассматривать действительные функции от действительного аргумента на всей оси $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Дадим два определения для положительно определённых функций: вещественной положительно определённой функции (в.п.о.ф.) и классическое определение положительно определённой функции (п.о.ф.) и установим их эквивалентность.

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется вещественной положительно определённой функцией (в.п.о.ф.), если выполнены два условия:*

1) *функция f чётная, $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;*

2) *для любого N, для любых точек $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ и любой вещественной последовательности $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)\, a_k a_j \geq 0\,. \tag{1}$$

Определение 2 (классическое). *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется положительно определённой функцией (п.о.ф.), если для любого N, любых $x_1, \ldots x_N \in \mathbb{R}$ и любой последовательности комплексных чисел $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)\, z_k \bar{z}_j \geq 0. \tag{2}$$

Покажем, что для вещественной функции $f(x)$ определения 1 и 2 равносильны.

Установим, что $1 \Longrightarrow 2$. Пусть $z_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда сумма S в (2) в силу чётности функции равна

$$S = \sum_{k,j=1}^{N} f(x_k - x_j)\,(\xi_k \xi_j + \eta_k \eta_j)$$

и нужное неравенство $S \geq 0$ следует из (1).

Теперь покажем, что $2 \Longrightarrow 1$. Нужно проверить только чётность $f(x)$ Для этого положим в (2) $N = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x > 0$, $z_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда сумма S в (2) равна

$$S = f(0)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) + f(-x)\, z_1 \bar{z}_2 + f(x) z_2 \bar{z}_1\,.$$

Отсюда получаем для произвольных чисел ξ_1, ξ_2, η_1, η_2

$$\operatorname{Im} S = (\eta_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2)\,[f(-x) - f(x)] = 0\,,$$

Следовательно, $f(-x) = f(x)$.

Будем рассматривать вещественные *строго* п.о.ф., для которых неравенство (1) выполняется со знаком «строго больше», если последовательность $a_1, \ldots a_N$ ненулевая и точки $x_1, \ldots, x_N$ попарно различны.

Рассмотрим некоторые свойства вещественных строго положительно определённых функций.

Определение 1 накладывает на рост в.п.о.ф. существенные ограничения. Введём матрицу A с элементами $A_{kj} = f(x_k - x_j)$, $1 \leq i, j \leq N$. Эта матрица будет симметричной и неотрицательно определённой. По критерию Сильвестра все её главные миноры неотрицательны. В частности,

$$\Delta_1 = f(x_1 - x_1) = f(0) \geq 0\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f(0) & f(x_1 - x_2) \\ f(x_2 - x_1) & f(0) \end{vmatrix} = f^2(0) - f^2(x_1 - x_2) \geq 0.$$

Отсюда получаем важное свойство

$$|f(x)| \leq f(0), \, x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Следовательно, график функции $f(x)$ находится в полосе $-f(0) \leq y \leq f(0)$, а если достигает верхней или нижней границ, то функция $f(x)$ будет периодической (см. далее).

Следующее неравенство, которое мы перепишем для случая в.п.о.ф., в работах Е.А. Горина [9-10], а также в обзоре [3] названо неравенством М.Г. Крейна:

$$[f(x) - f(y)]^2 \leq 2f(0)[f(0) - f(x-y)]; \, x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Доказательство приведено, например, в книге [1].

Следствие 1. *Если $f(T) = f(0)$ при некотором $T > 0$, то функция $f(x)$ периодическая с периодом T.*

Теорема 1. *Для в.п.о.ф. $f(x)$ справедливо неравенство*

$$[f(x) + f(y)]^2 \leq 2f(0)[f(0) + f(x-y)]; \, x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

□ Можно считать, что $f(0) = 1$. Выберем в определении 1 значение $N = 3$ и три точки $0, x, y$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & f(x) & f(y) \\ f(x) & 1 & f(x-y) \\ f(y) & f(x-y) & 1 \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена, то есть $(Au, u) \geq 0$ для всех $u \in \mathbb{R}^3$. Возьмём $u = (a, -1, -1)^T$. Тогда получаем

$$a^2 + 2 - 2af(x) - 2af(y) + 2f(x-y) \geq 0,$$

$$2 + 2f(x-y) \geq -a^2 + 2a[f(x) + f(y)]$$

Отсюда при $a = f(x) + f(y)$ получим (5). ■

Продолжая следовать традиции в названиях, теперь логично назвать неравенство (4) первым неравенством М.Г. Крейна, а неравенство (5) – вторым неравенством М.Г. Крейна. Отметим, что в статьях М.Г. Крейна [11-12] рассматривается проблема продолжения функции, положительно определенной на интервале $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$, на всю ось; при этом попутно устанавливается неравенство (4). Отметим, что в формулировках имеются некоторые неточности: в [11] при определении положительно определённых функций, а в [11-12] — при записи самого неравенства (4).

Следствие 2. *Если $f(x)$ является в.п.о.ф., и дополнительно выполнено соотношение $f(T) = -f(0)$ для некоторого $T > 0$, то справедливы равенства*

$$f(x+T) = -f(x), \; f(x+2T) = f(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Действительно, при $y = x + T$ в (5) получаем

$$[f(x) + f(x+T)]^2 \leq 2f(0)[f(0) + f(T)] = 0\,.$$

Рассмотренные до сих пор неравенства являются двухточечными, теперь рассмотрим их многоточечные обобщения.

Е.А. Горин доказал в [9, теорема 1] неравенство, которое для непрерывной в.п.о.ф. $f(x)$ принимает вид:

$$\left[f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\right]^2 \leq 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}[f(0) - f(x_k - y_k)]$$

для любых $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Неравенство М.Г. Крейна (4) получается отсюда как частный случай при n= 1.

Покажем, что приведённое неравенство Е.А. Горина допускает модификацию, которая является обобщением второго неравенства М.Г. Крейна (5).

Теорема 2. *Пусть n – нечётное число. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots y_n \in \mathbb{R}$ для непрерывной в.п.о.ф. $f(x)$ справедливо неравенство*

$$\left[f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + f\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\right]^2 \leq 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}[f(0) + f(x_k - y_k)]\,. \tag{6}$$

Замечание. При чётном n неравенство (6) может не выполняться. Для примера выберем $f(x) = \cos x$, $x_1 = x_2 = 2\pi$, $y_1 = y_2 = \pi$. Тогда неравенство (6) принимает вид $4 \leq 0$, что неверно.

□ Доказательство теоремы 2 в основном повторяет доказательство Е.А. Горина из [9]. Не умаляя общности, можно считать, что $f(0) = 1$. По теореме Бохнера [9]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, m(dt)\ ,$$

где m – вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Введём обозначения

$$a_k = e^{itx_k},\ b_k = e^{ity_k}\ ,\ c_k = \frac{b_k}{a_k} = e^{it(y_k - x_k)}\,.$$

Тогда левая часть L неравенства (6) равна

$$L = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k\right) m(dt)\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} a_1 \cdots a_n\,(1 + c_1 \cdots c_n)\, m(dt)\right]^2$$

По неравенству Коши-Буняковского,

$$L \leq \int_{-\infty}^{\infty} |1 + c_1 \cdots c_n|^2\ m(dt)\,.$$

Воспользуемся тождеством

$$1 + c_1 \cdots c_n = 1 + c_1 - c_1 (1 + c_2) + c_1 c_2 (1 + c_3) - \ldots + c_1 \cdots c_{n-1} (1 + c_n) \ .$$

Знаки чередуются, но перед последним слагаемым знак + в силу нечётности n.

Применим неравенство Коши-Буняковского для конечной суммы

$$L \leq n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |1 + c_k|^2 \, m\,(dt) \ .$$

Аналогично преобразуется правая часть R неравенства (6):

$$R \geq 2n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,(1 + c_k)\, m\,(dt) \ .$$

Поскольку, $c_k = e^{ip}$ где $p = t\,(y_k - x_k)$, то нетрудно проверить, что

$$|1 + c_k|^2 = 2 \ \mathrm{Re} \ (1 + c_k) \ .$$

Поэтому получаем $L \leq R$, что и требовалось доказать. ■

2. Приложение теории в.п.о.ф. к разрешимости конечномерных приближений интерполяционной задачи. Вещественные строго п.о.ф. могут быть использованы для доказательства однозначной разрешимости конечномерных линейных систем уравнений. Такие задачи возникают при решении различных интерполяционных задач. Рассмотрим приложение к одной из таких задач – разложению произвольного сигнала по целочисленным сдвигам гауссианов.

Пусть даны попарно различные узлы $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ и набор измеренных значений цифрового сигнала $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ в этих узлах. Пусть выбрана вещественная строго п.о.ф. $f\,(x)$. Будем интерполировать данные линейными комбинациями вида

$$S\,(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k f\,(x - x_k) \ .$$

Требуется найти вектор коэффициентов вида $a = (a_1, \ldots, a_N)$ так, чтобы обрабатываемый сигнал без ошибок восстанавливался на заданной системе узлов:

$$S\,(x_m) = \sum_{k=1}^{N} a_k f\,(x_m - x_k) = y_m \,, \quad 1 \leq m \leq N \,. \tag{7}$$

Систему (4) можно записать в виде $Aa = y$, где A–матрица с элементами $A_{mk} = f\,(x_m - x_k)$. В силу того, что $f\,(x)$ является вещественной строго п.о.ф., эта матрица положительно определена, то есть

$$(\mathrm{Aa}, \mathrm{a}) = \sum_{k,m=1}^{N} f\,(x_m - x_k)\, a_m a_k > 0 \,, \quad a \in \mathbb{R}^N \,, \quad a \neq 0 \,.$$

У положительно определённой матрицы определитель $\det(A)$ строго положителен. Поэтому система (7) однозначно разрешима.

Восстановление непрерывного цифрового сигнала по системе дискретных отсчётов сводится к классической математической задаче об интерполяции функции по некоторому набору её значений. Для решения этой задачи разработано множество подходов: приближение полиномами, ортогональными системами, всплесками, сплайнами, фреймами, разложениями по синк–функциям, анализ Габора (разложения по когерентным состояниям) и другие методы, см., например, [13-16].

Рассмотрим задачу об интерполяции сигналов при помощи системы целочисленных сдвигов функции Гаусса

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0. \tag{8}$$

Несмотря на то, что данная система сдвигов не является ни фреймом, ни полной системой в $L_2(\mathbb{R})$, существует плодотворная теория для разложений этого класса, которые также находят важные практические приложения [16-19].

Для нас важно, что квадратичная экспонента или функция Гаусса (5) – это один из стандартных примеров функции из класса в.п.о.ф. В перечисленных работах рассматривается интерполяционная задача по бесконечной системе целочисленных сдвигов функции (5), в связи с чем строится узловая функция со свойством

$$d(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{-a(x-k)^2}, \quad d(m) = \delta_{0m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

где δ_{0m} — символ Кронекера.

График узловой функции напоминает график sinc-функции. Поэтому в [8] была сформулирована такая

Гипотеза. Узловая функция (7) принадлежит классу вещественных строго п.о.ф.

Отметим, что эта гипотеза оказалась справедливой и доказана авторами, при этом использовались результаты работ [17-19], доказательство будет опубликовано в другой статье.

Явная формула для коэффициентов узловой функции d_k получена в [16], они выражаются через тета-функции Якоби. Однако подобные формулы неприменимы при практических вычислениях, потому, что как показано в [18-19], они связаны с делением на чрезвычайно малые знаменатели и приводят к неприемлемым ошибкам.

В связи с перечисленными трудностями в работах [20-21] был предложен другой подход к нахождению численных приближений для узловой функции, при котором решение бесконечной системы уравнений сводится к конечной. В результате получается усечённая система

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k q^{(m-k)^2} = \delta_{0m}, \quad -n \le m \le n, \tag{10}$$

где обозначено $q = e^{-a} < 1$. Систему (10) можно записать в виде

$$Ac = \delta,$$

где

$$c = \{c_k\}_{k=-n}^{n}\,, \quad \delta = \{\delta_{m0}\}_{m=-n}^{n}\,,$$

A — матрица с элементами $A_{mk} = q^{(m-k)^2}\,, \quad -n \le m, k \le n.$

Например, при $n = 2$ матрица A коэффициентов системы имеет размер 5×5 и представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & q & q^4 & q^9 & q^{16} \\ q & 1 & q & q^4 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 1 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & q & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Матрица A положительно определена при любом $q \in [0, 1)$.*

□ При $q = 0$ матрица сводится к единичной, требуемое очевидно, поэтому пусть $q \in (0, 1)$. Напомним, что в этом случае $q = e^{-a}$, $a > 0$. Тогда элементы рассматриваемой матрицы выражаются через функцию Гаусса

$$A_{mk} = f\,(m-k)\,, \quad f\,(x) = e^{-ax^2}\,, \quad a > 0\,.$$

В силу принадлежности функции Гаусса классу строго п.о.ф. матрица A положительно определена. ■

Следствие 3. *Система (10) однозначно разрешима.*

Действительно, в силу положительной определённости матрицы системы, получаем $\det(A) > 0$.

Отметим, что система (10) имеет вид свёртки, поэтому её можно решать при помощи ДПФ, аналогично методу, применённому в [18-19].

Следствие 4. *Решение системы (10) симметрично, то есть $c_{-k} = c_k$ при фиксированном n.*

Действительно, рассмотрим произвольное решение. Нетрудно видеть, что если распространить по симметрии значения компонент с положительными индексами на компоненты с отрицательными индексами, то получится другое решение той же системы. Тогда, если исходное решение было бы несимметричным, то мы получили бы два различных решения, что невозможно в силу доказанной единственности. Следовательно, все решения симметричны.

На основании следствия 4 можно оставить в системе только половину уравнений, сократив размеры матрицы коэффициентов задачи вдвое, это даст существенное упрощение при вычислениях.

Заметим, что похожая матрица B с элементами

$$B_{mk} = (-q)^{(m-k)^2}\,, \quad -n \le m, k \le n\,,$$

при $0 < q < 1$ также положительно определена. Для доказательства достаточно заметить, что

$$B_{mk} = g\,(m-k)\,, \quad g\,(x) = e^{-ax^2}\cos(\pi x)\,, \quad a = -\ln(q)\,,$$

и проверить, что функция $g(x)$ принадлежит классу строго п.о.ф.

3. Заключение. В работе рассматрен класс вещественных строго положительно определённых функций. Для этого класса доказываются обобщения известных неравенств М.Г. Крейна и Е.А. Горина. Рассматриваются приложения вещественных строго положительно определённых функций к установлению однозначной разрешимости в прикладной задаче о разложении функции сигнала по целочисленным сдвигам гауссианов.

Литература

1. Mathias M. Über positive Fourier–Integrale // Math. Zeit. –1923. –16. –P.103-125.
2. Stewart J. Positive Definite Functions And Generalizations, An Historical Survey // Rocky Mountain Journal Of Mathematics. –1976. –6;3. –P.409-434.
3. Гурарий В.П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа / ВИНИТИ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. –1988. — 25. –С.4-303.
4. Bhatia R. Positive Definite Matrices / Princeton University Press, 2007. –264 p.
5. Sasvari Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / De Gruyter, 2013. –377 p.
6. Kosaki H. Positive definiteness of functions with applications to operator norm inequalities / Memoirs of the American Mathematical Society. – 2011. – 297. –93 p.
7. Fasshauer G.E. Meshfree Approximation Methods with Matlab / World Scientific Publishing, 2007. – 518 p.
8. Певный А.Б., Ситник С.М. Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // "Новые информационные технологии в автоматизированных системах". Материалы восемнадцатого научно–практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. –2015. –247. –С.247-254.
9. Горин Е.А. Положительно определённые функции как инструмент математического анализа // Фундамент. и прикл. матем. –2012. –17;7. –С.67-95.
10. Gorin E.A., Norvidas S. Universal Symbols on Locally Compact Abelian Groups // Functional Analysis and Its Applications. –2013. –47;1. –P.1-13.
11. Крейн М.Г. О представлении функций интегралами Фурье–Стилтьеса // Учёные записки Куйбышевского государственного педагогического и учительского института им. В.В. Куйбышева. 1943. –7. (Цитируется по изданию: Крейн М.Г. Избранные труды. Киев, 1993. Том 1, С.16-48).
12. Крейн М.Г. Об измеримых эрмитово–положительных функциях // Матем. заметки. – 1978. –23;1. 79-91.
13. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков / М.: Физматлит, 2006. – 616 с.
14. Малозёмов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретного гармонического анализа / СПб.: Лань, 2012. –304 с.
15. Игнатов М.И., Певный А.Б. Натуральные сплайны многих переменных / Л.: Наука, 1991. –125 с.
16. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / AMS Mathematical Surveys and Monographs. –2007. —141. –349 p.
17. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Матем. заметки. –2014. –96;2. –С.239-250.

18. Журавлёв М.В., Киселев Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. –2010. 67. –С.107-116.
19. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. –2009. –17/2. –С.89-99.
20. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. –2013. –32. –С.184–186.
21. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. –2013. –2;56. –С.90-94.

INEQUALITIES OF STRICTLY POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

A.B. Pevnyi, S.M. Sitnik

Syktyvkar State University,
October Av., 55, Syktyvkar, 167001, Russia, e-mail: pevnyi@syktsu.ru
Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av., 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru

Abstract. On studying mathematical models problems are usually reduced to finite dimensional ones and it is necessary to prove their correctness, specially, to establish uniqueness and existence of solutions of linear systems with special matrices. In the paper to solve such problems, it is a class of strictly positive definite functions and some important inequalities are proved for them. Some applications of this functional class are proposed for proving correctness of models in the problem of signal approximations by integer shifts of Gaussians.

Key words: positive definite functions, Bochner's theorem, M.G.Krein's inequality, Gaussian, integer shifts.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 115

MSC 44A12

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА-КИПРИЯНОВА НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

О.И. Попова

Воронежский Государственный Университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: olyaa.popova@yandex.ru

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радона-Куприянова, функции действительного переменного, дробные интегралы.

Классическое преобразование Радона радиальных функций совпадает с преобразованием Радона-Киприянова K_γ функций одного переменного, когда индекс γ — натуральное число. В [2] приведена формула связи преобразования Радона-Киприянова с интегралами дробного порядка Римана-Лиувилля. Это позволяет создать таблицу преобразования Радона радиальных функций и, в обобщающем виде, таблицу преобразований Радона-Киприянова элементарных функций (одного переменного).

Преобразование Радона-Киприянова в $\mathbb{R}_n^+\{x\ :\ x_1>0\}$ введено в [1] (далее, сокращая, будем писать K_γ-преобразование) определяется выражением

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{x_1}^\nu\delta(p-\langle x,\xi\rangle)\,x_1^\gamma\,dx,\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\ ,\quad \gamma>0, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x')\in\mathbb{R}_n^+=(0,+\infty)\times\mathbb{R}_{n-1}$, $\langle x,\xi\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,\xi_i$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}_n$, $p=\langle x,\xi\rangle$ — уравнение плоскости, проходящей на расстоянии $|p|$ от начала координат, ортогонально единичному вектору ξ, $\delta(P)$ — δ-функция сосредоточенная на $(n-1)-$мерной поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n$, символ $\Pi_{x_1}^\nu$ обозначает действие оператора Пуассона порядка $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$ по переменной x_1:

$$\Pi_{x_1}^\nu g(x_1,x')=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(x_1\cos\alpha,\,x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha.$$

Полагая в (1) $n=1$, выводим следующую формулу для K_γ-преобразование функции одного переменного

$$K_\gamma[f](\xi;p)=\int_0^{+\infty} f(x)\,\Pi_x^\nu\delta(p-x)\,x^\gamma\,dx,\quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\ ,\quad \gamma>0.$$

Теорема 1. *K_γ-преобразование четной функции одного переменного $f\in L_1$ представляется в виде левостороннего интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка $\frac{\gamma}{2}$ в виде*

$$K_\gamma[f](\sqrt{q})=\widehat{f}(\sqrt{q})=I_-^{\frac{\gamma}{2}}f_1(q)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int\limits_q^\infty\frac{f_1(\tau)}{(\tau-q)^{1-\frac{\gamma}{2}}}d\tau \tag{2}$$

от функции

$$f_1(\tau) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{2\sqrt{\pi}} f(\sqrt{\tau}), \quad f_1 \in L_1^\gamma.$$

Отметим, что когда функция (четная) имеет носитель $(0, b)$ в $\mathbb{R}_1^+$, то функция f_1 имеет носитель, принадлежащий множеству $(0, b^2)$.

Формулу (2) применим для вычисления K_γ-преобразования (1) элементарных функций. Заметим, что формула (2), примененная к произвольной степенной функции с неограниченным носителем теряет смысл, поэтому, чтобы избавиться от неопределенности в решении, будем умножать исходную функцию на кусочно-постоянную функцию Хевисайда $\Theta(x)$, равную нулю для неположительных значений аргумента и единице — для положительных.

Кроме того, отметим, что K_γ-преобразование определено для четных функций. Учитывая наличие квадратных корней в аргументе функции f_1, далее рассматриваем функции от аргумента x^2, что делает функции и четными и очень удобными для применения формулы (2) одновременно.

K_γ-преобразование функции от x^2.

1. $\varphi(x) = \Theta(b^2 - x^2)(b^2 - x^2)^{(\beta-1)}, \ \beta > 0\,,$

$$K_\gamma[\varphi](p) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)} \Theta(b^2 - x^2)(b^2 - p^2)^{\frac{\gamma}{2}+\beta-1}\,.$$

2. $\varphi(x) = (x^2 - a)^{\beta-1}(b^2 - x^2)^{(\alpha-1)}\Theta(b^2 - x^2).$

$$K_\gamma[\varphi](p) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\Gamma(\beta)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}(b^2 - a)^{\beta-1}(b^2 - p^2)^{\gamma/2+\beta-1}\ {}_2F_1(1-\beta, \alpha, \frac{\gamma}{2}+\alpha; \frac{p^2 - b^2}{b^2 - a}).$$

3. $\varphi(x) = (b^2 - x^2)^{\beta-1}\ln(b^2 - x^2)\Theta(b^2 - x^2),$

$$K_\gamma[\varphi](p) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})\Gamma(\beta)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\beta)}(b^2 - p^2)^{\beta+\gamma/2-1}\Theta(b^2 - p^2)(\psi(\beta) - \psi(\beta+\gamma/2) + \ln(b^2 - p^2)),$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера.

4. $\varphi(x) = e^{-ax^2}, \qquad K_\gamma[\varphi](p) = \dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}} a^{-\gamma/2} e^{-ap^2}.$

5. $\varphi(x) = e^{-ax^2}\sin bx^2 \qquad K_\gamma[\varphi](p) = \dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \dfrac{e^{-ap^2}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}} \sin(bp^2 + \alpha\varphi).$

6. $\varphi(x) = e^{-ax^2}\cos bx^2, \qquad K_\gamma[\varphi](p) = \dfrac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \dfrac{e^{-ap^2}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}} \cos(bp^2 + \alpha\varphi).$

Полученные здесь формулы справедливы и для классического преобразования Радона радиальных функций. Достаточно в найденных формулах положить $\gamma = 0$.

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // ДАН. – 1998. – 360. – №2. – С.157-160.

2. Ляхов Л.Н. RK_γ-преобразование с $\gamma \in (0;2]$ весовых сферических средних функций. Соотношение Асгейрсона // ДАН. – 2011. – 439,№ 5. – С.589-592.

3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев И.О. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – С.688.

RADON-KIPRIYANOV'S TRANSFORMATION OF SOME ELEMENTARY FUNCTIONS

O.I. Popova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: olyaa.popova@yandex.ru

Key words: Radon's transformation, Radon-Kupriyanov;s transformation, real variable function, fractional integrals.

MSC 26A33

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE MULTI-TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

A.V. Pskhu

Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC, RAS,
89A, Shortanov street, Nalchik, Russia, e-mail: pskhu@mail333.com

Key words: Cauchy;s problem, multi-time equations, diffusion equation.

Consider the equation

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial y_k^{\sigma_k}} u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y)\,. \tag{1}$$

Here $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ and $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$, $\lambda_k > 0$; Δ_x is the Laplace operator, $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$; $\partial^{\sigma_k}/\partial y_k^{\sigma_k}$ is an operator of fractional partial differentiation of order σ_k, $\sigma_k \in (0,1)$, with respect to y_k and with origin at $y_k = 0$. The fractional differentiation is given by the Dzhrbashyan-Nersesyan operator associated with the sequence $\{\alpha_k, \beta_k\}$, α_k, $\beta_k \in (0,1]$, $\sigma_k = \alpha_k + \beta_k - 1$, $\partial^{\sigma_k}/\partial y_k^{\sigma_k} = D_{0y_k}^{\{\alpha_k,\beta_k\}} = D_{0y_k}^{\beta_k - 1} D_{0y_k}^{\alpha_k}$ (see [1]), where $D_{0y_k}^{\beta_k-1}$ and $D_{0y_k}^{\alpha_k}$ are the Riemann-Liouville fractional integral and derivative.

For a survey on results relating the initial and boundary value problems for a fractional diffusion equation and its generalizations, we refer to papers [2] and [3].

For any element $z \in \mathbf{R}^m$, we denote by z_k the k-th coordinate of z. Let z and ζ be elements of $\mathbf{R}^m$. The expressions $z\zeta$, z^ζ, z_* and $z_{*,k}$ denote the vectors $(z_1\zeta_1, ..., z_m\zeta_m)$ and $(z_1^{\zeta_1}, ..., z_m^{\zeta_m})$, and the quantities $\prod_{i=1}^m z_i$ and $\prod_{i=1,\ i\neq k}^m z_i$ respectively.

Consider the function

$$f_{m,\delta}\,(z;\sigma;\mu) = \int_0^\infty t^{-\delta} e^{-\frac{1}{t}} \prod_{k=1}^m \phi\,(-\sigma_k, \mu_k; -z_k t)\,dt\,, \tag{2}$$

where $m \in \mathbf{N}$, $\delta \in \mathbf{R}$, and z, σ, $\mu \in \mathbf{R}^m$, $z_k > 0$, $k = \overline{1,m}$. Here, $\phi\,(\xi,\eta;t) = \sum_{i=0}^\infty \frac{t^i}{i!\Gamma(\xi i + \eta)}$ is the Wright function (see [4]). In terms of function (2), we define the function

$$\Gamma_{m,n}^\sigma(x,y) = C_n |x|^{2-n} y_*^{-1} f_{m,n/2}\left(\frac{|x|^2}{4}\lambda y^{-\sigma}; \sigma; 0\right), \quad \text{where} \quad C_n = \frac{1}{4}\pi^{-n/2}.$$

We put $T = \{y:\ y_k \in (0,T_k),\ k = \overline{1,m}\}$ and $\Omega = \{(x,y):\ x \in \mathbf{R}^n,\ y \in T\}$. By $T_{(k)}$ and $y_{(k)}$ we denote the projections of T and $y \in \mathbf{R}^m$ onto $\mathbf{R}^{m-1}$ along y_k. Also we write

$$I_y = (0,y_1) \times \cdots \times (0,y_m), \quad I_y^{(k)} = (0,y_1) \times \cdots \times (0,y_{k-1}) \times (0,y_{k+1}) \times \cdots \times (0,y_m).$$

By Ω_k we denote the interior points of the set $\Omega_k = \partial\Omega \cap \{y_k = 0\}$, $k = \overline{1,m}$.

A function $u(x,y)$ is called a regular solution of equation (1) if $y_*^{1-\nu}u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ for some $\nu \in \mathbf{R}^m$ with positive ν_k, $D_{0y_k}^{\alpha_k-1}u \in C(\Omega \cup \Omega_k)$, $D_{0y_k}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}u$ and $u_{x_jx_j}$ belong to $C(\Omega)$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. This function satisfies equation (1) at all points $(x,y) \in \Omega$.

In this work, we study the following problem: *find a regular solution $u = u(x,y)$ of equation (1) in Ω such that*

$$\lim_{y_k\to 0} D_{0y_k}^{\alpha_k-1}u(x,y) = \tau(x,y_{(k)}), \quad x \in \mathbf{R}^m, \quad y_{(k)} \in T_{(k)}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Formulate the main results of the work.

Theorem 1. *Suppose that $y_{*,k}^{1-\mu}\tau_k(x,y_{(k)}) \in C\left(\mathbf{R}^n \times \overline{T}_{(k)}\right)$ and $y_*^{1-\mu}f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ for some $\mu \in \mathbf{R}^m$ with positive μ_k, and*

$$\lim_{|x|\to\infty} y_{*,k}^{1-\mu}\tau_k(x,y_{(k)})\exp\left(-\rho_k|x|^{\frac{2}{2-\sigma_k}}\right) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} y_*^{1-\mu}f(x,y)\exp\left(-\rho_k|x|^{\frac{2}{2-\sigma_k}}\right) = 0,$$

where $\rho_k < \left(1-\frac{\sigma_k}{2}\right)\left(\frac{\sigma_k}{2T_k}\right)^{\frac{\sigma_k}{2-\sigma_k}}$ and $k = \overline{1,m}$. Then a regular solution $u(x,y)$ of problem (1), (3) that satisfies the condition

$$\lim_{|x|\to\infty} y_*^{1-\nu}u(x,y)\exp\left(-\rho_k|x|^{\frac{2}{2-\sigma_k}}\right) = 0, \quad k = \overline{1,m},$$

has the form

$$u(x,y) = \int_{I_y}\int_{\mathbf{R}^n} f(\xi,\eta)\Gamma_{m,n}^{\sigma}(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\int_{I_y^{(k)}}\int_{\mathbf{R}^n}\left[D_{y_k\eta_k}^{\beta_k-1}\Gamma_{m,n}^{\sigma}(x-\xi,y-\eta)\right]_{\eta_k=0}\tau_k(\xi,\eta_{(k)})\,d\xi d\eta_{(k)}.$$

Theorem 2. *There is at most one regular solution of problem (1), (3) in the class of functions that satisfy the following condition for some positive constant ρ:*

$$\lim_{|x|\to\infty} y_*^{1-\nu}u(x,y)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\sigma_0}}\right) = 0,$$

where $\sigma_0 = \min\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$.

References

1. Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order // Izv. Akad. Nauk Armenian SSR Matem. – 1968. – 3, No.1. – P.3-29. (Russian)

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations / North-Holland Math. Stud. – vol.204, Amsterdam: Elsevier, 2006.

3. Pskhu A.V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order // Izvestiya: Mathematics. – 2009. – 73, No.2 – P.351-392.

4. Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J.London Math. Soc. – 1933. – 8, No.29. – P.71-79.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МНОГОВРЕМЕННОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

А.В. Псху

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматики, КБАР, ул. Шортанова, 89А, Нальчик, Россия, e-mail: pskhu@mail333.com

Ключевые слова: задача Коши, многовременные уравнения, уравнение диффузии.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 121

MSC 35Q05

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Р.Р. Раянова

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Ключевые слова: уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, уравнения гиперболического типа, краевые задачи, линия сингулярности.

Рассмотрена краевая задача в характеристическом квадрате с данными на параллельных характеристиках для системы гиперболических уравнений с волновым оператором и сингулярным матричным коэффициентом при младшей производной. Используя известное решение задачи Коши для указанной системы уравнений с данными на линии сингулярности матричного коэффициента, поставленная задача редуцируется к системе интегральных уравнений Карлемана. В работе найдено в явном виде решение указанной краевой задачи.

Обозначим через M_n — множество постоянных матриц порядка n. Пусть $\Lambda(G)$ — спектр матрицы $G \in M_n$, λ_i — собственные значения матрицы G $(i = 1, 2, ..., n)$.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}$ рассмотрим систему уравнений

$$u_{xx} - u_{yy} - \frac{2G}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

где $u(x, y) = \big(u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y)\big)^\top$ — вектор искомых функций, $\Lambda(G) \in (0, 1/2)$.

Пусть $D_0 = D \cap \{y > 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0\} = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1, y < 0\}$.

Обозначим $\theta_0\big(\frac{x}{2}; \frac{x}{2}\big)$ и $\theta_1\big(\frac{1+x}{2}; \frac{x-1}{2}\big)$ — точки пересечения характеристик $x - y = 0$ и $x - y = 1$ с характеристикой другого семейства, выходящей из точки $(x, 0)$.

Задача Требуется найти вектор-функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $u(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^2(D_0 \cup D_1)$,
2. $u(x, y)$ удовлетворяет системе (1) в области $D_0 \cup D_1$,
3. $u(\theta_0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]$,
4. $u(\theta_1) = \psi(x), \quad x \in [0, 1]$,
5. $\lim\limits_{y \to 0-} (-y)^{2G} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0+} y^{2G} \dfrac{\partial u}{\partial y}$,

где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$ - заданные вектор-функции.

Поставленная задача сводится к системе интегральных уравнений Карлемана.

Пусть $\Omega = [a, b]$, где $-\propto < a < b < +\propto$.

Определение 1. *Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$, где $\Omega = [a, b]$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ с областью определения $D_f = \Omega$, каждая компонента которых, удовлетворяет на Ω условию Гельдера*

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq A_k |x_1 - x_2|^{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

со своими фиксированными значениями A_k и λ_k.

Определение 2. *Через $H^* = H^*(a, b)$ обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$, для которых существуют такие мультииндексы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ и $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\epsilon}(b-x)^{1-\delta}},$$

где $f^*(x) \in H^\lambda([a, b])$ и каждой компоненте вектора $f(x)$ соответствуют свои фиксированные значения мультииндексов λ, ϵ и δ.

Определение 3. *Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — мультииндекс. Через H^*_α обозначим класс вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ таких, что*

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\alpha-\epsilon}(b-x)^{1-\alpha-\delta}},$$

где $0 < \epsilon_k < 1 - \alpha_k$, $0 < \delta_k < 1 - \alpha_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, а каждая компонента вектора $f^*(x)$ принадлежит своему классу $\tilde{H}_{\alpha_k}$, который определен в [1].

Справедлива теорема.

Теорема *Пусть $G \in M_n$ – матрица, у которой спектр $\Lambda(G) \subset (0, 1/2)$. Пусть, далее, матрица $T \in M_n$ является матрицей преобразования G к жордановому виду $\Lambda_G = TGT^{-1}$. Пусть вектор $Tg(x) \in H^*_\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k = 1 - 2\lambda_k$, $\lambda_k \in \Lambda(G)$. Тогда единственное решение системы интегральных уравнений Карлемана в классе вектор-функций, таких что $T\nu(x) \in H^*$ имеет вид*

$$\nu(x) = \Big(L\Gamma(E - 2G)\Big)^{-1} D_{a+}^{E-2G}\Big(E - Z(x) D_{a+}^{2G} I_{b-}^{2G} Z^{-1}(x)\Big) g(x), \tag{2}$$

где матрицы $Z(x) = \left(\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right)^{E-2G}$, $L = 4\cos^2\big(\frac{\pi}{2}(E - 2G)\big)$.

Подставляя найденное в формуле (2) выражение для вектора $\nu(x)$ в решения задач Коши в областях $\overline{D_0}$ и $\overline{D_1}$ найдем окончательно решение $u(x, y)$ в области $\overline{D} = \overline{D_0} \cup \overline{D_1}$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 123

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR EULER-POISSON-DARBOUX'S EQUATIONS SYSTEM OF HYPERBOLIC TYPE

R.R. Rayanova

Samara State Technological University,
Molodogvardeiskaya Str., 244, Samara, 443100, Russia, e-mail: rayanova.rina@gmail.com

Key words: Euler-Poisson-Darboux equations, hyperbolic equations, boundary problems, singularity line.

MSC 42A38

КЛАССЫ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

С.А. Рощупкин

Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина,
ул. Совхозная, 13, Елец, 399761, Россия, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Ключевые слова: преобразование Фурье-Бесселя, основные функции, интегральное ядро, быстро-убывающие функции.

Основные функции для классического преобразования Фурье-Бесселя (см. [1]), оказались плохо приспособленными при работе с полным преобразованием Фурье-Бесселя (см. [2]). В связи с чем появилась необходимость введения новых классов основных функций, которые частично рассмотрены в этой работе.

Пусть $R_N^+ = R_n \times R_{N-n},\ x = (x', x''),\ x' \in R_n,\ x'' \in R_{N-n},\ j_\nu(x)$ — одно из решений сингулярного уравнения Бесселя $\frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}\, t^\gamma \frac{d}{dt} u = -u$, отвечающее индексу $\gamma = 2\nu + 1$ и удовлетворяющее условиям $j_\nu(0) = 1,\ j'_\nu(0) = 0$.

Ядра прямого и обратного полного преобразований Фурье-Бесселя имеют вид:

$$\Lambda_\gamma^\pm(x', \xi') = \prod_{i=1}^{n} \left(j_{\nu_i}(x_i\xi_i) \mp i \tfrac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1} j_{\nu_i+1}(x_i\xi_i) \right), \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \quad \gamma_i > 0, \quad \gamma_i = 2\nu_i + 1.$$

Прямое и обратное полные смешанные преобразования Фурье-Бесселя (далее, сокращая, будем писать $\mathcal{F}_B$-*преобразования*) функции u задается выражениями:

$$\mathcal{F}_B[u](\xi) = \int\limits_{R_n} \Lambda_\gamma^+(x', \xi')\, e^{-i(x'', \xi'')}\, u(x)\, (x')^\gamma\, dx,$$

$$\mathcal{F}_B^{-1}[u](x) = C_{\gamma,n,N} \int\limits_{R_n} \Lambda_\gamma^-(x', \xi')\, e^{-i(x'', \xi'')}\, u(x)\, (x')^\gamma\, dx = C_{\gamma,n,N} \mathcal{F}_B[u](-x).$$

Здесь $C_{\gamma,n,N} = \frac{(2\pi)^{1-n}}{2^{2(\nu+1)}\ \Gamma^2(\nu+1)},\ (x')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\gamma_i/2}$.

Введем следующие обозначения: $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, α' и α'' целочисленные мультииндексы, размерности $n,\ N - n$ соответственно,

$$D_B^\alpha = \left(\partial_B^{\alpha'}\right)_{x'} \partial_{x''}^{\alpha''}, \quad \left(\partial_B^{\alpha'}\right)_{x'} = \partial_{B_{\gamma_1}}^{\alpha_1} \ldots \partial_{B_{\gamma_n}}^{\alpha_n}, \quad \partial_{x''}^{\alpha''} = \partial_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}, \quad \partial_{x_i} = \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\partial_{B_{\gamma_i}}^{\alpha_i} = \begin{cases} B_{\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \alpha_i = 2k_i, \\ \partial_{x_i} B_{\gamma_i}^{(\alpha_i-1)/2}, & \alpha_i = 2k_i + 1 \end{cases}, \quad k_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $B_{\gamma_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{d}{dx_i}\, x_i^{\gamma_i} \frac{x}{dx_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, отвечающий индексу γ_i. В классе четных, достаточно гладких интегрируемых функций оператор D_B^α имеет символ $(i\xi)^\alpha$: $D_B^\alpha \varphi = \mathcal{F}_B^{-1}[(i\xi)^\alpha \mathcal{F}_B\, \varphi]$ (такие операторы рассмотрены в [3]).

Введем систему норм

$$|\langle\varphi\rangle|_k = max \left(\sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n} \left| x^\alpha\, D_{B_\gamma}^\beta\, \varphi(x) \right|,\ \sup_{|\alpha|+|\beta|\le k,\ x\in R_n} \left| D_{B_\gamma}^\beta\, (x^\alpha \varphi(x)) \right| \right), \qquad (1)$$

где выполнено условие

$$\alpha_i + \beta_i = 2k_i,\ i = 1, \ldots, n,\ k_i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2).$$

Через $S_{ev}(R_N)$ будем обозначать множество быстро убывающих функций четных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с конечными нормами (1) для каждого целого положительного k. Эти нормы определяют топологию в $S_{ev}(R_N)$. В частности, последовательность функций u_n из $S_{ev}(R_N)$ сходится к функции u в этом пространстве, если сходится к ней по каждой из этих норм, когда индекс k пробегает все неотрицательные числа.

Теорема 1. *При выполнении условия* (2) $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$*-преобразование осуществляет непрерывный (в обе стороны) изоморфизм пространства* S_{ev}*, т.е. для любого неотрицательного целого числа* k*, найдется число* k'*, что выполняется неравенство*
$|\langle \mathcal{F}_B[\,\varphi]\,\rangle|_k \leq |\langle \varphi \rangle|_{k_1}$.

Среди основных функций оказывается удобным класс основных функций Л. Шварца $S(R_N)$, исчезающих на координатных гиперплоскостях $x_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ (типа основных функций П.И. Лизоркина, см. также в [4]):

$$\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)=\{\psi:\ \psi\in S,\ \partial_{B_i}^{\beta}\psi(0)=0,\ \beta\in Z^+\},\ i=1,\ldots,n,\ \mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)=\{\varphi:\ \varphi=\mathcal{F}_B[\psi],\ \psi\in\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)\}.$$

В классах $\mathbf{\Psi}_\gamma(R_N^+)$ и $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ символ оператора D_B^α имеет тот же вид, что и в S_{ev}.

Теорема 2. *Класс* $\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+)$ *состоит из тех и только тех функций* $\varphi(x)\in S(R_N^+)$*, которые ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам:*

$$\varphi(x)\in S(R_N^+)\,,\quad \int\limits_{R_N^+} (x')^m \varphi(x)\, x^\gamma\, dx=0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+),$$

Для четного преобразования Фурье-Бесселя (см. книгу [4]) *функции* $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ *ортогональны (в смысле весового скалярного произведения) всем многочленам, четным по каждой из переменных* $x_1, \ldots, x_n$:

$$\varphi(x)\in S(R_N^+)\,,\quad \int\limits_{R_N^+} (x')^{2m} \varphi(x)\, x^\gamma\, dx=0, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\in\mathbf{\Phi}_\gamma(R_N^+),$$

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997.

2. Катрахов В.В., Ляхов Л.Н. Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференц. Уравнен. – 2011. – 47, № 5. – С.681-695.

3 Lyakhov L.N. , Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessel transformations and some singular differential equations // Cambridge Scientific Publishers. – 2012 / Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. – С.107-112.

4 Ляхов Л.Н. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.

BASED FUNCTIONS CLASSES FOR COMPLETE FOURIER-BESSEL'S TRANSFORMATION

S.A. Roshchupkin

Elets State University,
Sovkhoznaya Str., 13, Elets, 399761, Russia, e-mail: roshupkinsa@mail.ru

Key words: Fourier-Bessel's transformation, based functions, integral kernel, rapid decreasing functions.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 127

MSC 34E99

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т.А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
пр. Морской, 26, Северодвинск, 164515, Россия, e-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, негладкие коэффициенты, вектор-функции, матриц-функции.

Пусть выполняются следующие условия:
a) $P(x)$ - невырожденная матриц-функция на полуоси $R_+ := [0; +\infty)$,
b) $P^{-1}(x) = (p_{ij}(x))$ и $Q(x) = (q_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - эрмитовы матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определены и измеримы на R_+,
c) $R(x) = (r_{ij}(x))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ - комплекснозначная матриц-функции порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определена и измерима на R_+,
d) функции $q_{ij}(x)$, $p_{ij}(x)$, $r_{ij}(x)$ локально суммируемы на R_+ $(q_{ij}, p_{ij}, r_{ij} \in L^1_{loc}(I))$.

Предполагая, что вектор-функции $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ и $y^{[1]} = (y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \ldots, y_n^{[1]})^t := P(y' - Ry)$ (t - символ транспонирования) уже определены и являются локально абсолютно непрерывными на R_+, рассмотрим однородное симметрическое дифференциальное уравнение второго порядка с матричными коэффициентами

$$-(y^{[1]})' - R^* y^{[1]} + Qy = 0, \qquad x \in R_+. \tag{1}$$

Пусть далее матрицы $P_1 = (p_{ij}^{(1)})$, $Q_1 = (q_{ij}^{(1)})$ и $R_1 = (r_{ij}^{(1)})$ обладают теми же свойствами, что и матрицы P, Q и R, а вектор-функции y, $y^{[1]} := P_1(y' - R_1 y)$ определены и y, $y^{[1]} \in AC_{loc}(R_+)$.

Рассмотрим второе дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(y^{[1]})' - (R_1)^* y^{[1]} + Q_1 y = 0, \qquad x \in R_+ \tag{2}$$

и через T обозначим фундаментальную матрицу системы решений этого уравнения, столбцы которой имею вид $(u_j, u_j^{[1]})^t$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$, где u_j - линейно независимые векторные решения уравнения (2) (квазипроизводные определяются посредством матриц P_1 и R_1).

Работа посвящена установлению достаточных условий на коэффициенты матриц P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 и фундаментальную матрицу T систему решений уравнения (2), обеспечивающих асимптотическую близость решений уравнений (1) и (2) при $x \to +\infty$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрицы P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 и T таковы, что*

$$\int_0^{+\infty} \left\| T^{-1} \begin{pmatrix} R - R_1 & P^{-1} - P_1^{-1} \\ Q - Q_1 & -R^* + R_1^* \end{pmatrix} T \right\| < +\infty. \tag{3}$$

Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ уравнение (1) имеет решение $\phi(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] u_j(x) \quad \text{и} \quad \phi^{[1]} = \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] (u_j)^{[1]}(x),$$

где $a_j(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (j=1,2,...,2n), а $||.||$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы (первая квазипроизводная вектор-функции ϕ определяется посредством матриц P и R, а вектор-функций u_j - посредством матриц P_1 и R_1).

В качестве примера рассмотрим случай $n = 2$.

Пусть $P_1 = I$, $R_1 = \sigma_1(x)$, $Q_1 = -\sigma_1^2(x)$, где I - единичная матрица второго порядка, а вещественная, симметрическая матрица $\sigma_1(x)$ имеет вид:

$$\sigma_1(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \\ \dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1} & -\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{pmatrix}.$$

$(\alpha > 2, 0 < \beta < \alpha)$.

Пусть далее, $P = I$, $R = \sigma(x)$, $Q = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x) = (s_{ij})(x)$ - вещественная, симметрическая матрица второго порядка, квадраты элементов которой локально суммируемы на полуоси ($s_{ij}^2 \in L^1_{loc}(R_+)$); x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ - возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $x_0 = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. Выберем произвольную точку $\nu_k \in [x_k; x_{k+1})$ и определим элементы $s_{ij}(x)$ матрицы $\sigma(x)$, полагая: $s_{11}(x) = s_{22}(x) = -\frac{\nu_k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $s_{12}(x) = s_{21}(x) = \frac{\nu_k^{\beta+1}}{\beta+1}$ при $x \in [x_k, x_{k+1})$.

Тогда, если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1}^{\alpha} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+1}^{2\alpha+1}}{(x_k^{\alpha} + x_k^{\beta})^{1/2}} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty,$$

то матрицы $\sigma(x)$ и $\sigma_1(x)$ удовлетворяют условию (3) теоремы 1 (более подробно см. [1] и [2]).

Автор выражает благодарность проф. Мирзоеву К.А. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 11-01-00790-а и № 12-01-31491-мол а, и Минобрнауки РФ, грант № 1.5711.2011.

Литература

1. Сафонова Т.А. Асимптотическое интегрирование систем квазидифференциальных уравнений второго порядка // Математические заметки. – 2011. – 89, Вып.6. – С.951-953.

2. Мирзоев К.А., Сафонова Т.А. Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций // Уфимский математический журнал. – 2011. – 3, №3. – С.105-119.

ABOUT ASYMPTOTIC INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM OF SECOND ORDER WITH NOT SMOOTH COEFFICIENTS

T.A. Safonova

Severny Federalny University,
Morskoi Av., 26, Severodvinsk, 164515, Россия, e-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Key words: differential equations, nondifferential coefficients, vector-function, matrix-functions.

MSC 65D05

МЕТОД КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

С.М. Ситник, А.С. Тимашов, С.Н. Ушаков

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: mathsms@yandex.ru; aleksandrtim@rambler.ru
Воронежский государственный университет,
Университетская пл. 1, Воронеж, 394036, Россия, e-mail: ushakowww@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются задачи интерполяции функций при помощи целочисленных сдвигов квадратичной экспоненты — функции Гаусса. Различные известные подходы к численному решению этого класса задач сталкиваются со значительными трудностями. Поэтому рассматривается подход, основанный на конечномерных приближениях при помощи линейных систем. Доказана однозначная разрешимость возникающих систем, исследованы предельные свойства решений, их связь с тета-функциями Якоби. Отдельно рассмотрены случаи систем с равным числом уравнений и неизвестных, а также переопределённых систем.

Ключевые слова: целочисленные сдвиги, гауссиан, линейные системы, тета-функции, переопределённые системы.

1. Введение. Интерполяционная задача. В течение длительного времени основным инструментом приближений были разложения по полным ортогональным системам. Однако, за последние годы в различных разделах математики и прикладных областях оформился весьма широкий круг задач, решение которых требует использования разложений функций по неполным, переполненным или неортогональным системам. Такие задачи возникают, например, при изучении электрических или оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, при моделировании процессов в томографии и медицине. Примерами переполненных систем являются фреймы, а неортогональных — всплески, системы Габора (когерентные состояния), функции Рвачёвых и другие.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Известно, что эта система неполна в стандартных пространствах, тем не менее она часто и с успехом используется. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1]- [5].

Более точно, будет исследована следующая основная

Интерполяционная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в вероятностных приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, также определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда

по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}\,(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f\,(m) = \tilde{f}\,(m)\ , \quad m \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Известны несколько подходов к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета–функций Якоби [1]- [2]. Однако, как показано в [3]- [4], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [3]- [4], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой усложнения алгоритма, при этом вычисления эффективны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Чтобы преодолеть указанные трудности, в работах [6]- [9] был предложен прямой метод решения поставленной задачи интерполяции, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ. Рассмотрены также случаи переполненных систем линейных уравнений, а также предельные свойства решений конечномерных систем.

Для дальнейшего изложения введём удобное обозначение для квадратичной экспоненты

$$e\,(\sigma, x, k) = e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{3}$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению последовательности неизвестных коэффициентов f_k из (1). Для этого, следуя стандартной схеме решения задач интерполяции, необходимо построить узловые функции для каждого узла интерполяции $x = m,\ m \in \mathbb{Z}$. В нашем случае достаточно построить одну *базисную узловую функцию* для узла при $x = 0$, которую мы будем искать в виде

$$G\,(\sigma, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\ e(\sigma, x, k)\,. \tag{4}$$

Вывод определяющих соотношений и бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции известен, для полноты изложения мы кратко повторим эти выкладки, следуя [3]- [4].

Из (2) следует, что эта базисная узловая функция должна удовлетворять основному условию при всех $m \in \mathbb{Z}$:

$$G\left(\sigma, m\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \; e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}\,, \tag{5}$$

где σ_{m0} есть символ Кронекера

$$\sigma_{m0} = \begin{cases} 1, \; m = 0 \\ 0, \; m \neq 0. \end{cases}$$

Предположим, что такая функция $G\left(\sigma, x\right)$, удовлетворяющая условию (5), уже найдена. Тогда нетрудно выписать формальное решение поставленной задачи. Действительно, функция

$$G_l\left(\sigma, x\right) = G\left(\sigma, x - l\right)$$

является узловой функцией для узла при $x = l$, так как при всех значениях m

$$G_l\left(\sigma, m\right) = G\left(\sigma, m - l\right) = \sigma_{ml}\,.$$

Тогда одним из решений поставленной интерполяционной задачи будет, очевидно, функция

$$\tilde{f}\left(x\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(l\right) G_l\left(\sigma, x\right)\;, \tag{6}$$

так как при $x = m$ от суммы (6) остаётся только одно слагаемое:

$$f\left(m\right) G_m\left(\sigma, m\right) = f\left(m\right) \cdot 1 = f\left(m\right).$$

Чтобы перейти от представления решения в виде (6) к искомому представлению в виде (1), выполним необходимую подстановку. В результате получим с учётом (4):

$$\tilde{f}\left(x\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(l\right) G_l\left(\sigma, x\right) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(l\right) G\left(\sigma, x - l\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(l\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_k \; e\left(\sigma, x - l, k\right)\;.$$

Введём новый индекс суммирования $j = l + k$ вместо $l = j - k$ и формально поменяем порядок суммирования. Тогда получим

$$\begin{gathered} \tilde{f}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(j-k) g_k \; e(\sigma, x - j, k) = \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} f\left(j - k\right) g_k \right\} \; e\left(\sigma, x - j, k\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j \; e\left(\sigma, x, j\right)\;, \end{gathered} \tag{7}$$

где искомые коэффициенты разложения представляются в виде (после замены индексов $j \rightleftarrows k$, чтобы согласовать результат с (1)),

$$f_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(k-j\right) g_j \,, \tag{8}$$

где $f(m)$ — значения заданной функции в целых точках, а g_j — коэффициенты разложения базисной узловой функции (4).

Преобразуем систему уравнений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e\left(\sigma, m, k\right) = \sigma_{m0} \,, \quad m \in \mathbb{Z} \,.$$

Для этого введём новую переменную $q = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$. Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k q^{(m-k)^2} = \sigma_{m0} \,, \quad m \in \mathbb{Z} \,. \tag{9}$$

Для численного решения необходимо рассмотреть конечномерные усечения полученной бесконечной системы уравнений (9).

2. Переход к конечномерным аппроксимациям интерполяционной задачи. Как было показано выше, при решении задач интерполяции ключевым моментом является построение узловой функции. Перейдём теперь к рассмотрению конечномерных приближений первоначальной интерполяционной задачи, которые получаются в результате перехода от бесконечномерной системы к её конечномерным «усечениям». Этот естественный подход, основанный на приближении решений изучаемой интерполяционной задачи решениями конечномерных систем, рассматривался в работах [6]- [9]. Разумеется, такой подход имеет свои ограничения, но вместе с тем он позволяет обойти некоторые сложности, возникающие при перечисленных выше других подходах, и расширяет возможности эффективного численного решения интерполяционной задачи.

Итак, будем искать приближения для узловой функции (4) $G\left(\sigma, x\right)$ в виде приближающей её функции $H\left(\sigma, x\right)$ в виде конечных сумм

$$H\left(n, x, \sigma\right) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \cdot q^{(x-k)^2}, \; q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \,, \quad 0 < q < 1 \,, \tag{10}$$

при этом бесконечная система (9) заменяется конечной, причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$H(n, m, j, \sigma) = \delta_{0j} \,, \quad j = -m, \ldots, 0, \ldots m \,, \quad m \geq n \,. \tag{11}$$

В системе линейных уравнений, которая получается из условий (10)-(10), всего $2m+1$ уравнений и $2n+1$ неизвестных d_k, $-n \leq k \leq n$.

Перепишем систему уравнений, вытекающую из (10)-(11) в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{12}$$

где соответствующие элементы матрицы и вектора правой части представляются в виде

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2},\ y_j = \delta_{0j}\,, \quad i = -n, \ldots, 0, \ldots, n\,, \quad j = -m, \ldots, 0, \ldots, m\,.$$

Для полученных при $m = n$ коэффициентов d_k приближённую узловую функцию будем обозначать как $H(n, x, \sigma)$, а при $m > n$, — как $H(n, m, x, \sigma)$.

Введём некоторые обозначения. Определитель Вандермонда размера n обозначим через $Wx_1, \ldots, x_n$, определитель Вандермонда без l–ой строки и k–ого столбца — $W_{l,k}x_1, \ldots, x_n$. Для наглядности общие выкладки далее с определителями и матрицами произвольных порядков будем иллюстрировать объектами размером 5×5 и получающимися из них, например,

$$Wx_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix},$$

$$W_{3,2}x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Как известно [10, стр. 273],

$$W_{l,k}x_1, \ldots, x_n = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_{n-k}} \cdot \prod_{n \geq i > j \geq 1,\ i \neq l, j \neq l} x_i - x_j\,, \tag{13}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $n - k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ из набора $1, 2, \ldots, n$.

Нам также потребуется третья тета-функция Якоби [11]

$$\vartheta_3\,(z, q) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} \cos\,(2kz)\ ,$$

и формула тета-преобразования Якоби-Пуассона [11]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+\pi k)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{a}}\, e^{i2kt}\,. \tag{14}$$

3. Случай равного числа уравнений и неизвестных. Теперь основным объектом нашего изучения становится система линейных уравнений (12) с квадратной или

прямоугольной матрицами. Далее используются обозначения, введённые в соотношениях (10)–(12).

Докажем корректность системы (12) в случае равенства числа неизвестных и уравнений. Напомним, что это означает, что в случае квадратной матрицы система всегда имеет, притом единственное, решение.

Теорема 1. *Матрица A при $m = n$ — невырождена, а её определитель равен*

$$|A| = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot W q^{-2n}, \dots 1, \dots, q^{2n}\,. \tag{15}$$

□

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & q & q^4 & q^9 & q^{16} \\ q & 1 & q & q^4 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 1 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & q & 1 \end{vmatrix}$$

Элементы этого определителя можно разложить на множители

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2} = q^{i^2} \cdot q^{-2ij} \cdot q^{j^2}.$$

Следовательно, из i–той строки можно вынести q^{i^2}, а из j–ого столбца — q^{j^2}. Проведем эту операцию со всеми строками и столбцами:

$$|A| = q^4 \cdot q \cdot 1 \cdot q \cdot q^4 \cdot \begin{vmatrix} q^{-4} & q^{-3} & 1 & q^5 & q^{12} \\ 1 & q^{-1} & 1 & q^3 & q^8 \\ q^4 & q & 1 & q & q^4 \\ q^8 & q^3 & 1 & q^{-1} & 1 \\ q^{12} & q^5 & 1 & q^{-3} & q^{-4} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & q^4 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & q^{-4} & q^{-8} \end{vmatrix}.$$

Теперь элементами промежуточного определителя являются q^{-2ij}, осталось вынести из i-х строк множители q^{2ni}, $i = -2n, \dots, 2n$, произведение которых в силу симметрии равно 1:

$$q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & q^4 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & q^{-4} & q^{-8} \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & q^8 & q^{12} & q^{16} \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & q^8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^{-2} & q^{-4} & q^{-6} & q^{-8} \\ 1 & q^{-4} & q^{-8} & q^{-12} & q^{-16} \end{vmatrix} =$$

$$= q^{20} \cdot \begin{vmatrix} 1 & q^4 & q^{4^2} & q^{4^3} & q^{4^4} \\ 1 & q^2 & q^{2^2} & q^{2^3} & q^{2^4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^{-2} & q^{-2^2} & q^{-2^3} & q^{-2^4} \\ 1 & q^{-4} & q^{-4^2} & q^{-4^3} & q^{-4^4} \end{vmatrix}.$$

В общем же случае результат проведенных преобразований выглядит так:

$$\det A = \prod_{i=-n}^{n} q^{i^2} \cdot \prod_{j=-n}^{n} q^{j^2} \cdot \prod_{i=-n}^{n} q^{2ni} \cdot Wq^{-2n}, \ldots 1, \ldots, q^{2n} =$$

$$= q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot Wq^{-2n}, \ldots 1, \ldots, q^{2n} = q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \cdot \prod_{i,j=-n\,,\quad i\neq j}^{n} q^{-2i} - q^{-2j}\,.$$

Отличие от нуля определителя Вандермонда гарантируется тем фактом, что в рассматриваемом нами случае справедливы неравенства $0 < q < 1$, при выполнении которых все сомножители в последней формуле для определителя ненулевые. ■

Замечание. Задача об обосновании корректности конечномерной линейной системы (12) была поставлена Л.А. Мининым и С.М. Ситником. Затем через довольно продолжительное время на основании численных расчётов А.С. Тимашовым была угадана формула для определителя (15). Строгое доказательство формулы (15) и вместе с тем корректности рассматриваемой линейной системы было найдено С.Н. Ушаковым.

Для формулировки дальнейших результатов введём понятие вектора-палиндрома, которое отражает симметричность компонент вектора относительно его «середин».

Определение 1. *Назовём n-мерный вектор x палиндромом, если выполняется соотношение между компонентами вектора*

$$x_i = x_{n+1-i}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Теорема 2. *Пусть дана система линейных уравнений*

$$A \cdot x = b\,, \tag{16}$$

где A – невырожденная матрица размера $n \times n$, для элементов которой выполняется соотношение

$$a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}\ \forall i, j = 1, \ldots, n\,,$$

и вектор b – палиндром, Тогда решение системы — вектор x также является палиндромом.

Условие теоремы 2 по сути означает, что каждая строка и столбец квадратной матрицы A сами являются палиндромами.

□ Так как матрица A — невырождена, то существует единственное решение x. Каждую i-ю строчку системы можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j = b_i\,.$$

Докажем, что вектор $y = x_n, x_{n-1} \ldots, x_1$ также является решением (16), а это в силу единственности решения и будет означать утверждение теоремы.

Действительно, для i-й строчки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-j} \cdot y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-i,j} \cdot x_j = b_{n+1-i} = b_i \,. \blacksquare$$

Продемонстрируем важность введённого понятия палиндрома, которое даёт возможность, используя свойство симметрии данных задачи, существенно уменьшать объём вычислений и, таким образом, повышать эффективность и работоспособность численных алгоритмов.

Следствие 1. *Для системы (12) решение симметрично, то есть $d_k = d_{-k}$.*

$\square$ Действительно, заметим, что для системы (12) выполнены условия теоремы 2:

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2} = q^{(n+1-i-(n+1-j))^2} = a_{n+1-i,n+1-j} \,.$$

Следовательно, $d_k = d_{-k}$. $\blacksquare$

Благодаря этому следствию, при численном решении уменьшается как число уравнений (практически вдвое), так и разрыв в порядке между элементами матрицы. Это приводит к уменьшению вычислительной сложности задачи и сокращению требуемого времени компьютерных расчётов, что позволяет рассматривать системы более высоких порядков при том же затраченном времени.

Важно, что коэффициенты d_k для приближений узловой функции, которые определяются равенством (10) и являются решениями системы (11)-(12), можно найти аналитически в явном виде.

Теорема 3. *Для коэффициентов d_k верна формула:*

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_{k,\,n+1} q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}}{W q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}} \,. \tag{17}$$

$\square$ Действительно, по правилу Крамера

$$d_k = \frac{\Delta_k}{|A|} \,.$$

Проведя с Δ_k преобразования, аналогичные уже проведённым при доказательстве теоремы 1 , получим

$$\Delta_k = (-1)^{n+1+k+1+n} q^{-k^2} q^{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} W_k q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n} \,,$$

отсюда

$$d_k = (-1)^k q^{-k^2} \frac{W_k q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}}{W q^{-2n}, \ldots, q^0, \ldots, q^{2n}} \,.$$

Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & q & q^4 & 0 & q^{16} \\ q & 1 & q & 0 & q^9 \\ q^4 & q & 1 & 1 & q^4 \\ q^9 & q^4 & q & 0 & q \\ q^{16} & q^9 & q^4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = q^{20} \cdot \begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^8 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^4 \\ 1 & 1 & 1 & q^{-1} & 1 \\ q^4 & q^2 & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^8 & q^4 & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} =$$

$$= q^{20}\cdot q^{-1}\cdot\begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^{8} \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^{4} & q^{2} & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^{8} & q^{4} & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} = q^{20}\cdot q^{-1}\cdot\begin{vmatrix} q^{-8} & q^{-4} & 1 & 0 & q^{8} \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & 0 & q^{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^{4} & q^{2} & 1 & 0 & q^{-4} \\ q^{8} & q^{4} & 1 & 0 & q^{-8} \end{vmatrix} =$$

$$= -q^{20}\cdot q^{-1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & q^{4} & q^{4^2} & q^{4^4} \\ 1 & q^{2} & q^{2^2} & q^{2^4} \\ 1 & q^{-2} & q^{-2^2} & q^{-2^4} \\ 1 & q^{-4} & q^{-4^2} & q^{-4^4} \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Следствие 2. *С учётом (13),*

$$d_k = \frac{(-1)^k q^{-k^2}\sum q^{\alpha_1}q^{\alpha_2}\dots q^{\alpha_{2n+1-k}}\cdot}{\prod\limits_{i\neq k, i=-n}^{n}|q^k - q^i|}, \tag{18}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $2n+1-k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1-k}$ из набора $-n, -n+1, \dots, n$.

Следствие 3. *Контрольные суммы можно записать в виде отношения определителей:*

$$H(n,j,\sigma) = q^{j^2}\frac{Wq^{-2n}\dots q^{-2}, q^{-2j}, q^{2}, \dots q^{2n}}{Wq^{-2n}\dots q^{0}\dots q^{2n}}.$$

$$g_n^{\sigma}(j) = \sum_{k=-n}^{n} d_k\, q^{(k-j)^2} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} q^{(k-j)^2}(-1)^k q^{-k^2}\frac{W_{k,\,n+1}q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}}{Wq^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}} =$$

$$= q^{j^2}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k q^{-2kj}\frac{W_{k,\,n+1}q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}}{Wq^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}}.$$

Сумма $\sum\limits_{k=-n}^{n}(-1)^k q^{-2kj}W_{k,\,n+1}q^{-2n}, \dots, q^{0}, \dots, q^{2n}$ представляет собой разложение по $n+1$ строке определителя $Wq^{-2n}\dots q^{-2}, q^{-2j}, q^{2}, \dots q^{2n}$.

Следствие 4. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\sigma\to\infty}|H(n, n+1, \sigma)| = C_{2n+1}^{n}.$$

Несмотря на наличие явной формулы (18) для коэффициентов d_k, применять её проблематично, что связано как с делением на малые величины, так и с вычислением суммы с большим числом C_{2n+1}^{n+1} слагаемых. Поэтому численное решение задачи (12)

является предпочтительным. Для проверки решения используются контрольные суммы $H(n, j, \sigma)$.

К задаче интерполяции могут применяться разные требования, связанные с точностью значений узловой функции в целых точках отрезка интерполяции, скоростью восстановления интерполируемой функции, диапазоном параметра σ. Отсюда возможны несколько разных подходов к решению этой задачи. Во-первых, узловую функцию можно строить во всех целых точках отрезка интерполяции, что в сочетании с использованием специализированных вычислительных пакетов (например, «Mathematica») даёт высокую точность для восстанавливаемой функции. Данный подход изучен в работах [6]- [9]. Во-вторых, узловую функцию можно строить на отрезке, состоящем из меньшего числа точек, чем требуемый отрезок интерполяции. В этом случае используются значения узловой функции в целых точках, вообще говоря, отличающиеся от нуля. Это влияет на точность восстановления, но зато уменьшает количество операций, необходимых для вычислений. Как показано в следствии 4, при росте σ значения $H(n, j, \sigma)$ $(j > n)$ становятся недопустимо велики. Для уменьшения данного эффекта можно воспользоваться следующим подходом: при построении узловой функции число уравнений берётся больше числа неизвестных $(m > n)$, см. далее.

Рассмотрим второй подход. В этом случае $m = n$, система (11) по теореме 1 совместна. Единственное решение вычисляется, например, методом Гаусса. Границы использования σ, при которых вычисления имеют смысл, естественным образом зависят от n.

Таблица 1

Контрольные суммы при $n = 12$.

σ	1.0	2.0	3.0	4.0
$H(12, 0, \sigma)$	1	1	0.99	52
$H(12, 4, \sigma)$	$-1.7 \cdot 10^{-20}$	$9.9 \cdot 10^{-13}$	$-7.2 \cdot 10^{-5}$	38
$H(12, 8, \sigma)$	$-1.6 \cdot 10^{-20}$	$-8.3 \cdot 10^{-14}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$	13
$H(12, 12, \sigma)$	$-7.9 \cdot 10^{-23}$	$-3.8 \cdot 10^{-14}$	10^{-6}	1.8
$H(12, 14, \sigma)$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	63.3	$2.3 \cdot 10^{4}$	$1.8 \cdot 10^{5}$
$H(12, 16, \sigma)$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	67	$2.9 \cdot 10^{5}$	$6.4 \cdot 10^{6}$

Как видно из табл. 1, с практической точки зрения сомнительны вычисления уже при $\sigma > 3$. Вне отрезка интерполяции $H(n, x, \sigma)$ сильно осциллирует. Кроме того, чем больше n, тем меньше растет контрольная сумма для $H(n, j, \sigma)$ за пределами отрезка интерполяции. Это иллюстрирует уже табл. 2.

Таблица 2

Наибольшие значения в целых точках за пределами отрезка интерполяции.

$H(20, 21, 1.0)$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$H(20, 23, 2.0)$	41.7	$H(20, 26, 3.0)$	$2.9 \cdot 10^{7}$
$H(40, 41, 1.0)$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$H(40, 43, 2.0)$	3.57	$H(40, 46, 3.0)$	$4.6 \cdot 10^{6}$
$H(60, 61, 1.0)$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$H(60, 63, 2.0)$	0.29	$H(60, 66, 3.0)$	$1.6 \cdot 10^{6}$
$H(80, 81, 1.0)$	$5.1 \cdot 10^{-18}$	$H(80, 83, 2.0)$	0.02	$H(80, 86, 3.0)$	$4.7 \cdot 10^{5}$

4. Случай переполненных систем. Теперь рассмотрим систему (11) с числом уравнений, большим, чем число неизвестных. Начнём с вычисления ранга этой системы.

Следствие 5. *Ранг системы (11) равен 2n+1.*

□ Действительно, поскольку изучаемый в теореме 1 определитель при $m > n$ является наибольшим ненулевым минором матрицы A размера $(2n+1) \times (2m+1)$, то её ранг равен $2n+1$. ■

При $m > n$ система (11) становится несовместной, коэффициенты d_k вычисляются методом наименьших квадратов. Для этого уравнение (12) умножается на матрицу, сопряженную к A. Как известно, $A^* = e\bar{A}^T$, элементы этой матрицы $a^*_{ij} = a_{ji} = \exp -(j-i)^2/2\sigma^2$. Получаем новую систему

$$C \cdot x = z\,, \tag{19}$$

в которой

$$c_{ij} = \sum_{k=-m}^{m} \exp -\frac{(i-k)^2}{2\sigma^2} \cdot \exp -\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2}\,,$$

$$z_j = \exp -\frac{j^2}{2\sigma^2}\,, \quad i,j = -n\ldots,0,\ldots n\,.$$

Систему (19) решаем, учитывая теорему 2. Явление осцилляции за пределами отрезка интерполяции в данном случае может быть значительно уменьшено, хотя при этом возникает эффект регуляризации, при котором значение функции $H(n,m,x,\sigma)$ в нулевой точке «растекается» по соседним узлам. Указанные эффекты можно увидеть в табл. 3.

Таблица 3

Контрольные суммы при $n = 12$, $m = 13$, и при $m = 24$.

σ	1.0	2.0	3.0	5.0
$H\,(12,13,0,\sigma)$	0.99	0.97	0.82	0.62
$H\,(12,13,6,\sigma)$	$-6.7\cdot10^{-5}$	-0.06	0.05	0.06
$H\,(12,13,12,\sigma)$	$-1.1\cdot10^{-3}$	$-6.7\cdot10^{-3}$	0.03	1.8
$H\,(12,13,14,\sigma)$	$5.1\cdot10^{-4}$	1.6	7.9	-2.6
$H\,(12,13,16,\sigma)$	$1.7\cdot10^{-6}$	3.5	89	-39
$H\,(12,24,0,\sigma)$	1.00	0.94	0.78	0.48
$H\,(12,24,6,\sigma)$	$-7.2\cdot10^{-5}$	-0.04	-0.04	-0.01
$H\,(12,24,12,\sigma)$	$-1.1\cdot10^{-3}$	-0.01	-0.03	0.01
$H\,(12,24,14,\sigma)$	$4.8\cdot10^{-4}$	-0.01	0.03	0.08
$H\,(12,24,16,\sigma)$	$1.6\cdot10^{-6}$	0.01	-0.03	-0.09

Теорема 4. *При $m \to \infty$ элементы матрицы C примут вид*

$$c_{ij} = \begin{cases} q^{\frac{i-j^2}{2}} m_\sigma, & \text{при нечётном } (i+j), \\ q^{\frac{i-j^2}{2}} M_\sigma, & \text{при чётном } (i+j), \end{cases} \tag{20}$$

где $m_\sigma = \vartheta_3 \frac{1}{2}; q_\sigma$, $M_\sigma = \vartheta_3 0; q_\sigma$, $q_\sigma = \exp -\pi\sigma$.

□ Преобразованием Якоби-Пуассона c_{ij} превращаются в пределе в тета-функцию

$$\lim_{m\to\infty} c_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(i-k)^2}{2\sigma^2} \cdot \exp -\frac{(k-j)^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{i^2-2ik+k^2}{2\sigma^2} - \frac{j^2-2jk+k^2}{2\sigma^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{k^2-(i+j)k}{\sigma^2} - \frac{j^2+i^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(k-\frac{i+j}{2})^2}{\sigma^2} - \frac{2j^2+2i^2-(i+j)^2}{4\sigma^2}.$$

или, с учётом (14),

$$\lim_{m\to\infty} c_{ij} = \exp -\frac{(i-j)^2}{4\sigma^2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(k-\frac{i+j}{2})^2}{\sigma^2} =$$

$$= \exp -\frac{(i-j)^2}{4\sigma^2} \cdot \vartheta_3 \frac{\pi(i+j)}{2}; q_\sigma,$$

где $q_\sigma = \exp -\pi\sigma$. В связи с периодичностью и четностью функция $\vartheta_3(i+j)/2\pi; q_\sigma$ принимает всего лишь два значения, причем это или минимальное значение $m_\sigma = \vartheta_3 \pi/2; q_\sigma$, или максимальное $M_\sigma = \vartheta_3 0; q_\sigma$. ■

5. Заключение. В работе рассмотрена задача об интерполяции произвольной функции при помощи целочисленных сдвигов гауссианов. Эта задача имеет ряд приложений, например, в теории сигналов. Анализируются недостатки и ограничения известных подходов к решению этой задачи. Для их преодоления рассматривается метод конечномерных аппроксимаций для нахождения узловой функции задачи, на вычислении которой основан интерполяционный метод. Рассматриваются случаи, когда аппроксимирующая система имеет равное число неизвестных и уравнений, а также число уравнений больше числа неизвестных. Для первого случая доказана корректность конечномерной системы линейных уравнений, выведена явная формула для главного определителя системы, изучены предельные свойства решений и их связь с тета-функциями Якоби. Для переполненных систем с числом уравнений больше числа неизвестных обосновывается на основании численных расчётов их необходимость и преимущества использования, также доказаны предельные свойства решений, проанализированы контрольные суммы.

Литература

1. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations / AMS Mathematical Surveys and Monographs. – 2007. – 141. – 349 p.
2. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Матем. заметки. –2014. – 96;2. – С.239-250.

3. Журавлёв М.В., Киселев Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета–функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. –2010. – 67. – С.107-116.
4. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – 17/2. – С.89-99.
5. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Лоренца и функций Гаусса // Научные ведомости БелГУ. Серия: Физика. Математика. –2014. – 12 (183);35. – С.214-217.
6. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2013. – 32. – С.184-186.
7. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – 2;56. – С.90-94.
8. Ситник С.М., Тимашов А.С. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов // Вестник Воронежского института МВД России. – 2014. – 2. – С.163–171.
9. Ситник С.М., Тимашов А.С. «Новые информационные технологии в автоматизированных системах» // Материалы семнадцатого научно–практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – 2014. – С.292-300.
10. И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. –М.: Наука, 1966. – 384 с.
11. E. T. Whittaker, G. N. Watson. A Course of Modern Analysis / Cambridge Mathematical Library, 1996. – 620 p.

METHOD OF FINITE DIMENSIONAL APPROXIMATIONS IN PROBLEMS OF INTERPOLATION BY QUADRATIC EXPONENTIALS

S.M. Sitnik, A.S. Timashov, S.N. Ushakov

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av., 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: mathsms@yandex.ru; aleksandrtim@rambler.ru
Voronezh State University,
University Sq., 1, Voronezh, 394036, Russia, e-mail: ushakowww@yandex.ru

Abstract. Some interpolation problems by integer shifts of Gaussians are under consideration. Known approaches for these problems are met with numerical difficuilties. Due to it, another method based on finite dimensional approximations by linear systems is proposed. The correctness of systems under consideration is proved, limit properties of solutions and their connections with Jacobi's theta-functions are studied. Both cases of well-determined and overdetermined systems are investigated.

Key words: integer shifts, Gaussian, linear systems, theta-functions, overdetermined systems.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 143

MSC 35L82

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.К. Уринов, К.С. Халилов

Ферганский Государственный университет,
ул. Мураббийлар (19), Фергана, (150100), Узбекистан, e-mail: urinovak@mail.ru, xalilov_q@mail.ru

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, интегральное условие, дробное дифференцирование.

В конечной односвязной области D плоскости xOy, ограниченной прямыми $x=0$, $y=1$, $x=1$, $x-y=1$, $x+y=0$ рассмотрим дифференциальное уравнение $Lu=0$ параболо-гиперболического типа, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & (x,y) \in D_1 = D \cap (y>0), \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} - (2\beta/y)\, u_y, & (x,y) \in D_2 = D \cap (y<0), \end{cases}$$

а $\beta, \lambda \in R$, причем $0<\beta<(1/2)$.

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача H_1. Требуется найти функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{(2,1)}_{x,y}(D_1) \cap C^2(D_2)$ удовлетворяющую уравнению $Lu=0$ в области $D_1 \cup D_2$ и следующим условиям:

$$u(0,y) = \mu_1(y), \quad \int_0^1 u(x,y)\,dx = \int_0^1 u(1,t)\,dt + \mu_2(y), \qquad 0 \le y \le 1; \tag{1}$$

$$a(x)\, D^{1-\beta}_{0x} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x)\, D^{1-\beta}_{x1} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) + \\ + c(x) \lim_{y\to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = e(x), \qquad 0<x<1; \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y), \qquad 0<x<1, \tag{3}$$

где $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $e(x)$ - заданные непрерывные функции,

$$D^{1-\beta}_{0x} q(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} q(t)\,dt, \qquad D^{1-\beta}_{x1} q(x) = \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} q(t)\,dt,$$

операторы дробного дифференцирования[1], $\Gamma(z)$-гамма-функция Эйлера.

Приведем схему исследования поставленной задачи H_1. Пусть $u(x,y)$ - решение задачи H_1. Учитывая условие (3) и $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right)$, примем обозначения $u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x)$, $0 \le x \le 1$; $\lim\limits_{y\to+0} u_y(x,y) = \lim\limits_{y\to-0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = \nu(x)$, $0<x<1$ и предположим, что $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(2,\delta)}(0,1)$, $\nu(x) \in C^2(0,1)$, $[x(1-x)]^{2\beta} \nu(x) \in C[0,1]$,

$\delta > 0$. Тогда, функция $u(x,y)$ в области D_2, как решение видоизменённой задачи Коши для уравнения $L_2 u = 0$, представима в виде [1]

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(z)[t(1-t)]^{\beta-1} dt - \gamma_2 (-y)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu(z)[t(1-t)]^{-\beta} dt, \qquad (4)$$

где $z = x + y(1-2t)$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(1-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

Пользуясь формулой (4) и условием (2),как и в работе [1], находим

$$A(x)\nu(x) = \gamma a(x)(1-x)^{\beta} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) + \gamma b(x) x^{\beta} D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x) - g(x), \quad 0 < x < 1. \qquad (5)$$

Здесь

$$\gamma = 2^{2\beta}\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(-\beta+1/2), \quad g(x) = \left[2^{1-2\beta}\Gamma(1-\beta)/\Gamma(1-2\beta)\right][x(1-x)]^{\beta} e(x),$$

$$A(x) = (1-x)^{\beta} a(x) + x^{\beta} b(x) - 2\left[(1-2\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)\Gamma(-\beta+1/2)\right]^{-1}[x(1-x)]^{\beta} c(x).$$

Из уравнения $L_1 u = 0$ и краевых условий (1),(2) при $y \to +0$ получим

$$\tau''(x) - \lambda^2 \tau(x) = \nu(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad (6)$$

$$\tau(0) = \mu_1(0), \qquad \int_0^1 \tau(x)\,dx = \mu_2(0). \qquad (7)$$

Следовательно, функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ удовлетворяют уравнениям (5),(6) и условиям (7). Доказано, что справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \quad a(x)b(x) \geq 0, \quad a(x)c(x) \leq 0, \quad b(x)c(x) \leq 0 \quad x \in [0,1], \qquad (8)$$

$$a(x),\ b(x),\ c(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1),\ e(x) \in C^2(0,1),\ [x(1-x)]^{3\beta} e(x) \in C[0,1]. \qquad (9)$$

Тогда задача $\{(5),(6),(7)\}$ *имеет единственное решение.*

Единственность решения задачи $\{(5),(6),(7)\}$ доказывается с использованием принципа экстремума для операторов $D_{0x}^{1-2\beta}$и $D_{x1}^{1-2\beta}$ [1], а существование решения- эквивалентным сведением рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи.

После того, как найдены функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из задачи $\{(5),(6),(7)\}$, решение задачи H_1 в области D_2 находится с помощью формулы (4), а в области D_1определяется как решение задачи об определении функции $u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1)$, удовлетворяющей уравнение$L_1 u = 0$ и условия (1), (2), $u(x,0) = \tau(x)$,$0 \leq x \leq 1$. Последняя задача исследуется, как и в работе [2].

Справедлива следующая основная

Теорема 2. *Пусть* $h_1(y), h_2(y) \in C[0,1]$ *и выполнены условия (8),(9). Тогда решение задачи* H_1 *существует и оно единственно.*

Замечание. Этим же методом можно исследовать задачу H_1 и в том случае, когда второе из условий (1) заменено условием $u(1,y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx + \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1.$

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа/ Москва: Наука, 1985. – 304 с.

2. Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – 6, №2. – С.339-349.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATION

A.K. Urinov, K.S. Khalilov

Fergana State University,
Murabbiylar (19), Fergana, (150100), Uzbekistan, e-mail: urinovak@mail.ru, xalilov_q@mail.ru

Key words: parabolic-hyperbolic equation, integral condition, fractional differentiation.

MSC 85A30

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

В.Е. Федоров

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: kar@csu.ru

Ключевые слова: гидродинамические уравнения, разрешимость, векторное поле.

При математическом моделировании в гидродинамике часто встречаются системы уравнений, содержащие уравнение несжимаемости $\nabla \cdot v = 0$ и векторные уравнения, содержащие сумму $(v \cdot \nabla)v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i v_{x_i}$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Такие системы уравнений иногда называют системами гидродинамического типа. Исследуем на однозначную локальную разрешимость начально-краевые задачи для одного класса систем уравнений, включающего в себя системы гидродинамического типа. Введем обозначения

$$\underset{1}{v} = (v_{x_1}, v_{x_2}, \ldots, v_{x_n}), \quad \underset{2}{v} = (v_{x_1x_1}, v_{x_1x_2}, \ldots, v_{x_nx_n}).$$

Через J обозначим некоторый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий точку t_0. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$(1 - \chi\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v + G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j} - r, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J, \tag{3}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n \leq 4$. Параметр $\chi \in \mathbb{R}$, как правило, характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu \in \mathbb{R}$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Задана вектор-функция $q = (q^1, \ldots, q^n)$ и функционалы G, G^i, G^{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, зависящие от t, v и от производных функций $v_1, \ldots, v_n$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ первого и второго порядков, G, G^i, $G^{ij} : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_\sigma \times (L_2(\Omega))^{n(n^2+n^3)} \to \mathbb{R}$. Например, G, G^i, G^{ij} могут быть функциями от интегралов по области Ω или ее подобластям от функции v и ее частных производных по пространственным переменным первого и второго порядков, функцией от значений v в фиксированных точках области и т. п.

Понятно, что при $q(t,x,v) \equiv v$ система (1), (2) является системой гидродинамического типа

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Через $\mathbb{L}_2^m$ будем обозначать m-ю декартову степень пространства $\mathbb{L}_2$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$ — соответствующий ортопроектор.

В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A = \Sigma\nabla^2$. Как известно, оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [1].

С помощью редукции исследуемой начально-краевой задачи к задаче Шоуолтера для полулинейного уравнения соболевского типа в банаховом пространстве, используя методы теории вырожденных полугрупп операторов [2], получим следующий результат

Теорема 1. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G^{ij} \in C^1(J \times \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{L}_2^{n^2+n^3}; \mathbb{R})$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (1)–(4).*

Следствие 1. *Пусть $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $\nu, \nu_1 \in \mathbb{R}$, $n \leq 4$, $q \in C^1(J \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$, $t_0 \in J$. Тогда при некотором $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$, существует единственное решение $v \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r \in C^1([t_0,t_1]; \mathbb{H}_\pi)$ задачи (3), (4) для системы уравнений обобщенного гидродинамического типа с нелинейной взякостью*

$$(1-\chi\nabla^2)v_t = \left(\nu + \nu_1 \int\limits_\Omega \sum_{j,m=1}^n \left|v_{x_m}^j(x)\right|^2 dx\right) \nabla^2 v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v - r, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J. \quad (6)$$

При $\nu_1 = 0$ (5), (6) является системой уравнений с линейной вязкостью, а при $q(t,x,v) \equiv v$ — системой уравнений Осколкова, моделирующей течение вязкоупругой несжимаемой жидкости [3, 4].

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Utrecht–Boston: VSP, 2003.

3. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 179. – С.126-164.

4. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2009. – 31. – С.3-144.

ABOUT SOLVABILITY OF EQUATIONS SYSTEM OF HYDRODYNAMIC TYPE

V.E. Fedorov

Chelyabinsk State University,
Kashirin Brothers St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia, e-mail: kar@csu.ru

Key words: hydrodynamic equations, solvability, vector field.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 149

MSC 46A12

FOURIER-BESSEL'S TRANSFORM OF A GENERALIZED FUNCTION VANISHING OUTSIDE A BOUNDED SURFACE

E.L. Shishkina

Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russia, e-mail: ilina_dico@mail.ru

Key words: Fourier-Bessel's transform, generalized functions, Scwartz's function, Euclidian space, linear functionals.

Let $\mathbb{R}_n^+$ denote an Euclidean space of points $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_1 > 0, ..., x_n > 0$ and the multiindex $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ runs through fixed positive numbers. The space $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+) = S_{ev}$ is the subspace of the Schwartz function space that consists of functions $\varphi(x)$ even in each variable $x_1, ..., x_n$. The space of linear continuous functionals, whose regular representatives are generated by the linear weighted form

$$(f, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\varphi(x)x^\gamma dx, \qquad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i},$$

is called the distribution space over S_{ev} and is denoted by $S'_{ev}(\mathbb{R}_n^+) = S'_{ev}$.

The Fourier-Bessel transform is denoted by formula

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)x^\gamma \, dx \,,$$

where $\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod\limits_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i \xi_i)$, $j_\nu(t) = \Gamma(\nu + 1)\left(\frac{2}{t}\right)^\nu J_\nu(t)$, $t \in \mathbb{R}_1$, $J_\nu(t)$ is Bessel functions of the first kind. Spaces S_{ev} and S'_{ev} are invariant to Fourier-Bessel transform (see [1]).

For the generalized function $f \in S'_{ev}$, vanishing outside a bounded surface $\Omega \subset \mathbb{R}_n^+$ the Fourier-Bessel transform is functional

$$(f(x), \mathbf{j}_\gamma(x, \xi))_\gamma = \int\limits_\Omega f(\sigma)\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)x^\gamma dx,$$

which acts as follows: function $\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)$ is replaced by a test function $\varphi_0(x, \xi) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi)$ for $x \in \Omega$ and $\varphi_0(x, \xi) = 0$ for $x \notin \Omega$, then functional f applies to $\varphi_0(x, \xi)$. The number obtained is independent of choice of this function $\varphi_0(x, \sigma)$.

The Fourier-Bessel transform of any generalized function $f \in S'_{ev}$ vanishing outside a bounded surface for any test function $\psi(x) \in S_{ev}$ is denoted by formula

$$\int (f(x), \mathbf{j}_\gamma(x, \sigma))_\gamma \, \widehat{\psi}(\sigma)\sigma^\gamma d\sigma = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j + 1}{2}\right)}(f, \psi)_\gamma.$$

We shall introduce a singular generalized weighted function (compare with construction in [2] page 247)

$$(\delta_\gamma(r-a),\varphi)_\gamma = \int\limits_{S_n^+(a)} \varphi(x)x^\sigma dS, \qquad \varphi(x)\in S_{ev}.$$

The Fourier-Bessel transform of $\delta_\gamma(r-R)$ is calculated according to the formula:

$$F_B[\delta_\gamma(r-R)](\xi) = \int\limits_{S_n^+(R)} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)x^\gamma\, dS_R = R^{n+|\gamma|-1}|S_n^+(1)|_\gamma j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(R|\xi|). \tag{1}$$

Following [3] we introduce the operator Δ_γ:

$$\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i},$$

where B_{γ_i} is Bessel operator:

$$B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i=1,...,n.$$

The formula (1) can be used for solving a problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle_\gamma u(x,t), \tag{2}$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=\delta_\gamma(x). \tag{3}$$

For $0<n+|\gamma|-\alpha<3$, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ the solution of (2)-(3) is

$$u(x,t) = C_{\alpha,\gamma}(n)t^{1-n-|\gamma|}\,{}_2F_1\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|-1}{2},\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{|x|^2}{t^2}\right),$$

where

$$C_{\alpha,\gamma}(n) = 2^{n+|\gamma|-\alpha-2}|S_1^+(n)|_\gamma \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-n-|\gamma|}{2}\right)}.$$

References

1. Lyakhov L.N. Multipliers of the mixed Fourier–Bessel transform // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 1997. – 17, V.214. – P.234–249.

2. Gel'fand, I.M., Shilov, G.E. Generalized functions. Vol. I: Properties and operations / Boston: Academic Press, 1964.

3. Kipriyanov I.A. Singular Elliptic Boundary Value Problems / Moscow: Nauka, 1996.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 151

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВНЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е.Л. Шишкина

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, Россия, e-mail: ilina_dico@mail.ru

Ключевые слова: преобразование Фурье-Бесселя, обобщенные функции, функция Шварца, евклидово пространство, линейные функционалы.

MSC 46E99

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.И. Эминов, В.С. Эминова

Новгородский государственный университет,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003, Россия,
e-mail: eminovsi@mail.ru

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, приближения Галеркина, гиперсингулярные уравнения.

Многие задачи теории дифракции и теории упругости описываются уравнением вида

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(a(\tau)\,a(t)\ln\frac{1}{|t-\tau|}\right)\right]u(t)\,dt+\int_{-1}^{1}K(\tau,t)\,u(t)\,dt=f(\tau)\,, \qquad (1)$$

где $a(\tau)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию: $0<a_0\le a(\tau)\le b_0$ при всех τ, $u(t)$ – неизвестная функция, ядро $K(\tau,t)$ является непрерывной функцией или имеет логарифмическую особенность. В работе [1] был исследован частный случай уравнения (1),когда функция $a(\tau)$ постоянна. Исследование уравнения (1) сводится к изучению гиперсингулярного интегро-дифференциального оператора

$$(Au)(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}u(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}dt\,, \qquad -1\le\tau\le 1.$$

Оператор A является симметричным положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ и имеет плотную область определения $D(A)$ [1]. Положительная определенность означает, что для любой функции u из области определения $D(A)$ оператора A справедливо неравенство

$$(Au,u)\ge\gamma^2(u,u)\ , \qquad \gamma>0.$$

Введем энергетическое пространство H_A симметричного положительно- определенного оператора A, как гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$[u,v]=(Au,v)\,,$$

$$[u]^2=(Au,u)\,.$$

Используя положительную определенность оператора A несложно доказать, что для любого u из области определения $D(A)$ оператора A справедливо неравенство

$$\gamma\,\|u\|\le[u]\le\frac{1}{\gamma}\,\|Au\|\,.$$

Положительно-определенный оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}. В следующей теореме этот результат усиливается.

Теорема 1. *Оператор, обратный к положительно определенному оператору A задается формулой*

$$\left(A^{-1}f\right)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln\left|\frac{\tau - t}{1 - \tau t + \sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right| dt.$$

и является вполне непрерывным в пространстве $L_2[-1,1]$.

Из этой формулы следует, что оператор A^{-1} является интегральным оператором с логарифмическим ядром. Теорема 1 позволяет доказать эквивалентность исходного уравнения, уравнению Фредгольма второго рода в энергетическом пространстве оператора A. Далее введем в рассмотрение систему функций

$$\varphi_n(\tau) = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}\sin\left[n\arccos(\tau)\right] = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{1/2}\sqrt{1-\tau^2}\,U_n(\tau), \quad n = 1,2,3,\ldots \quad .$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2\ [-1,1]$, а $U(\tau)$ – полиномы Чебышева второго рода: $U_1(\tau) = 1$, $U_2(\tau) = 2\tau$, $U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$ и т. д. Имеет место теорема.

Теорема 2. *Система функций*

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin\left[n\arccos(\tau)\right], \qquad n = 1,2,3,...$$

является полной в энергетическом пространстве H_A и ортонормированной.

Кроме того, введенные функции удовлетворяют известным условиям Мейкснера на ребре. Используя теоремы 1 и 2 получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет единственное решение в энергетическом пространстве H_A. Тогда приближенное решение, построенное методом Галеркина на основе базисных функций $\varphi_n(\tau)$, сходится к точному решению в пространстве H_A.*

Литература

1. Эминов С.И. Теория интегрального уравнения тонкого вибратора // Радиотехника и электроника. – 1993. – 38, Вып.12. – С.2160-2168.

2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970.

GROUND OF GALERKIN'S METHOD FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL HYPERSINGULAR EQUATIONS

S.I. Eminov, V.S. Eminova

Novgorod State University,
Bolshaya Sankt-Peterburgskaya Str., 41, Velikii Novgorod, 173003, Russia, e-mail: eminovsi@mail.ru

Key words: integral-differential equation, Galerkin's approximations, hypersingular equations.

MSC 26B10

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНВОЛЮЦИИ В $\mathbb{R}$

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Описывается класс аналитических инволютивных отображений в $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: инволюция, отображение, аналитические функции, алгебраические объекты.

В предыдущих публикациях авторов (см. [1-3]) было введено понятие обратимых во времени динамических систем и начато их систематическое исследование. Напомним, что динамическая система

$$\dot{X} = \mathsf{F}(X)\,, \quad \mathsf{F} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \tag{1}$$

называется обратимой, если отображение F таково, что для него существует инволюция W пространства $\mathbb{R}^d$ (эндоморфизм пространства, для которого при любом $X \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство $\mathsf{W}(\mathsf{W}(X)) = X$), для которой выполняется

$$\sum_j \frac{\partial \mathsf{W}_j(X)}{\partial X_k} \mathsf{F}_k(X) = -\mathsf{F}_j(\mathsf{W}(X))\,, \quad j = 1 \div d\,, \tag{2}$$

где здесь и далее используется соглашение о том, что все суммирования, для которых не указаны пределы, производится в пределах от 1 до d.

Как видно из определения, центральную роль в понятии обратимой системы являются инволюции *фазового* пространства $\mathbb{R}^d$ системы. Поэтому для решения принципиального вопроса теории обратимых систем – распознавания того, является ли наперед заданная динамическая система обратимой или нет, нужно иметь как можно больше информации о свойствах инволюций, без которой невозможно решение этой задачи. В настоящем сообщении мы решаем вопрос об описании нетождественных инволюций $\mathsf{W}(x)$ при $d = 1$, являющихся аналитическими функциями в некоторой окрестности своей единственной неподвижной точки. Указание на то, что этим классом исчерпываются все одномерные инволюции дано нами в [3] без подробного доказательства. Здесь приводим соответствующее доказательство.

Рассмотрим аналитические эндоморфизмы $\mathsf{W} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Если они инволютивными, то есть имеет место $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и не являются тождественными, то каждый из них имеет единственную неподвижную точку. Мы докажем, что класс всех таких эндоморфизмов описываются формулой $\mathsf{W}(x) = a - x$, где a – произвольная постоянная.

Введем в рассмотрение алгебру $\mathbb{A}^{(1)}$ последовательностей $\mathsf{w} = \langle w_n; \in \mathbb{N}_+\rangle$ с естественной операцией сложения, в которой операция умножения для каждой пары последовательностей $\mathsf{u} = \langle u_n; n \in \mathbb{N}_+\rangle$, $\mathsf{v} = \langle v_n; \in \mathbb{N}_+\rangle$, обозначаемая посредством $*$, вводится

следующим образом:

$$\big(\mathsf{u} * \mathsf{v}\big)_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u_m v_{n-m} \,. \tag{3}$$

Легко видеть, что введенная, таким образом, бинарная операция $*$, действительно, удовлетворяет всех свойствам коммутативного алгебраического умножения. Единицей относительно умножения $*$ является последовательность $\mathsf{e} = \langle 1, 0, 0, ... \rangle$ так, что для любой последовательности $\mathsf{w} \in \mathbb{A}^{(1)}$ имеет место $\mathsf{e} * \mathsf{w} = \mathsf{w} * \mathsf{e} = \mathsf{w}$. Множество последовательностей $\mathsf{A}_0^{(1)} = \{\mathsf{w}; w_0 = 0\}$ составляют идеал алгебры $\mathsf{A}^{(1)}$ так, что для любой $\mathsf{u} \in \mathbb{A}^{(1)}$ и для любой $\mathsf{w} \in \mathbb{A}_0^{(1)}$ выполняется $\mathsf{w} * \mathsf{u} \in \mathbb{A}_0^{(1)}$. С подробностями использования этой и подобных ей алгебр коэффициентов степенных рядов можно ознакомится в обзоре [4].

Для любого элемента $\mathsf{w} \in \mathbb{A}^{(1)}$ его n-я степень w_*^n определяется формулой

$$\big(\mathsf{w}_*^n\big)_m = \sum_{\substack{\langle j_1,\ldots,j_n\rangle: \\ j_1+\ldots+j_n=m}} \frac{m!}{j_1!\ldots j_n!} w_{j_1}\ldots w_{j_n} \,. \tag{4}$$

Отсюда сразу заключаем, что если $\mathsf{w} \in \mathbb{A}_0^{(1)}$, то

$$\big(\mathsf{w}_*^n\big)_m = 0 \quad \text{при} \quad m > n \,, \tag{5}$$

так как в суммируемых произведениях $w_{j_1}\ldots w_{j_n}$ обязательно имеются нулевые множители.

Каждая из последовательностей алгебры $\mathbb{A}^{(1)}$ определяет степенной ряд

$$\mathsf{W}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} w_m \,, \qquad x \in \mathbb{Z} \,. \tag{6}$$

Результатом алгебраических операций с рядами такого рода являются ряды, у которых коэффициенты вычисляется посредством соответствующих алгебраических операций с последовательностями их коэффициентов в рамках алгебры $\mathbb{A}^{(1)}$. Это следует из того, что для любых двух элементов $\mathsf{u} = \langle u_n; n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, $\mathsf{v} = \langle v_n; \in \mathbb{N}_+ \rangle$ из $\mathbb{A}^{(1)}$ и соответствующих им рядов

$$\mathsf{U}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} u_m \,, \qquad \mathsf{V}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} v_m$$

имеет место формула умножения

$$\mathsf{U}(x)\mathsf{V}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \big(\mathsf{u} * \mathsf{v}\big)_n \,. \tag{7}$$

Отсюда сразу следует, что для любого элемента $\mathsf{w} \in \mathbb{A}^{(1)}$ и соответствующего ему ряда (6) выполняется

$$\mathsf{W}^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \big(\mathsf{w}_*^n\big)_n \,. \tag{8}$$

Пусть теперь ряд (6) определяет аналитическую инволюцию $w(x)$ так, что для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$. Будем считать, что она не является тривиальной, то есть отличной от тождественной, $\mathsf{W}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. В этом случае она представляется монотонно убывающей функцией, определенной на всей оси $\mathbb{R}$, и поэтому у нее всегда имеется единственная неподвижная точка x_0, так как она представляется первой координатой единственной точки пересечения $\langle x_0, \mathsf{W}(x_0)\rangle$ графика этой функции с биссектрисой 1-го и 3-го квадрантов на плоскости $\langle x, \mathsf{W}(x)\rangle$. Не ограничивая общности, будем считать, что элемент w, определяющий инволюцию, принадлежит идеалу $\mathbb{A}_0^{(1)}$ алгебры последовательностей коэффициентов, так как для любой функции $\mathsf{W}(x)$, осуществляющей инволюцию, можно построить ряд Тейлора в соответствующей ей точке x_0 и перенести начало координат на плоскости $\langle x, \mathsf{W}(x)\rangle$ в точку $\langle x_0, \mathsf{W}(x_0)\rangle$. Таким образом, в ряду (5) коэффициент $w_0 = 0$.

Запишем уравнение $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$ в терминах ряда (6)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \mathsf{W}^n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m .$$

Приравнивая коэффициенты рядов в левой и правой частях равенства и учитывая (5), получаем бесконечную систему уравнений для коэффициентов w_m, $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{w_n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = \delta_{m1} , \qquad m \in \mathbb{N} . \tag{9}$$

Покажем теперь, что имеется единственная возможность удовлетворить этой системе уравнений в рамках сделанных нами выше предположений, а именно, положить $w_1 = -1$ и $w_n = 0$ при $n > 1$.

Заметим, сначала, что при $m = 1$ в (9) имеется только одно слагаемое с $n = 1$, которое, ввиду $\left(\mathsf{w}_*\right)_1 = w_1$, сводится к $w_1^2 = 1$, то есть $w_1 = \pm 1$. Рассмотрим, далее, значение $m = 2$, для которого (9), ввиду $\left(\mathsf{w}_*^2\right)_2 = 2w_1^2$, принимает вид

$$w_1 w_2 + w_2 w_1^2 = 0 .$$

При $w_1 = 1$, отсюда следует, что $w_2 = 0$, а при $w_1 = -1$ это равенство превращается в тождество.

Докажем индукцией по m, что в случае $w_1 = 1$ все последующие компоненты последовательности w равны нулю. Положим, что это утверждение нами доказано для всех значений вплоть до некоторого $m = l$, то есть $m_2 = ... = m_l = 0$. Рассмотрим уравнение (9) при $m = l + 1$. Учитывая предположение индукции и равенство $w_1 = 1$, оно в этом случае записывается в виде

$$w_1 w_{l+1} + w_{l+1} w_1^{l+1} = 0 ,$$

откуда следует, что $w_{l+1} = 0$. Таким образом, в случае $w_1 = 1$ получаем в качестве решения последовательность $\langle 0, 1, 0, ...\rangle$, что соответствует тривиальной инволюции $w(x) = x$, по договоренности, исключенной нами из рассмотрения.

Рассмотрим случай, когда $w_1 = -1$. Пусть $m = 3$. В этом случае (9) принимает вид $w_1 w_3 + 2w_2^2 w_1 + w_3 w_1^3 = 0$ или, учитывая $w_1 = -1$, $2w_3 + w_2^2 = 0$. Далее при $m = 4$ равенство (9) превращается в $w_1 w_4 + 4w_3 w_2 w_1 + 3w_2^2 + 6w_3 w_2 w_1^2 + w_4 w_1^4 = 0$ или, после подстановки $w_1 = -1$, $2w_3 w_2 + 3w_2^3 = 0$. Наконец, учитывая, что $w_3 = -w_2^2/2$, находим, что $w_2 = 0$, и поэтому $w_3 = 0$.

Далее, рассмотрим уравнения для значений $m \geq 4$, которые, ввиду $w_2 = w_3 = 0$, допускают представление в следующей форме:

$$w_1 w_m + \sum_{n=4}^{m} \frac{w_n}{n!} \left(\mathsf{w}_*^n\right)_m = w_1 w_m + w_m w_1^m + m! \sum_{n=4}^{m-1} \frac{w_n}{n!} \sum_{\substack{\langle j_1,\ldots,j_n\rangle: \\ j_1+\ldots+j_n=m}} \prod_{k=1}^{n} \frac{w_{j_k}}{j_k!} = 0\,, \quad m = 4, 5, \ldots\,. \tag{10}$$

Допустим, что система уравнений (10) допускает решение, у которого $w_m \not\equiv 0$ при $m > 1$ и пусть s – первый номер из набора $\{4, 5, \ldots\}$ такой, что $w_s \neq 0$. Заметим, что при $w_1 = -1$, если m – четное, то переменная w_m, которая присутствует только в первых двух слагаемых, выпадает из уравнения, а при нечетном m уравнение (10) принимает вид

$$w_m = \frac{m!}{2} \sum_{n=s}^{m-1} \frac{w_n}{n!} \sum_{\substack{\langle j_1,\ldots,j_n\rangle: \\ j_1+\ldots+j_n=m}} \prod_{k=1}^{n} \frac{w_{j_k}}{j_k!}\,, \tag{11}$$

где в правой части w_m отсутствует. Тогда из (11) следует, что s четное число, так как при нечетном s в уравнении (11) при $m = s$ в каждом из слагаемых в правой части имеется, по крайней мере, одно, у которого в произведении $w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_n}$ найдется множитель w_{j_k} с $j_k \geq 2$ и все такие множители имеют номера, меньшие s. Тогда, по определению номера s, все слагаемые равны нулю, что противоречит выбору s.

Положим в (11) $m = 2s - 1$. Тогда в сумме по n имеется только одно слагаемое с $n = s$, так как j_k, $k = 1, \ldots, n$ равны либо 1, либо должны быть не меньше s. Если они все равны 1, то $j_1 + \ldots + j_n = n < 2s - 1$, что противоречит условию суммирования $j_1 + \ldots + j_n = m = 2s - 1$. Если, хотя бы один из номеров, например, $j_1 \geq s$, то $j_1 + \ldots + j_n \geq s + n - 1$. Тогда, ввиду условия суммирования, $j_1 + \ldots + j_n = m = 2s - 1$, получаем $s \geq n$, то есть имеется одна возможность $n = s$. Таким образом, из (11) следует, что

$$w_{2s-1} = -\frac{(2s-1)!}{2s!(s-1)!} w_s^2\,. \tag{12}$$

Положим, теперь, в (11) $m = 3s - 2$, которое является четным числом. Тогда, как уже было сказано выше, для четного m из (10) следует

$$\sum_{n=s}^{3(s-1)} \frac{w_n}{n!} \sum_{\substack{\langle j_1,\ldots,j_n\rangle: \\ j_1+\ldots+j_n=3s-2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{w_{j_k}}{j_k!} = 0\,. \tag{13}$$

В этой сумме может быть не более двух ненулевых слагаемых с $n = s$ и $n = 2s - 1$. Во-первых, по той же причине, что и в случае с $m = 2s - 1$, имеем одно слагаемое $n = 2s - 1$

и при этом только одно из всех номеров, например, $j_1 = s$, а остальные равны 1. В этом случае, $j_1 + ... + j_n = s + 2(s-1)$. Во-вторых, если имеется еще одно значение n с $w_n \neq 0$, то для него должно быть, по крайней мере, два номера, например, j_1 и j_2 не меньших s. Тогда $j_1 + ... + j_n \geq 2s + n - 2$ и, с другой стороны, $j_1 + ... + j_n = 3s - 2$, то есть $n \leq s$ и поэтому $n = s$. При большем числе номеров $j_k \geq s$ нарушаются условия суммирования. Тогда, принимая в расчет эти два слагаемых, из (13) получаем

$$\frac{w_s}{s!} \cdot \frac{s(s-1)}{2} \frac{w_s^2}{(s!)^2} + \frac{w_{2s-1}}{(2s-1)!} \cdot \frac{w_s}{(s-1)!} = 0\,.$$

Подставляя в это выражение значение (12), приходим к равенству

$$-\frac{w_s^3}{2(s!)^2(s-1)!} = 0\,,$$

из которого случае, что $w_s = 0$, вопреки сделанному нами предположению.

Таким образом, в случае, когда $w_1 = -1$ получаем, что все $w_m = 0$ при $m > 1$, то есть единственным нетривиальным решением системы уравнений (9) является последовательность $\langle 0, -1, 0, ... \rangle$. Она соответствует инволюции $\mathsf{W}(x) = -x$.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Все нетривиальные аналитические инволюции* $\mathsf{W} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathsf{W}(\mathsf{W}(x)) = x$ *определяются формулой* $\mathsf{W}(x) = a - x$, $a = const$.

Литература

1. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. Обратимые динамические системы // Proceedings XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014 // Нальчик: Институт прикладной математики и автоматизации, 2014. – С.65-67.
2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О понятии обратимости динамических систем // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №5(202); 38. – С.138-147.
3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Обратимые в широком смысле динамические системы // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.89-96.
4. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Алгебра последовательностей коэффициентов степенных рядов аналитических функций // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.28-61.

ANALYTIC INVOLUTIONS IN $\mathbb{R}$

A.V. Subbotin, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of analytic involution images in $\mathbb{R}$ is described.

Key words: involution, analytic functions, algebraic objects.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 159

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MSC 37N25

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗРЫВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.А. Аматов, Г.М. Аматова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: amamtovm@bsu.edu.ru, amatova@bsu.edu.ru

Ключевые слова: биологические системы, разрывные дифференциальные уравнения, популяционная динамика.

Исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1),(1.2) описывающие динамику численностей трёх взаимодействующих популяций и представляющие основные (неполные) трофические структуры [1, стр. 170].

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - by), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-e + hx - gz), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-c + dy). \end{cases} \qquad (1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bz), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c - dz), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-e + hx - gz). \end{cases} \qquad (1.2)$$

Система (1.1) типа «продуцент, консумент, хищник» в ней x – численность продуцента, y – численность консумента, а z – численность хищника. Система (1.2) типа «хищник две жертвы» x и y – численности жертв, а z – численность хищника; a,b,c,d,e,h,g – положительные константы. Исследуется устойчивость таких систем, понимаемая, как «экологическая стабильность» [1, стр. 15].

Из множества работ, посвящённых данной проблеме, упомянем лишь недавно вышедшую монографию А.Д. Базыкина [1]. В этой и многих других работах самым тщательным образом исследована динамика единичной популяции и динамика системы двух взаимодействующих популяций. Что же качается системы трёх популяций, связанных трофическими отношениями, то вопрос об устойчивости таких систем весьма далек от окончательного решения.

Фазовый портрет расположения траекторий систем (1.1), (1.2) в первом октанте полностью зависит от величины определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. При $\Delta \neq 0$ либо одна из популяций в системах уравнений (1.1),(1.2) исчезает при $t \to 0$ – либо численности всех популяций неограниченно растут. Обе ситуации означают экологическую нестабильность систем (1.1),(1.2).

Как известно, в реально существующих экологических системах все три популяции существуют продолжительное время, и ни одна из них не исчезает и не имеет неограниченно растущей численности [1]. Значит системы (1.1),(1.2) с постоянными коэффициентами не достаточно точно описывают динамику реальных экологических процессов. Поэтому естественно считать некоторые коэффициенты систем (1.1),(1.2) зависящими от фазовых переменных.

При этом следует учитывать следующие обстоятельства: 1) вид зависимости коэффициентов уравнений от фазовых переменных может быть определен только экспериментально; 2) для различных сообществ эта зависимость будет различной, а значит, динамику каждого такого сообщества придётся исследовать отдельно, что значительно затруднит процесс получения общих закономерностей.

Избежать указанных осложнений позволяет применение дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Заменяем непрерывные системы (1.1),(1.2) системами с кусочно-непрерывными правыми частями. Последние определяем следующим образом. Первый октант делим на две части G^- и G^+ гладкой поверхностью S, на которой система имеет разрыв.

Систему (1.1) заменяем системой (2.1.1) в области G^- и системой (1.1.2) в области G^+. Аналогично уравнения (1.2) заменяем системой (2.2.1) в области G^- и системой (2.2.2) в области G^+.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - b_k y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-e + h_k x - g_k z), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-c + d_k y). \end{cases} \quad (2.1.k) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - b_k z), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c - d_k z), \\ \dfrac{dz}{dt} = z(-e + h_k x - g_k z). \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (2.2.k)$$

Движения разрывных систем $(2.i.j)$ определяются по А.Ф. Филиппову. Для системы $(2.1.k)$ поверхностью разрыва служит поверхность $z = z_0$, $z_0 = const$, $z_0 > 0$, а для системы $(2.2.k)$ плоскость $y = x$. Коэффициенты b_i, d_i таковы, что определители $\Delta_1 = ad_1 - b_1 c$ и $\Delta_2 = ad_2 - b_2 c$ имеют противоположные знаки.

Доказывается, что при выполнении указанных неравенств на поверхностях разрыва существуют области скользящих движений, в которых возможно появление устойчивых особых точек, предельных циклов и других стационарных режимов.

Интегрировании полученных таким образом кусочно-непрерывных систем осуществлялось с помощью компьютерных программ, разработанных авторами [2]. Рисунки с изображением траекторий систем $(2.i.j)$ опубликованы в работе [3].

Литература

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / Москва-Ижевск: РХД, 2003. – 357 с.

2. Аматов М.А., Аматова Г.М. и др. Применение математического пакета MAPLE 8 к интегрированию систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями // Вестник Херсонского Нац. техн. ун-та. – Херсон: ХНТУ, 2009. – Вып. 2(35). – С.19-24.

3. Аматов М.А. Аматова Г.М., Кунгурцев С.А. Исследование модели взаимодействия трёх популяций, связанных трофическими отношениями // Экологические системы и приборы. - 2011. – №12. – С.41-54.

OSCILLATIONS MODELING IN BIOLOGICAL SYSTEMS WITH THE USE OF DISCONTINUOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.A. Amatov, G.M. Amatova

Belgorod State University,
Pobedy Str., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: amamtovm@bsu.edu.ru, amatova@bsu.edu.ru

Key words: biologic systems, discount differential equations, population dynamics.

MSC 93B30

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯХ

А.И. Недошивина

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, 53, Воронеж, 394065, Россия, e-mail: vishechka87@mail.ru

Ключевые слова: алгоритм, локализация областей, массивы данных.

При эксплуатации систем видеонаблюдения объектов различного назначения возникает задача сжатия полученных данных, так как даже при скромных характеристиках видеопотоков количество информации, подлежащей хранению, чрезвычайно велико. В работе рассмотрена задача, возникающая в процессе реализации одной из методик сжатия видеоинформации.

Рассмотрим результат сохранения видеонаблюдений как последовательность массивов данных, подлежащих хранению. Например, могут сохраняться кадры с камер видеонаблюдения. При этом информация может сохраняться не со всего кадра целиком, а только с заранее определённой области экрана, что приводит к существенной экономии в объемах хранимых данных. При этом возникает задача определения нужной сохраняемой части данных, например, попиксельное определение координат сохраняемых точек. Так возникает задача о локализации области. Рассмотрим эту задачу подробнее. Для этой задачи существуют несколько различных алгоритмов решения, каждый из них имеет как свои достоинства, так и недостатки. В работе предлагается алгоритм решения, основанный на интегральных формулах Коши из теории функций комплексного переменного.

Как уже было указано, алгоритм основан на использовании теоремы и формулы Коши. Вычислим величину

$$K = \int\limits_{\Delta} \frac{dz}{z-w},$$

где Δ – контур данного многоугольника , w – данная точка плоскости. Тогда из теоремы и формулы Коши следует, что при $K = 0$ точка $w \in M$, то есть рассматриваемая точка попадает внутрь заданного многоугольника. При $K = 2\pi i$ точка $w \notin M$, то есть рассматриваемая точка лежит снаружи от рассматриваемого многоугольника. А при $K = \infty$ точка $W \in \Delta$, то есть оказывается на границе многоугольника, на практике в этом случае при вычислениях значением величины K оказывается некоторое большое число.

Вычислим величину K при данных координатах вершин многоугольника M и точки плоскости w. Рассмотрим случай многоугольника. Для этого возьмем одну его сторону и произведем все вычисления для нее. Интеграл для стороны многоугольника получается равен сумме арктангенсов и натуральных логарифмов. Но если включить сторону

в замкнутый контур многоугольника, логарифмы сокращаются. Величина K для многоугольника становится равной сумме арктангенсов.

Окончательная формула имеет вид

$$K = i\sum_k \left(\operatorname{arctg} \frac{(x_0 - x_k)(x_k - x_{k+1}) + (y_0 - y_{k+1})(y_k - y_{k+1})}{y_0(x_{k+1} - x_k) + y_k(x_0 - x_{k+1}) + y_{k+1}(x_k - x_0)} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{(x_0 - x_k)(x_k - x_{k+1}) + (y_0 - y_k)(y_k - y_{k+1})}{(y_0 - y_k)(x_{k+1} - x_k) + x_0(y_k - y_{k+1})} \right),$$

где (x_0, y_0) – точка, принадлежность которой многоугольнику мы исследуем, а суммирование распространяется на все стороны многоугольника.

Метод позволяет решать поставленную задачу о локализации точки также относительно криволинейных многоугольных областей аналитически при по-мощи явных вычислений. Кроме того, к числу достоинств предложенного метода можно отнести три его особенности:

- метод работает для криволинейных границ, составленных из кусков сплайнов, кривых Безье и т.д. при этом вычисления с помощью пакета MATHEMATICA несколько усложняются, однако без принципиальных затруднений доводятся до явных формул, как только заданы уравнения частей границы;
- метод выгодно применять, когда точка лежит вблизи границы области. Конкурирующие методы приводят к необходимости сравнивать практически равные числа, тогда как в данном методе сравнивать приходится существенно различающиеся по модулю величины: $0, 2\pi, \infty$;
- данный метод не требует выпуклости многоугольника в отличие от большинства других известных методов.

Таким образом, для локализации части экрана, полученного в результате видеонаблюдения, предлагается следующий алгоритм:

1. Координаты всех точек экрана подставляются в полученную формулу.
2. Сохраняются только те точки, которые попадают в заданную область локализации.

Изложенная методика может быть использована для оптимизации сохранения данных, получаемых, например, при записи на компьютер результатов слежения видеоаппаратурой.

Литература

1. Недошивина А.И., Ситник С.М. Об одной задаче компьютерной геометрии, применяемой при сжатии результатов видеонаблюдений // Труды молодых ученых (РАН, Владикавказский научный центр). – 2010. – №3. – С.23-28.

2. Недошивина А.И. О локализации точки относительно плоских областей / Материалы 8 международной научно-практической конференции: «Перспективные разработки науки и техники», Польша. 2012. – С.78-85.

APPLICATION OF SPECIAL ALGORITHMS OF DOMAIN LOCALIZATION AT VIDEO OBSERVATIONS

A.I. Nedoshivina

Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs,
Patriotov Av. 53, Voronezh, 394065, Russia, e-mail: vishechka87@mail.ru

Key words: algorithm, domain localization, body data.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 165

MSC 82B20

ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ГАМИЛЬТОНИАНОВ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ СО СВОБОДНЫМИ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Клюев, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Устанавливается верхняя оценка для изменения матричных элементов гамильтониана векторной решеточной модели при введении в гамильтониан периодических граничных условий. Отношение этого изменения к объему системы стремится к нулю равномерно при термодинамическом предельном переходе.

Ключевые слова: векторная модель, гамильтониан, парное взаимодействие, периодические условия.

1. Введение. В предшествующей публикации (см. [1]) нами была поставлена задача об оценке близости основных состояний связанной пары решеточных моделей статистической механики классических систем: т.н. называемой векторной модели со свободными граничными условиями и соответствующей ей модели с периодическими граничными условиями. Такая задача возникает в связи с тем, что в статистической механике решеточных систем при изучении моделей, на состояния которых не накладывается никаких ограничений в виде их поведения вне заданной ограниченной области Λ фиксированной формы, часто применяется аппроксимация, при которой исходный гамильтониан H заменяется на связанный с ним гамильтониан $\widetilde{\mathsf{H}}$ с периодическими граничными условиями (см. [2]). Аппроксимация на основе введения периодических граничных условий особенно эффективна, когда взаимодействие между узлами решетки обладает конечным радиусом. Между тем, если приходится оценивать близость не статистических характеристик системы статистической механики, а, наоборот, оценивать близость физически родственных состояний, которые переходят друг в друга при введении (снятии) возмущения гамильтониана посредством введения (снятия) периодических граничных условий, то оценки на ее величину становятся уже не столь очевидными. В частности, это справедливо при вычислении основного состояния конечной системы, когда совсем не очевидно, что аппроксимация исходного гамильтониана H системы, который физически не обладает конечным радиусом действия, некоторым гамильтонианом конечного радиуса действия, должна приводить к близости соответствующих состояний. В то же время, именно структура основного состояния имеет первостепенное значение при определении низкотемпературного поведения статистических характеристик системы. В сообщении [1] было введено понятие аппроксимирующей системы с периодическими граничными условиями в том случае, когда она не обладает конечным радиусом действия и была дана оценку близости энергий указанных систем. Здесь мы покажем в

каком смысле гамильтонианы обоих рассматриваемых систем близки. Следует заметить, что решаемая здесь задача, ранее, в частном случае, была решена в работе [3].

2. Постановка задачи о близости основных состояний. Будем, далее, рассматривать системы статистической механики с пространством состояний

$$\mathfrak{S} = \bigotimes_{\mathbf{x}\in\Lambda}\{\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = s^2\}\,; \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

где $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$ – множество узлов решетки, являющееся геометрической моделью конечного кристалла [†)], $|\Lambda| = N < \infty$. Для простоты рассмотрений, считаем, что $\Lambda = \{-(L-1), ... -1, 0, 1, ..., L-1\}^d$, $L \in \mathbb{N}$.

Гамильтониан векторной модели представляет собой функционал на $\mathfrak{S}$ следующего вида

$$\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y})\Big)\,, \tag{1}$$

что соответствует при $n = 1, 2, 3$ моделям статистической механики, которые описывают системы взаимодействующих ионов, обладающих магнитным моментом s, со сферически симметричным обменным взаимодействием между ними, которое определяется обменным интегралом $I(\cdot)$. В формуле (1) функция $I : \mathbb{Z}^3 \mapsto \mathbb{R}$ обладает свойством $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и является суммируемой $\sum\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3} |I(\mathbf{x})| < \infty$ и, не ограничивая общности, можно считать, что $I(0) = 0$.

Зафиксируем множество Λ и на его основе определим для каждой точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$ действие оператора P_Λ проектирования. Точка $\mathbf{z}$ однозначно представима в виде $\mathbf{z} = 2L(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3) + \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Lambda$, $\mathbf{e}_j$ – орты в $\mathbb{R}^3$, $(\mathbf{e}_j)_i = \delta_{ij}$. В этом случае положим $\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

Гамильтониан $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]$, определяемый формулой

$$\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda,\,\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^d} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y})\Big)\,, \tag{2}$$

назовем гамильтонианом с периодическими граничными условиями, соответствующим гамильтониану $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$.

Определение основных состояний гамильтонианов (1) и (2), то есть полей $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$, реализующих минимум каждого из функционалов, сводится к решению задач на условный экстремум, соответственно, для функционалов $\mathsf{H}_\Lambda[\cdot]$ и $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\cdot]$ с большой совокупностью условий $\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = s^2$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. Большое число условий, которым нужно удовлетворить, к тому же неограниченно возрастающее при расширении Λ, то есть при переходе к термодинамическому пределу, делает применение стандартного метода решения задач на условный экстремум крайне затруднительным. Выход из создавшегося

[†]Изучение важного, с точки зрения статистической механики, случая двумерной системы, с точки зрения ответа на поставленный в настоящем сообщении вопрос, проводится теми же построениями.

положения связан с решением «ослабленной» задачи на условный экстремум с только одним условием, когда фиксируется не длина каждого отдельного вектора $\mathbf{s}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$, а сумма их квадратов, с последующей проверкой того, что найденное решение автоматически удовлетворяет указанной всей большой совокупности условий. Совсем необязательно, что такой путь решения задачи должен привести к поставленной цели, однако в уже исследованных ранее случаях (см. по этому поводу [4]), он оказался эффективным.

Итак, рассмотрим ослабленную задачу определения условного экстремума для функционалов $\mathsf{H}_\Lambda[\cdot]$ и $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\cdot]$ с условием

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = s^2 \,. \tag{3}$$

Как известно, такая задача сводится к определению безусловного экстремума для расширенных функционалов, соответственно,

$$\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] - \frac{\lambda}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}] - \frac{\lambda}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \mathbf{s}^2(\mathbf{x})$$

с неопределенным множителем Лагранжа λ. Так как функционалы $\mathsf{H}_\Lambda[\cdot]$ и $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\cdot]$ – квадратичные, то экстремальные поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ являются решениями линейных уравнений

$$\frac{\partial \mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]}{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})} = \lambda \mathbf{s}(\mathbf{x}) \,, \qquad \frac{\partial \tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\tilde{\mathbf{s}}]}{\partial \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})} = \lambda \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$$

или, что то же самое,

$$\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{s}(\mathbf{x}) \,, \qquad \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^3} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\tilde{\mathbf{s}}(\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{y}) = \lambda \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \,,$$

то есть они являются собственными функциями с соответствующими собственными значениями интегральных операторов

$$\big(\hat{\mathsf{H}}_\Lambda \mathbf{s}\big)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}(\mathbf{y}) \,, \qquad \big(\hat{\tilde{\mathsf{H}}}_\Lambda \tilde{\mathbf{s}}\big)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\tilde{\mathbf{s}}(\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{y})$$

на пространстве $\mathbb{L}_2\Big(\big(\mathbb{R}^3\big)^\Lambda\Big)$. Тогда задача об оценке близости основных состояний связана с оценкой матричных элементов разности операторов $\mathsf{V} = \hat{\tilde{\mathsf{H}}}_\Lambda - \hat{\mathsf{H}}_\Lambda$ в этом пространстве, где

$$\big(\mathsf{V}\mathsf{s}\big)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathsf{s}(\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{y}) \,. \tag{4}$$

3. Оценка матричных элементов оператора V. Результат, который мы предлагаем в этом сообщении, формулируется следующим образом.

Теорема. *Для оператора V с обменной функцией $I(\cdot)$, которая обладает свойством*

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3} |I(\mathbf{x})| < \infty \,, \tag{5}$$

при термодинамическом предельном переходе $\Lambda \to \mathbb{Z}^3$, *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^3} \frac{1}{|\Lambda|^{1/2}} \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} |\big(\mathsf{V}\mathbf{s}\big)(\mathbf{x})| = 0\,, \tag{6}$$

где $|\Lambda| = (2L-1)^3$ *– число узлов в* Λ.

□ Из (4) следует, что

$$\big(\mathsf{V}\mathbf{s}\big)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathsf{s}(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y})\,.$$

Тогда

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} |\big(\mathsf{V}\mathbf{s}\big)(\mathbf{x})| \le \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}\Big(\sum_{\mathbf{z}\neq 0}\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} |I(\mathbf{x}+2L\mathbf{z}-\mathbf{y})|\,|\mathbf{s}(\mathbf{y})|\Big) \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} |\mathbf{s}(\mathbf{y})|\Big(\sum_{\mathbf{z}\neq 0}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} |I(\mathbf{x}+2L\mathbf{z}-\mathbf{y})|\Big)\,.$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского,

$$\Big[\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} |\big(\mathsf{V}\mathbf{s}\big)(\mathbf{x})|\Big]^2 \le \Big[\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} |\mathbf{s}(\mathbf{y})|^2\Big]\Big[\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda}\Big(\sum_{\mathbf{z}\neq 0}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} |I(\mathbf{x}+2L\mathbf{z}-\mathbf{y})|\Big)^2\Big] =$$

$$= \Big[\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} |\mathbf{s}(\mathbf{y})|^2\Big]\Big[\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda}\Big(\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda} |I(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\Big)^2\Big] \equiv V^2\Big[\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} |\mathbf{s}(\mathbf{y})|^2\Big]\,,$$

где

$$V^2 = \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda}\Big(\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda-\mathbf{y}} |I(\mathbf{z})|\Big)^2.$$

Таким образом, достаточно доказать, что при $L\to\infty$ имеет место предельное соотношение $|\Lambda|^{-1}V^2 \to 0$.

Возьмем произвольные положительные числа ε и $\alpha < 1$ и разобьем внешнюю сумму в выражении для V^2 на две части

$$\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} \ldots = \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda\,:\,\max|y_j|<\alpha L} \ldots + \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda\,:\,\max|y_j|\ge\alpha L} \ldots \tag{7}$$

Для $\mathbf{y}\in\Lambda$ с компонентами y_j, для которых $\max|y_j| \ge \alpha L$, внутреннюю сумму оценим сверху посредством конечной величины (5),

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda-\mathbf{y}} |I(\mathbf{z})| \le \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3} |I(\mathbf{z})|\,.$$

Тогда вторая сумма в (7) оценивается следующим образом:

$$\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda\,:\,\max|y_j|\ge\alpha L}\ \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda-\mathbf{y}} |I(\mathbf{z})| \le (2L)^3(1-\alpha^3)\Big[\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3} |I(\mathbf{z})|\Big]^2.$$

Ввиду наличия у функции $I(\cdot)$ свойства (5), имеет место предельное соотношение

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{\mathbf{z}\,:\,\max|z_j|\geq M} |I(\mathbf{z})| = 0\,.$$

Тогда, при фиксированном значении α, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое M, для которого имеет место неравенство

$$\sum_{\mathbf{z}\,:\,\max|z_j|\geq(1-\alpha)L} |I(\mathbf{z})| < \varepsilon$$

при $L > M/(1-\alpha)$. Так как для векторов $\mathbf{y}$ с компонентами y_j, у которых $\max|y_j| < \alpha L$ имеет место

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda-\mathbf{y}} |I(\mathbf{z})| < \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3\setminus(1-\alpha)\Lambda} |I(\mathbf{z})| < \varepsilon\,.$$

Тогда первая сумма в (7) оценивается сверху как

$$\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda\,:\,\max|y_j|<\alpha L} \quad \sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3\setminus\Lambda-\mathbf{y}} |I(\mathbf{z})| < (2\alpha L)^3\varepsilon^2\,.$$

Следовательно, для величины V^2 имеем оценку сверху

$$V^2 < (2\alpha L)^3\varepsilon^2 + (2L)^3(1-\alpha^3)\Big[\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3} |I(\mathbf{z})|\Big]^2\,.$$

Так как $|\Lambda| = (2L-1)^3$, то

$$\lim_{L\to\infty} \frac{V^2}{|\Lambda|} \leq \alpha^3\varepsilon^2 + (1-\alpha^3)\Big[\sum_{\mathbf{z}\in\mathbb{Z}^3} |I(\mathbf{z})|\Big]^2\,.$$

Выбрав сначала число α достаточно близким к 1, а затем число ε достаточно малым, можно сделать правую часть неравенства сколь угодно малой. Следовательно, имеет место (7). ■

Литература

1. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Оценка энергии векторной решеточной модели с периодическими граничными условиями // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.121-125.
2. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971.)
3. Вирченко Ю.П. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга // Проблемы теоретической физики / Киев: Наукова думка, 1991. – С.80-96.
4. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели с парным взаимодействием. Случай вырожденного обменного интеграла // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.126-133.

CLOSENESS ESTIMATE OF HAMILTONIANS OF VECTOR LATTICE MODELS WITH FREE AND PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

A.S. Klyuyev, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. It is proved the upper estimate of hamiltonian matrix elements change of lattice vector model when periodic conditions are introduced into hamiltonian. The ratio of the change relative to system volume tends uniformly to zero at thermodynamic limit.

Key words: vector model, hamiltonian, pair interaction, periodical boundary conditions.

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40 171

MSC 85A25

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОЕ ПОЛУПРОЗРАЧНОГО ДИЭЛЕКТРИКА В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе, в приближении геометрической оптики, решается стационарная задача о вычислении потока энергии электромагнитного излучения внутри бесконечного слоя оптически полупрозрачного диэлектрика, вызванного неоднородным распределением в нем температуры.

Ключевые слова: перенос излучения, закон Стефана-Больцмана, оптический показатель, коэффициент отражения, геометрическая оптика.

1. Введение. Обычно, в физической литературе, расчёт радиационно-кондуктивного теплообмена в оптически полупрозрачных средах, осуществялется численными методами (см., например, [1], [2]). Это связано с тем, что задачи переноса излучения существенно отличаются от стандартных краевых и начально-краевых задач математической физики. Они, согласно своей математической формулировке, естественным образом, распадаются на два этапа. Первый этап состоит в вычислении вектора плотности потока $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ лучистой энергии в каждой точке $\mathbf{r}$, переносимой в единицу времени внутри оптически полупрозрачного образца, при произвольном распределении в нём температуры. Вычисление векторного поля $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ осуществляется на основе кинетического уравнения переноса излучения в приближении геометрической оптики, с учётом краевых условий для лучей на границе образца. Если образец оптически однороден, то зависимость от $\mathbf{r}$ поля $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ возникает посредством функциональной зависимости плотности потока энергии от неоднородного распределения температуры $T(\mathbf{r})$ в образце, так как само излучение возникает вследствие нагретости каждого физически малого объема образца среды, то есть в образце имеется распределенный источник излучения, интенсивность которого зависит от температуры.

Формальное решение уравнения переноса излучения с учётом условий на границе образца приводит к функционалу $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}; T)$ от распределения температуры $T(\mathbf{r})$ (см., например, монографии [3], [4]). После вычисления $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ на втором этапе решается начально-краевая задача для эволюционного уравнения, описывающего изменение распределения температуры, которое представляет собой уравнение теплопроводности с источником в виде дивергенции $-(\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}))$ при заданных условиях для температуры на границе образца. Как на первом, так и на втором этапе задачи, как правило, не поддаются точному аналитическому решению, за исключением образцов, имеющих довольно простую форму. В связи с этим, становятся очень важными приближенные аналитические методы, в частности, методы решения в виде разложений по степеням малого

параметра, например, в случае, когда имеется малое отклонение формы образца от той, при которой имеется точное решение. Именно неординарность математической постановки задач радиационно-кондуктивного теплообмена и сложность их исследования аналитическими методами приводят к преобладанию численных методов при решении практических задач, в рамках которых удается при построении алгоритма численной процедуры совместно решать кинетическое уравнение переноса излучения и уравнение теплопроводности (см. [3], [4], [5]).

В настоящей работе аналитически решается задача о вычислении плотности потока $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, то есть, согласно приведенному выше обсуждению, решается задача первого этапа о переносе излучения. Она решается для образца в виде слоя оптически полупрозрачной среды, ограниченного параллельными плоскостями. Возможно ее решения, как раз, представляет собой то редкое исключение, когда удается найти функцию $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ в виде ряда по степеням коэффициента отражения. Ниже, в разд. 2. приводится решение академической одномерной задачи переноса излучения на отрезке $[0, L]$, когда плотность потока зависит только от одной координаты x и представляется в виде функции $P(x)$, которая является функционалом от распределения температуры $T(x)$ на нем, $P(x) = P[T(x)]$ (см., по этому поводу [6]). Далее, в следующем разделе, это решение обобщается для решения задачи переноса излучения в слое полупрозрачной среды.

2. Одномерная задача переноса излучения. Пусть на отрезке $[0, L]$ имеется распределённый источник излучения, имеющий интенсивность $P_0(y)$ в каждой точке $y \in [0, L]$, где функция $P_0(y)/2$ физически представляет собой отнесённую к единичной площадке, перпендикулярной к отрезку, величину электромагнитной энергии излучения, которое проходит в каждом из возможных направлений (вправо и влево) в единицу времени. Множитель $1/2$ появляется в связи с тем, что, в стационарном случае, источник излучает равномерно во времени с одинаковой интенсивностью в обе стороны. Положим, что плотность распределения таких источников излучения на единице длины равна α, т.е. мера распределения источников на отрезке длиной dy равна αdy.

Каждый из лучей двигается равномерно со скоростью света внутри отрезка и, достигая границы, испытывает отражение с вероятностью (коэффициентом отражения) r. После этого он продолжает движение в обратном направлении. Движение луча (той его части, которая остаётся внутри образца при каждом из отражений) с последовательными отражениями от границ продолжается неограниченно.

Обозначим посредством $Q_{\pm}(s|y) \leq 1$, соответственно, доли вкладов относительно начальной интенсивности $P_0(y)$ в общий поток энергии электромагнитного излучения вправо и влево, которые остаются после прохождения лучами расстояния s, испущенного из точки y. А именно, знаками $+$ и $-$ мы пометили вклады в поток энергии от лучей, ушедшедших вправо и влево от источника в точке y.

Излучённые в точке y в направлениях $\pm$ лучи и имеющие, после прохождения расстояния s, интенсивности $Q_{\pm}(s|y)P_0(y)$, теряют, при прохождении отрезка длины ds, $\alpha Q_{\pm}(s|y)ds$ своей величины за счёт поглощения излучения средой. При этом коэффициент α поглощения совпадает с коэффициентом излучения, который определяет распределение источников. Совпадение этих коэффициентов обосновывается законом Кирхгофа, согласно которому, в каждой пространственной точке, интенсивность погло-

щения излучения совпадает с интенсивностью его излучения. Таким образом, функции $Q_{\pm}(s|y)$ удовлетворяют кинетическому уравнению переноса излучения

$$\frac{dQ_{\pm}}{ds} = -\alpha Q_{\pm}\,.$$

при начальном условии $Q_{\pm}(0|y) = 1/2$, где время измеряется в единицах расстояния, прошедшего лучом с постоянной скоростью света. Следовательно, $Q_{\pm}(s|y) = \exp(-\alpha s)/2$, если луч не испытал отражений от границ отрезка. В общем случае, при учёте отражений от границ, так как, при каждом отражении, луч теряет часть интенсивности, которая определяется коэффициентом отражения $r \leq 1$, имеем

$$Q_{\pm}(s|y) = r^{n_{\pm}(s|y)} \exp(-\alpha s)/2\,,$$

где $n_{\pm}(s|y)$ – число отражений от границ образца того луча, который выходит из точки y в направлении $+$ или $-$ и проходит расстояние s.

Обозначим, далее, $P_{\pm}(x)$ поток энергии излучения в точке x, идущий, соответственно, вправо и влево. Пару этих функций будем рассматривать как двухкомпонентный вектор $\langle P_{+}(x), P_{-}(x)\rangle$. При этом полный поток энергии $P(x)$ в точке x равен разности введённых потоков

$$P(x) = P_{+}(x) - P_{-}(x)\,. \tag{1}$$

В стационарном состоянии, каждый из потоков $P_{\pm}(x)$ излучения, состоящего из лучей, идущих вправо $(+)$ и влево $(-)$ от точки x, представляет собой сумму вкладов потоков $Q_{\pm}(s|y)$ от всех лучей, излучённых от всех точек y в различных направлениях и испытавших различное число отражений от границ образца. При этом для всех этих лучей, при фиксации точки y, должны быть соблюдены условия: 1) лучи приходят в точку x слева/справа; 2) полная длина пути лучей должна определяться из условий их выхода из точки y и прихода в точку x.

В связи с этим, обозначим, посредством $Q_{\sigma\rho}(x,y)$ для каждой фиксированной пары точек $\langle x,y\rangle$ и пары $\langle\sigma,\rho\rangle$ знаков, указывающих направления $\sigma,\rho = \pm$, доли потока энергии излучения, которое переносится лучами, выходящими из точки y в направлении ρ и приходящими в точку x, двигаясь по направлению σ. Набор введённых функций составляет 2×2-матрицу по индексам σ,ρ. Эту матрицу будем называть *матрицей перехода*. Для получения значений вектора $\langle P_{+}(x), P_{-}(x)\rangle$, согласно определению матрицы $Q_{\sigma\rho}(x,y)$, ее элементы, которые описывают доли потоков энергии, необходимо проинтегрировать по всем вкладам в общий поток от всех точек y с весом $P_0(y)dy$ и просуммировать по обоим направлениям излучения $\rho = \pm$. Тогда вектор $P_{\sigma}(x)$ вычисляется согласно следующей формуле

$$P_{\sigma}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\rho=\pm}\alpha\int_0^L Q_{\sigma\rho}(x,y)P_0(y)dy\,. \tag{2}$$

Следовательно, на основании (1), поток излучения $P(x)$ в точке x выражается следующим образом

$$P(x) = \frac{1}{2}\alpha \sum_{\sigma,\rho=\pm} \sigma \int_0^L Q_{\sigma\rho}(x,y)P_0(y)dy\,. \tag{3}$$

Остается вычислить матрицу $Q_{\sigma\rho}(x,y)$, что осуществляется посредством непосредственного пересчёта вкладов каждого из лучей. Это оказывается возможным благодаря одномерной геометрии задачи. При этом не приходится решать интегральные уравнения переноса излучения, о которых шла речь во введении.

Пусть $X_{\sigma\rho}(s|y)$ – координата текущей точки, достигнутой лучом, который прошёл общее расстояние s, выходя из точки y в направлении ρ и придя в текущую точку, двигаясь в направлении σ. Этот луч попадает в точку x после прохождения расстояний, равных $s_{\sigma\rho}^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, ...$ и совершения m отражений от границы. Они определяются как решения уравнения

$$X_{\sigma\rho}(s_{\sigma\rho}^{(m)}|y) = x\,, \quad m = 1, 2, ... \tag{4}$$

и, поэтому, являются также функциями от x и y, однако, мы далее не отмечаем явно этой зависимости.

Тогда функции $Q_{\sigma,\rho}(x,y)$ представляются формулой

$$Q_{\sigma,\rho}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{\sigma,\rho}(s_{\sigma\rho}^{(m)}|y)\,. \tag{5}$$

Таким образом, для вычисления матрицы $Q_{\sigma\rho}(x,y)$, необходимо найти траектории $X_{\sigma\rho}(s|y)$.

Вычислим, прежде всего, число $n_\sigma(s|y)$. Если луч был выпущен вправо, то, по прошествии ровно $n_+(s|y)$ отражений от границ, имеем

$$(L-y) + n_+(s|y)L < s < (L-y) + (n_+(s|y)+1)L\,.$$

Поэтому, беря целую часть, получаем

$$[(s+y-L)/L] = n_+(s|y)\,. \tag{6}$$

Точно также, по прошествии ровно $n_-(s|y)$ отражений от границ, для луча выпущенного влево, имеем

$$y + (n_-(s|y)-1)L < s < y + n_-(s|y)L\,.$$

Поэтому

$$[(s-y+L)/L] = n_-(s|y)\,. \tag{7}$$

Вычислим, теперь, длины $s_{\sigma\rho}^{(m)}$, $m = 1, 2, ...$ путей луча. Траектории $X_{\sigma\rho}(s|y)$ периодические по s с периодом $2L$. По этой причине, функции траектория $X_{\sigma\rho}(s|y)$ строятся сначала при $s < 2L$, а затем продолжается периодически. Заметим, что, для вычисления величин $s_{\sigma\rho}^{(m)}$, нам важны не сами траектории, а уравнения связывающие их с длиной пути s.

Функция $X_{++}(s|y)$ определяется равенством $X_{++}(s|y) = s+y$, если $s < L-y$. Далее, при $2L-y > s > L-y$ функция $X_{++}(s|y)$ не имеет смысла. Периодическое продолжение функции $X_{++}(s|y)$ из области $s < L-y$ для s, удовлетворяющих условию при $2nL-y < s < (2n+1)L-y$, $n = 1, 2, ...$, даёт уравнение

$$X_{++}(s|y) + (2n-1)L + (L-y) = s\,. \tag{8}$$

Для s, удовлетворяющих $(2n+1)L-y < s < 2(n+1)L-y$, $n = 0, 1, 2, ...$, функция $X_{++}(s|y)$ не определена.

Функция $X_{-+}(s|y)$ при $s < L-y$ не существует и, поэтому, она не имеет смысла при произвольных сдвигах на $2Ln$, $n = 1, 2, ...$ этой области, т.е. при $2nL-y < s < (2n+1)L-y$. Наоборот, она имеет смысл при $2L-y > s > L-y$, и в этом случае она определяется уравнением

$$(L - X_{-+}(s|y)) + (L-y) = s\,, \quad X_{-+}(s|y) = 2L-y\,.$$

При этом, ввиду периодичности, имеем, при $L-y+(2n+1)L > s > (2n+1)L-y$, $n = 0, 1, 2, ...$, уравнение

$$(L - X_{-+}(s|y)) + (L-y) + 2nL = s\,. \tag{9}$$

Аналогично вычисляются функции $X_{--}(s|y)$, $X_{+-}(s|y)$. Если $s < y$, то

$$X_{--}(s|y) = y - s\,,$$

а функция $X_{+-}(s|y)$ не имеет смысла. При сдвиге на $2nL$ имеем для s, удовлетворяющих неравенству $y+(2n-1)L < s < 2nL+y$, $n = 1, 2, ...$, уравнение для функции $X_{--}(s|y)$,

$$(L - X_{--}(s|y)) + y + (2n-1)L = s\,. \tag{10}$$

Функция же $X_{+-}(s|y)$, наоборот, имеет смысл при условии $y+2nL < s < y+(2n+1)L$, $n = 0, 1, 2, ...$ и при этом удовлетворяет уравнению

$$y + 2nL + X_{+-}(s|y) = s\,. \tag{11}$$

Она не имеет смысла при $y+(2n-1)L < s < y+2nL$, $n = 1, 2, ...$.

Из проведенного анализа следует, что уравнение (4) имеет следующие решения. Для простоты, мы не указываем явно аргументы в числах отражений n_ρ. Полагая в (8) $X_{++}(s|y)$ равным x, имеем для величин $s_{++}^{(m)}$, $m = 1, 2, ...$ при $x > y$ выражение

$$s_{++}^{(2n)} = 2nL + x - y\,, \quad n_+ = 2n,\ n = 0, 1, 2, ...\,, \tag{12}$$

и при $x < y$, соответственно, $s_{++}^{(n)} = 2nL + x - y\,, \quad n_+ = 2n,\ n = 1, 2, ...$. Аналогично, из (9) получаем

$$s_{-+}^{(2n+1)} = 2(n+1)L - x - y\,, \quad n_- = 2n+1,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

при любом соотношении между x и y. Из (10) находим при $x < y$

$$s_{--}^{(2n)} = 2nL + y - x\,, \quad n_- = 2n,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

и при $x > y$, соответственно, $s_{--}^{(n)} = 2nL + y - x\,, \quad n_- = 2n,\ n = 0, 1, 2, \dots$. Из (11) получаем выражение для функции $s_{+-}^{(n)}$ при любом соотношении между x и y,

$$s_{+-}^{(2n+1)} = y + 2nL + x\,, \quad n_+ = (2n+1)\,,\ n = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{15}$$

Теперь мы в состоянии вычислить матрицу перехода $Q_{\sigma\rho}(x, y)$. Согласно определению (5), имеем

$$Q_{\sigma\rho}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_\rho(s_{\sigma\rho}^{(m)}|y) = \sum_m r^{n_{\sigma\rho}^{(m)}} e^{-\alpha s_{\sigma\rho}^{(m)}}\,,$$

где $n_{\sigma\rho}^{(m)} = n_\rho(s_{\sigma\rho}^{(m)}|y)$, $m = 1, 2, ...$ даются формулами (12)-(15). Подставляя соответствующие выражения и производя суммирования, получаем

$$Q_{++}(x, y) = \theta(x-y)e^{-\alpha(x-y)} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} e^{-\alpha(2mL+x-y)} =$$

$$= e^{-\alpha(x-y)}\left[\theta(x-y) + r^2 e^{-2\alpha L}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\right]\,, \tag{16}$$

$$Q_{-+}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} e^{-\alpha(2(m+1)L-x-y)} =$$

$$= re^{-\alpha(2L-x-y)}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\,, \tag{17}$$

$$Q_{--}(x, y) = \theta(y-x)e^{-\alpha(y-x)} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} e^{-\alpha(2mL+y-x)} =$$

$$= e^{-\alpha(y-x)}\left[\theta(y-x) + r^2 e^{-2\alpha L}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\right]\,, \tag{18}$$

$$Q_{+-}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+1} e^{-\alpha(2mL+x+y)} = re^{-\alpha(x+y)}(1 - r^2 e^{-2\alpha L})^{-1}\,, \tag{19}$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда.

На основе вычисленных матричных элементов подсчитаем ядро интегрального преобразования

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\rho=\pm} \sigma Q_{\sigma\rho}(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q_{++} - Q_{--} + Q_{+-} - Q_{-+}\right)(x, y) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x-y)e^{-\alpha|x-y|} + \frac{re^{-\alpha L}}{1 - r^2 e^{-2\alpha L}}\left[\mathrm{sh}\alpha(L - x - y) + re^{-\alpha L}\mathrm{sh}\alpha(x-y)\right]\,. \tag{20}$$

Это ядро определяет, согласно (3), выражение для искомого потока энергии излучения в каждой точке x в зависимости от распределения $T(y)$, $y \in [0, L]$ температуры в образце,

$$P(x) = \alpha \int_0^L Q(x, y) P_0(y) dy \,. \tag{21}$$

Заметим, что это выражение зависит от геометрического параметра L образца. При постановке задачи радиационно-кондуктивного теплообмена нужно положить, что распределение интенсивности излучения $P_0(y)$ по образцу определяется распределением температуры $T(y)$ в нем, то есть имеет место функциональная зависимость $P_0(y) = P_0[T(y)]$. Вид этого функционала определяется оптическими свойствами вещества, из которого состоит рассматриваемый образец, а именно, он определяется, с точки зрения статистической физики, функцией распределения по частотам излучаемых фотонов в каждом физически малом объеме вещества, которая зависит от локальной температуры $T(y)$. Тогда $P_0(y)$ определяется интегралом по частотам от этой функции распределения с подходящим весом.

Таким образом, явный вид функционала $P_0[T(y)]$ может быть довольно разнообразным. Однако, часто используется грубая, но универсальная модель, которая оказывается довольно хорошим приближением с практической точки зрения. Это так называемое *серое приближение*, в рамках которого полагается, что $P_0[T] = \sigma T^4$, где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Наконец, укажем, что выражение (21) может быть представлено в более удобной для использования форме

$$P(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^L S(x, y) P_0[T(y, t)] dy \,, \tag{22}$$

где

$$S(x, y) = \frac{1}{2} e^{-\alpha|x-y|} + \frac{r e^{-\alpha L}}{1 - r^2 e^{-2\alpha L}} \left[\mathrm{ch}\alpha(L - x - y) + r e^{-\alpha L} \mathrm{ch}\alpha(x - y) \right] \,. \tag{23}$$

В рассматриваемой нами одномерной модели дивергенция потока энергии представляется производной $dP(x)/dx$. Это выражение может быть использовано при решении задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене в одномерном образце, моделируемом отрезком $[0, L]$. Эта задача состоит в самосогласованном определении распределения температуры, которое образуется вследствие процессов теплопроводности и переноса излучения. Для этого формулируется эволюционное уравнение для изменения распределения температуры $T(x, t)$ при предположении, что поток $P[T(x, t)]$ энергии теплового излучения определяется в каждый фиксированный момент времени t мгновенным распределением температуры $T(x, t)$. Это уравнение составляется на основе принципа баланса энергии – убыль потока энергии в каждой точке образца расходуется на локальное увеличение внутренней энергии, в противовес процессу теплопроводности, который

уносит тепло из данной точки. Поэтому оно представляет собой уравнение теплопроводности с источником в виде дивергенции потока излучения [3]. В рассматриваемом одномерном случае, это уравнение имеет вид

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial P(x)}{\partial x}\,, \tag{24}$$

где c – удельная теплоёмкость единицы массы вещества, ρ – плотность вещества, κ – коэффициент теплопроводности. С учетом представления (22) уравнение (24) записывается в более удобной для анализа форме

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\kappa T + \int\limits_0^L S(x,y)P_0[T(y,t)]dy\Big)\,. \tag{25}$$

3. Решение задачи о переносе излучения в слое. Решение задачи о переносе излучения в слое полупрозрачного диэлектрика представляет собой непосредственное обобщение построений предыдущего раздела.

Пусть имеется слой $\Lambda = \{\langle x,y,z\rangle : x \in [0,L]; y,z \in \mathbb{R}\}$ толщиной L вещества с распределённым в нем источником излучения, имеющим интенсивность $P_0(\mathbf{r},t)$ в каждой точке $\mathbf{r} \in \Lambda$ так, что вектор $P_\mu[T(\mathbf{r},t)] = P_0(\mathbf{r},t)n'_\mu/4\pi$, $\mu = 1,2,3$, $\mathbf{n}'^2 = 1$ физически представляет собой плотность потока энергии теплового электромагнитного излучения в единицу времени, излучаемой равномерно распределенного по всем направлениям точечным источником, то есть единичный вектор $\mathbf{n}'$ имеет равномерное распределение на единичной сфере. Положим, что плотность таких источников излучения в единице объема равна α, т.е. мера распределения всех источников в физически малом объеме $d\mathbf{r}'$ равна $\alpha d\mathbf{r}'$.

Обозначим $P_\mu(\mathbf{r},t)$, $\mu = 1,2,3$ – плотность потока энергии теплового излучения в пространственной точке $\mathbf{r}$ слоя в момент времени t. Интенсивность $P_0(\mathbf{r},t)$ излучения предполагается функционально зависящей от распределения $T(\mathbf{r},t)$ температуры в слое так, что $P_0(\mathbf{r},t) = P_0[T(\mathbf{r},t)]$. Тогда векторное поле $P_\mu(\mathbf{r},t)$, $\mu = 1,2,3$ также является функционалом от $T(\mathbf{r},t)$. Этот функционал определяется линейным преобразованием плотности потока $P_0(\mathbf{r},t)n'_\mu/4\pi$ излучаемой энергии так, что значение $P_\mu(\mathbf{r},t)$ в точке наблюдения с радиус-вектором $\mathbf{r} = \langle x,y,z\rangle$ имеет вид

$$P_\nu(\mathbf{r},t) = \alpha\int\limits_\lambda Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')P_{\nu'}[T(\mathbf{r}',t)]d\mathbf{r}'\,, \tag{26}$$

где интегрирование производится по всем точкам $\mathbf{r}' = \langle x',y',z'\rangle$ излучения, а интегральное ядро $Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\nu,\nu' = 1,2,3$ определяется решением задачи переноса излучения в слое.

Ядро $Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ представляется относительной по сравнению с $P_0(\mathbf{r}',t)$ долей энергии, принесенной лучом в точку $\mathbf{r} \in \Lambda$, который проходит ее в направлении $\mathbf{n}$, и излученным из точки $\mathbf{r}' \in \Lambda$ в направлении $\mathbf{n}$, то есть n_μ – единичный вектор направления

потока излучения в точке наблюдения излучения $\mathbf{r}$. При этом каждый луч двигается равномерно со скоростью света внутри слоя и, достигая границы, испытывает от нее отражение с коэффициентом отражения r по закону угол падения равен углу отражения так, что падающий и отраженный лучи находятся в одной плоскости. После этого он продолжает движение. Движение луча (той его части, которая остаётся внутри образца при каждом из отражений) с последовательными отражениями от границ продолжается неограниченно.

Займемся вычислением ядра $Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Представим его в виде суммы

$$Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} r^m Q^{(m)}_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,, \tag{27}$$

где m – число отражений луча от границы в процессе его движения в слое. Таким образом, нам нужно вычислить каждое из слагаемых $Q^{(m)}_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Это вычисление несколько различно в случаях, когда m четно или нечетно.

Легко понять, что для каждой пары пространственных точек $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ и каждой пары векторов $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}$ имеется только один луч $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{n};\mathbf{r}',\mathbf{n}')$, для которого эти точки являются, соответственно, точками излучения и наблюдения, а направляющие единичные векторы являются, соответственно, векторами, которые указывают направления излучения и наблюдения луча. Это означает, что при фиксация набора $\mathbf{r}',\mathbf{r};\,\mathbf{n}',\mathbf{n}$ полностью определяет число отражений m. Более того, ясно, что если $m = 2k$ – четно, то $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$, а если $m = 2k+1$ – нечетно, то вектор $\mathbf{n}$ получается из вектора $\mathbf{n}'$ отражением его компоненты n'_x, то есть $n_x = -n'_x$.

Сопоставим каждому лучу вектор $\boldsymbol{\gamma}^{(m)} = \langle s^{(m)}_x, s^{(m)}_y, s^{(m)}_z\rangle$, компоненты которого равны длине пройденного им пути вдоль соответствующего направления. Ясно, то всегда $s^{(m)}_y = (y-y')\mathrm{sgn}(n_y)$ и $s^{(m)}_z = (z-z')\mathrm{sgn}(n_z)$. Величина же $s^{(m)}_x$ подсчитывается по тому же принципу, по которому вычислялась длина пути s, проходимого лучом на отрезке $[0,L]$. Поэтому, на основании результатов предыдущего раздела, имеем $s^{(m)}_x = s^{(m)}_{\sigma,\sigma'}$, где $\sigma = \mathrm{sgn}(n_x)$, $\sigma' = \mathrm{sgn}(n'_x)$. Тогда длина пути s, проходимая лучом, равна

$$|\boldsymbol{\gamma}^{(m)}| = \Big(\big(s^{(m)}_{\sigma,\sigma'}\big)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\Big)^{1/2} = s\,.$$

Принимая во внимание, что, как и раньше, во внутренних точках слоя имеет место $dQ_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')/ds = -\alpha Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, получаем

$$Q^{(m)}_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \exp(-\alpha|\boldsymbol{\gamma}^{(m)}|)S^{(m)}_{\nu,\nu'}\,,$$

где $S^{(m)}_{\nu,\nu'}$ – числовая матрица, не зависящая от переменных $\mathbf{r}',\mathbf{r};\,\mathbf{n}',\mathbf{n}$, а зависящая только лишь от четности числа отражений. Следовательно, на основании (27),

$$Q_{\nu,\nu'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \exp\Big[-\alpha\Big(\big(s^{(m)}_{\sigma,\sigma'}\big)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\Big)^{1/2}\Big]S^{(m)}_{\nu,\nu'}\,, \tag{28}$$

где, вследствие (12)-(15),

$$s^{(m)}_{\sigma,\sigma'} = \begin{cases} 2kL + x - x' & \text{при } m = 2k, \sigma = +, \sigma' = +\,; \\ 2(k+1)L - x - x' & \text{при } m = 2k+1, \sigma = -, \sigma' = +\,; \\ 2kL - x + x' & \text{при } m = 2k, \sigma = -, \sigma' = -\,; \\ 2kL + x + x' & \text{при } m = 2k+1, \sigma = +, \sigma' = -\,, \end{cases}$$

и во всех этих формулах $k \in \mathbb{N}_+$ и $\sigma = \mathrm{sgn}(n_x)$, $\sigma' = \mathrm{sgn}(n'_x)$. Более кратко, этот набор формул записывается следующим образом:

$$S^{(2k)}_{\sigma,\sigma'} = 2kL + \sigma(x - x')\,, \qquad S^{(2k+1)}_{\sigma,\sigma'} = (2k+1)L + \sigma(x - L + x')\,,\ k \in \mathbb{N}_+\,.$$

Матрица $S^{(m)}_{\nu,\nu'}$ определяется условиями: при $m = 2k$ для любого единичного вектора n_ν имеет место $S^{(2k)}_{\nu,\nu'} n_{\nu'} = n_\nu$, при $m = 2k+1$ для любого единичного вектора n_ν имеет место $S^{(2k+1)}_{\nu,\nu'} n_{\nu'} = n^*_\nu$, $\mathbf{n}^* = \langle -n_x, n_y, n_z \rangle$. Тогда

$$S^{(2k)}_{\nu,\nu'} = \delta_{\nu,\nu'}\,, \qquad S^{(2k+1)}_{\nu,\nu'} = \delta_{\nu,\nu'} - 2(\mathbf{e}_x)_\nu (\mathbf{e}_x)_{\nu'}\,. \tag{29}$$

Таким образом, формулы (26), (28), (29) решают задачу о переносе излучения в слое диэлектрика. При этом, для использования формулы (26), необходимо независимо определить интенсивность $P_0[T]$, которая, как уже было сказано в предыдущем разделе, определяется функцией распределения по частотам излученных фотонов, но в качестве хорошего приближения для этой функции может быть использовано так называемое серое приближение, когда полагается $P_0[T] = \sigma T^4$.

В то же время, представленное решение гораздо сложнее, чем в аналогичное решение модельной одномерной задачи, так как ряд (28), в отличие от аналогичного ряда (20) в решении одномерной задачи, уже не является суммируемым. Поэтому для использования решения задачи о переносе теплового излучения в слое диэлектрика в форме (26), (28), (29) для исследования радиационно-кондуктивного теплообмена на основе эволюционного уравнения теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - (\nabla, \mathbf{P}) \tag{30}$$

приходится использовать малость коэффициента отражения, что позволяет использовать конечные отрезки ряда (28).

Литература

1. L.A.Atherton, J.J.Derby, R.A.Brown, Radiative heat exchange in Czochralski cryastal growth. Journal of Crystal Growth **84** (1987), 57-78.

2. F.Dupret, P.Nicodéme, Y.Ryckmans, Numerical method for reducing stress level in GaAs crystals. Journal of Crystal Growth **97** (1989), 162-172.

3. E.M.Sparrow, R.D.Cess, Radiation heat transfer. Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California. (Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972, 295с.)

4. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, Сибирское отд. 1984, 278с.

5. Петров В.А., Марченко Н.В. Перенос энергии в частично прозрачных твёрдых материалах. М: Наука 1985, 190с.

6. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. Analytic approach to the heat radiative conduction problem in semi-transparent media. The large optical length approximation // Functional Materials. – 2006. – 13;3. – P.372-380.

RADIATION TRANSFER PROBLEM SOLUTION IN THE CASE OF SEMITRANSPARENT DIELECTRICS LAYER AT GEOMETRIC OPTICS APPROXIMATION

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The problem of radiation transfer in the case of semitransparent dielectrics layer is solved. The calculation of electromagnetic energy flux caused by temperature nonuniform distribution in the infinite layer is done at geometric optics approximation.

Key words: radiation transfer, Stefan-Boltzmann's law, optical power, reflection coefficient, geometric optics.

MSC 76N15, 76M45

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ С МАЛОЙ СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ

Н.Н. Самойлова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Предлагается конструкция асимптотических разложений общего решения стационарного уравнения Навье-Стокса при нулевой вязкости, слабо отличающихся от потенциальных течений.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, стационарные задачи, разложение Гельмгольца, потенциальное течение, асимптотические разложения.

1. Введение. Система дифференциальных уравнений газодинамики без учета теплопереноса состоит из уравнения Навье-Стокса [1]

$$\dot{u}_j + (\mathbf{u}, \nabla)u_j = -\frac{\nabla_j P}{\rho} + \nabla_k \mu \left(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \right) + (\nabla, \eta\nabla)u_j\,, \quad j = 1, 2, 3\,; \qquad (1)$$

и уравнения непрерывности [‡)]

$$\dot{\rho} + (\nabla, \rho\mathbf{u}) = 0\,, \qquad (2)$$

в которых коэффициенты вязкости μ, η и давление P, в общем случае, являются функциями плотности ρ. Забегая вперед укажем, что мы будем в настоящем сообщении полагать μ и η равными нулю, что допустимо, как приближение, если газ обладает достаточно малой плотностью. Функцию $P(\rho)$, для целей решаемой задачи, мы не будем конкретизировать и вместо нее будем использовать функцию $g(\rho)$ такую, что $dP/\rho = dg$.

Известно, что даже для такой упрощенной формы системы уравнении (1), (2), в настоящее время, не имеется математических утверждений о разрешимости задачи Коши. В этой ситуации особую ценность приобретают асимптотические методы, в рамках которых удается контролировать точность приближенных решений [2]. Это положение имеет место и в частном случае, когда изучаются стационарные, не зависящие от времени t решения системы (1), (2). Следует признать, что для этого случая известна теорема существования решений, удовлетворяющих определенному типу граничных условий (см. [3]). Однако, по нашему мнению, математическая задача, анализируемая в ней, относится к гидродинамике несжимаемой жидкости и не совсем отвечает, по своей постановке, потребностям газодинамики с точки зрения приложения к исследованию конкретных физических ситуаций. Поэтому, даже относительно стационарных течений,

[‡]Далее везде жирными буквами мы обозначаем векторы в $\mathbb{R}^3$.

описываемых системой уравнений, которые получаются из (1), (2) обращением в нуль производных по времени

$$\nabla_j g + (\mathbf{u}, \nabla) u_j = (\mu + \eta)\Delta u_j + \frac{\mu}{3}\nabla_j(\nabla, \mathbf{u})\,, \quad j = 1, 2, 3\,, \tag{3}$$

$$(\nabla g, \mathbf{u}) + (\nabla, \mathbf{u}) = 0\,, \tag{4}$$

в настоящее время, не имеется результатов о разрешимости соответствующих краевых задач в классическом смысле. В этом случае при решении конкретных газодинамических задач методы построения асимптотических разложений играют важную роль, так как позволяют находить аналитическую форму решений.

Наряду с отсутствием утверждений о разрешимости, укажем другую особенность проблемы изучения решений системы (3), (4). Исследование решений этой системы, даже в смысле построения асимптотических разложений ее решений, серьезно упрощается, если использовать предположение о потенциальности течений. В этом случае поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ищется в форме $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla\psi(\mathbf{x})$, что допустимо, физически, в том случае, когда течения оказываются очень медленными и применимо приближение с постоянными (независящими от ρ) коэффициентами вязкости μ и η. Очень часто предположение о потенциальности используется в практических расчетах. Однако, в условиях, когда в течениях газа появляется вихревая составляющая, даже построение асимптотических разложений решений системы (3), (4) вызывает затруднения. Это связано с тем, что, в соответствии со структурой уравнения (3), при наличии вихревой составляющей у поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, оно должно подчиняться условию градиентности:

$$\epsilon_{ijk}\nabla_j\Big[(\mathbf{u}, \nabla)u_k - (\mu + \eta)\Delta u_k\Big] = 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{5}$$

где ϵ_{ijk} – символ Леви-Чивитта.

Уравнение (5) мы будем называть *уравнением конвекции* и его исследованию при условии $\mu = \eta = 0$ посвящено настоящее сообщение. Мы укажем метод построения асимптотического разложения общего решения (безотносительно к граничным условиям) этого уравнения, когда поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{w}\,,$$

где $\mathbf{w}$ – постоянный вектор, а поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ является малым по сравнению с $|\mathbf{w}|$. Асимптотическое разложение будет строится по этому малому параметру.

2. Постановка задачи. Мы будем анализировать уравнение (5) при $\eta = \mu = 0$, которое в векторной форме имеет вид

$$[\nabla, (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}] = 0 \tag{6}$$

и, соответственно, в тензорной форме,

$$\epsilon_{ijk}\nabla_j u_l \nabla_l u_k = 0\,.$$

Уравнение второго порядка (6) эквивалентно уравнению первого порядка

$$(\nabla, \mathbf{u})\mathbf{u} = \nabla\varphi \tag{7}$$

с произвольной функцией $\varphi(\mathbf{x})$. Таким образом, общее решение уравнения (6) строится на основе общего решения уравнения (7) для каждой фиксированной функции $\varphi(\mathbf{x})$, которая, таким образом, является дополнительным «параметром» общего решение уравнения (6).

Для каждого решения уравнения (7) справедливо разложение Гельмгольца $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\psi$, в котором $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$, каждое слагаемое в котором определено с точностью до градиента гармонической функции. В случае $\mathbf{v} = 0$, на основе известных фактов теории уравнений с частными производными, строится общее уравнения (7), так как имеет место

$$(\nabla\psi, \nabla)\nabla\psi = \frac{1}{2}\nabla\Big(\nabla\psi\Big)^2 .$$

В этом случае общее решение уравнения (7) сводится к решению уравнения эйконала следующего вида

$$\frac{1}{2}\Big(\nabla\psi\Big)^2 = \varphi\,,$$

из которого усматривается условие на существование потенциальных решений в виде условия неотрицательности функции $\varphi(\mathbf{x})$. Общее решение уравнения эйконала анализируется, например, в [4].

По указанной причине, имеет смысл исследовать общее решение уравнения конвекции (6) подстановкой в (7) разложения Гельмгольца с произвольной функцией $\psi(\mathbf{x})$, которая сводит его к уравнению

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + (\nabla\psi, \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla)\nabla\psi = \nabla\Big(\varphi - \frac{1}{2}\big(\nabla\psi\big)^2\Big)\,. \tag{8}$$

для поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Физический смысл такой постановки задачи состоит в том, что ее решения описывают течения газа, существующие довольно продолжительное время без заметного изменения стационарности, длительность которого велика в меру малости коэффициентов вязкости. Более того, при таком подходе, вихревые изменения внутри потенциального течения можно считать вызванными внешним условием в виде потенциала $\psi(\mathbf{x})$.

Уравнение (8) можно исследовать на основе разложений по малому параметру, в качестве которого нужно принять малость поля $\mathbf{v}$ по сравнению с полем $\nabla\psi$ в подходящей метрике, то есть изучать, с физической точки зрения течения со слабой завихренностью. Однако, уже в линейном приближении, при пренебрежении квадратичным по $\mathbf{v}$ слагаемом в (8), и когда градиент разности в правой части является малой функцией, получается в общем случае, довольно сложное линейное уравнение относительно векторного поля $\mathbf{v}$ с переменными коэффициентами. Поэтому в настоящем сообщении мы ограничиваемся исследованием уравнения (8), в котором $\psi(\mathbf{x})$ является линейной формой $\psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}, \mathbf{x})$, где $\mathbf{w}$ – заданный постоянный вектор. В этом случае, мы предлагаем алгоритм последовательного построения членов асимптотического разложения по степеням малого параметра, который регулирует величину $|\mathbf{v}|$.

3. Общее решение уравнения первого приближения. Общее решение мы будем строить на основе исходного уравнения конвекции, которое, после подстановки разложения $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, в первом приближении по $\mathbf{v}$, дает уравнение

$$[\nabla, (\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{v}] = 0\,. \tag{9}$$

С целью анализа этого уравнения, рассмотрим, сначала, линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка и постоянными коэффициентами относительно функции $f(\mathbf{x})$, имеющее следующий вид:

$$(\mathbf{w}, \nabla)f = 0\,. \tag{10}$$

Используя метод характеристик (см., например, [5]), построим общее решение этого уравнения в виде

$$f(\mathbf{x}) = g([\mathbf{w}, \mathbf{x}])\,, \tag{11}$$

где $g(\mathbf{x})$ – произвольное гладкое скалярное поле на $\mathbb{R}^3$. Это связано с тем, что общее решение линейного уравнения первого порядка для функции f от трех переменных должно определяться двумя интегралами характеристической системы, которая в данном случае имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{w}\,,$$

что приводит к прямолинейным характеристикам $\mathbf{X}(s) = \mathbf{w}s + \mathbf{X}_0$. Откуда следует, что два интеграла характеристической системы имеют вид $[\mathbf{w}, \mathbf{X}(s)] = [\mathbf{w}, \mathbf{X}_0]$. Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. [5]), получаем формулу (11) для общего решения уравнения (10).

Замечание. Несмотря на то, что поле $g(\mathbf{x})$ произвольно, его зависимость от третьей координаты, параллельной $\mathbf{w}$, как это видно из (11), несущественна. Тот факт, что представленная формула дает нам решения уравнения (11) проверяется непосредственно. Полагая $\xi_j = [\mathbf{w}, \mathbf{x}]_j$, $j = 1, 2, 3$, имеем $\nabla_k \xi_j = \epsilon_{jlk} w_l$. Тогда подстановка (11) в (10) дает

$$w_k \nabla_k g = w_k (\partial g / \partial \xi_j) \nabla_k \xi_j = (\partial g / \partial \xi_j) \epsilon_{jlk} w_k w_l = 0\,.$$

Из проделанного анализа следует, что общее решение системы линейных уравнений первого порядка относительно векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ следующего вида

$$(\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{f} = 0 \tag{12}$$

описывается формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])\,, \tag{13}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – произвольное гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^3$. Оно получается применением формулы (11) для каждой декартовой проекции уравнения (12).

Построим, теперь, общее решение уравнения первого приближения (9), которое, очевидным образом, записывается в эквивалентном виде

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = 0\,,$$

и которое имеет форму (12) при $\mathbf{f} = [\nabla, \mathbf{v}]$. Тогда, из (13) следует

$$[\nabla, \mathbf{v}] = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) \,, \tag{14}$$

где для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие соленоидальности поля $\mathbf{g}$, $(\nabla, \mathbf{g}) = 0$. В свою очередь, для выполнимости условия соленоидальности, необходимо и достаточно, чтобы с точностью до градиента гармонической функции поле $\mathbf{g}$ было представимо в виде $\mathbf{g} = [\nabla, \mathbf{h}]$, где $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемое векторное поле. Подстановка этого представления в (14) приводит к уравнению

$$[\nabla, \mathbf{v} - \mathbf{h}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])] = 0 \,,$$

общее решение которого выражается в условии потенциальности векторного поля на которое действует дифференциальный оператор $[\nabla, \cdot]$. Поэтому, вводя потенциал $\Phi(\mathbf{x})$, в результате, получаем общее решение уравнения (9) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \nabla\Phi \,, \tag{15}$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые скалярное и векторное поля.

4. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотри общее решение неоднородного уравнения первого порядка

$$(\mathbf{w}, \nabla) f(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \,, \tag{16}$$

где $q(\mathbf{x})$ – заданное непрерывное скалярное поле. Общее решение этого уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (10) и его частного решения. Таким образом, для построения общего решения нам достаточно найти какое-либо частное решение уравнения (16). Построим это частное решение в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} q(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}) ds \,, \tag{17}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$. Проверим, что эта функция, действительно, удовлетворяет уравнению (16). Во первых, так как $\nabla_k(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}))_j = \delta_{jk} - n_j n_k$, то при $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}$ имеем

$$n_k \nabla_k q(\mathbf{y}(s)) = n_k (\partial q / \partial y_j) \nabla_k y_j = n_k (\delta_{jk} - n_j n_k) = 0 \,.$$

Во- вторых, дифференцирование по верхнему пределу интеграла дает $q(\mathbf{x})$. Тогда

$$n_k \nabla_k f(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) n_k \nabla_k (\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} n_k \nabla_k q(\mathbf{y}(s)) ds = q(\mathbf{x}) \,.$$

Следовательно, учитывая, что общее решение однородного уравнения определяется формулой (13), заключаем, что общее решение уравнения (16) имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = g([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} q(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds \tag{18}$$

с произвольным гладким полем $g(\mathbf{x})$.

Построенное общее решение позволяет нам утверждать, что общее решение системы уравнений относительно векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$(\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \tag{19}$$

с заданной правой частью – векторным полем $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ описывается формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds \tag{20}$$

с произвольным гладким векторным полем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, так как уравнение (19) для каждой из компонент имеет вид (16). Таким образом нами доказана следующая

Теорема 1. *Общее решение уравнения*

$$(\mathbf{w}, \nabla)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x})$$

при заданном непрерывном поле $\mathbf{q}(x)$ *имеет вид*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds$$

с произвольным гладким полем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

С целью вычисления членов асимптотического разложения общего дважды непрерывно дифференцируемого решения конвективного уравнения найдем общее решение неоднородного уравнения

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \tag{21}$$

при непрерывной правой части. Сразу же заметим, что это уравнение разрешимо только в том случае, если непрерывное поле $\mathbf{q}$ соленоидально (хотя бы в слабом смысле), то есть $(\nabla, \mathbf{q}) = 0$.

Полагая в (19), что $\mathbf{f} = [\nabla, \mathbf{v}]$, имеем на основании (20)

$$[\nabla, \mathbf{v}](\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds \equiv \mathbf{G}(\mathbf{x}) \tag{22}$$

с произвольным гладким векторным полем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Для разрешимости же полученного уравнения (22) необходимо и достаточно, чтобы дивергенция поля в правой части (22) была равна нулю. Это дает условие

$$(\nabla, \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])) = -(\nabla, \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n})ds) \equiv Q(\mathbf{x})\,, \tag{23}$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно поля $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Преобразуем левую часть (23). Так как

$$(\nabla, \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}])) = \frac{\partial g_l(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\epsilon_{jml} w_m = |\mathbf{w}|(\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{g}])([\mathbf{w}, \mathbf{x}])\,,$$

то условие разрешимости уравнения (23) принимает вид

$$|\mathbf{w}|(\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{g}])([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) = Q(\mathbf{x})\,. \tag{24}$$

Так как

$$\nabla_k q_j(\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + s\mathbf{n}) = \Big(\frac{\partial q_j(\mathbf{y}(s))}{\partial y_l(s)}\Big)(\delta_{lk} - n_l n_k)\,,$$

то, применяя оператор $(\nabla, \cdot)$ в правой части (23), получим

$$Q(\mathbf{x}) = -(\mathbf{n}, \mathbf{q}(\mathbf{x})) - 2\int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} (\nabla, \mathbf{q})(\mathbf{y}(s))ds\,.$$

Учитывая же, что $(\nabla, \mathbf{q}) = 0$, находим, что условие разрешимости уравнения (22) формулируется следующим образом:

$$|\mathbf{w}|(\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{g}])([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) = -(\mathbf{n}, \mathbf{q}(\mathbf{x}))\,. \tag{25}$$

При заданном поле $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, его можно рассматривать как уравнение относительно поля $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, относительно которого также возникает вопрос о его разрешимости. Очевидно, что разрешимость уравнения (25) возможна только в случае, когда $(\mathbf{n}, \mathbf{q}(\mathbf{x})) \equiv q([\mathbf{w}, \mathbf{x}])$, то есть эта функция зависит только от $[\mathbf{w}, \mathbf{x}]$. При выполнении этого условия, уравнение (25) в координатах $\langle x_1, x_2\rangle$ в плоскости, ортогональной $\mathbf{w}$ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = -|\mathbf{w}|^{-1} q(x_1, x_2)\,.$$

Его общим решением является $\langle g_1, g_2, g_3\rangle = \mathbf{g}$, где функция g_3 – произвольная и

$$g_1 = \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi(x_1, x_2)\,, \quad g_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\Psi(x_1, x_2) \tag{26}$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми на плоскости функциями h и Ψ, причем функция Ψ – произвольная, а h удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = -|\mathbf{w}|^{-1} q(x_1, x_2)\,. \tag{27}$$

В случае, если условия на разрешимость уравнения (22) выполнены, поле $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ представимо в виде $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})]$, где $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – дважды непрерывно дифференцируемое векторное поле, и из (22) находим, что его общее решение записывается в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})] + \nabla\Phi(\mathbf{x})\,, \tag{28}$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ – произвольное дважды дифференцируемые скалярное поле. На выбор поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, в силу выполнимости для него разложения Гельмгольца $\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}] + \nabla\chi$, можно наложить дополнительное условие $(\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0$. Подчинение поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ этому условию сведется только лишь к переопределению потенциала $\Phi(\mathbf{x})$. Поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, при выполнимости условия $(\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})) = 0$, является решением векторного уравнения Пуассона

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\,,$$

в чем можно убедиться подействовав оператором $[\nabla, \cdot]$ на обе части уравнения (22).

Сформулируем полученный результат в виде отдельной теоремы, так как он представляет собой самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Для разрешимости уравнения*

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = \mathbf{q}(\mathbf{x})$$

относительно $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *при заданном поле* $\mathbf{q}(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $(\nabla, \mathbf{q}(\mathbf{x})) = 0$ *и компонента* $(\mathbf{n}, \mathbf{q})(\mathbf{x})$ *зависела только от* $[\mathbf{n}, \mathbf{x}]$. *Его общее решение имеет вид*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{H}(\mathbf{x})] + \nabla\Phi(\mathbf{x})\,,$$

где поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ *и* $\Phi(\mathbf{x})$ *– дважды непрерывно дифференцируемые, поле* $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ *– соленоидальное,* $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})\,,$$

в котором

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}(\mathbf{y}(s))ds\,,$$

$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{n}s$, $\mathbf{n} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$ *и* $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *– гладкое поле. При этом должно выполняться условие* $(\nabla, \mathbf{G}) = 0$, *для выполнимости которого необходимо и достаточно, чтобы компоненты поля* $\mathbf{g}$, *ортогональные* $\mathbf{n}$, *имели следующий вид:*

$$g_1 = \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\Psi(x_1, x_2)\,, \quad g_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\Psi(x_1, x_2)\,,$$

где функции h и Ψ – дважды непрерывно дифференцируемые на плоскости, в Ψ – произвольная, h удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = -|\mathbf{w}|^{-1} q(x_1, x_2)\,.$$

При этом компонента g_3 – произвольна.

5. Асимптотические разложения стационарных течений с малой завихренностью. Построим асимптотическое разложение

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{v}^{(n)}(\mathbf{x}) \tag{29}$$

с некоторым малым параметром ε решения уравнения конвекции (6), в рассматриваемом нами случае, когда $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,

$$[\nabla, (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}] + (\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}] = 0\,. \tag{30}$$

Подставляя (29) в (30) и производя баланс коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε, получаем систему уравнений для последовательности функций $\langle \mathbf{v}^{(n)}; n \in \mathbb{N}\rangle$,

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}^{(1)}] = 0\,, \tag{31}$$

$$(\mathbf{w}, \nabla)[\nabla, \mathbf{v}^{(n)}] = -\sum_{m=1}^{n-1} [\nabla, (\mathbf{v}^{(m)}, \nabla)\mathbf{v}^{(n-m)}] \equiv \mathbf{q}^{(n)}\,, \quad n > 1\,, \tag{32}$$

где в правой части (32) отсутствует функция $\mathbf{v}^{(n)}$. Следовательно, все уравнения этой системы относятся к уравнению типа (22). Поэтому все коэффициенты $\mathbf{v}^{(n)}$ асимптотического разложения существуют в том случае, когда для каждого $n = 2, 3, \ldots$ будут выполнены условия разрешимости $(\nabla, \mathbf{q}^{(m)}) = 0$ и $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(m)})$ зависят только от $[\mathbf{n}, \mathbf{x}]$, $m = 2, 3, \ldots$.

Решение уравнение (31) запишем в виде

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]) + \nabla \Phi^{(1)}\,, \tag{33}$$

где $\mathbf{h}^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые поля. Для возможности построения асимптотического разложения нам нужно удостовериться, что выполнено условие разрешимости уравнения (32) при любом $n > 1$. Условие бездивергентности поля $\mathbf{q}^{(n)}$ выполнено тривиальным образом, так как оно представляет собой ротор некоторого другого поля.

Далее, последовательно, могут быть построены посредством выбора функций $\mathbf{g}^{(n)}$, $\Phi^{(n)}$ все приближения $\mathbf{v}^{(n)}$ при $n = 2, \ldots, m$.

$$\mathbf{v}^{(n)} = [\nabla, \mathbf{H}^{(n)}] + \nabla \Phi^{(n)}\,, \quad (\nabla, \mathbf{H}^{(n)}) = 0\,, \quad \Delta \mathbf{H}^{(n)} = \mathbf{G}^{(n)}\,, \tag{34}$$

$$\mathbf{G}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{(n)}([\mathbf{w},\mathbf{x}]) + \int\limits_0^{(\mathbf{x},\mathbf{n})} \mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{y}(s))ds\,. \tag{35}$$

Условие разрешимости уравнения для $\mathbf{H}^{(n)}$ – независимость $(\mathbf{n},\mathbf{q}^{(n)})$ от продольной координаты обеспечивается подходящим выбором всех градиентов $\nabla\Phi^{(n)}$, $n = 2,3,...,m$. Индукцией по $m = 2,3,...$ доказывается, что все поля $\mathbf{q}^{(n)}$, $n = 2,3,...$ удовлетворяют условиям независимости компонент $(\mathbf{n},\mathbf{q}^{(n)})$ от продольной координаты и при этом все поля $\mathbf{G}^{(n)}$ не зависят от продольной координаты, что позволяет выбрать все поля $\mathbf{H}^{(n)}$ также независящими от этой координаты. Это обеспечивается таким выбором градиентов $\nabla\Phi^{(n)}$, чтобы их поперечные части $\nabla\Phi^{(n)} - \mathbf{n}(\mathbf{n},\nabla\Phi^{(n)})$ не зависели от продольной координаты при произвольной зависимости продольных компонент. В свою очередь, это приводит к тому, что все приближения $\mathbf{v}^{(n)}$ также имеют поперечную часть, независящую от продольной координаты.

Рассмотрим случай $m = 2$. В этом случае

$$\mathbf{q}^{(2)} = -[\nabla,(\mathbf{v}^{(1)},\nabla)\mathbf{v}^{(1)}]\,.$$

Потребуем, чтобы $(\mathbf{n},\mathbf{q}^{(2)})$ не зависела от продольной координаты. Ввиду того, что от продольной координаты не зависит поле $\mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w},\mathbf{x}])$, то подстановка (33) в выражение для $\mathbf{q}^{(2)}$ сводит это требование к тому, чтобы от этой координаты не зависело выражение

$$(\mathbf{n},[\nabla,(\nabla\Phi^{(1)},\nabla)[\nabla,\mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w},\mathbf{x}])]]) + (\mathbf{n},[\nabla,([\nabla,\mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w},\mathbf{x}])],\nabla)\nabla\Phi^{(1)}])\,, \tag{36}$$

которое применением к нему дифференциального оператора $(\mathbf{n},\nabla)$ приводится к линейному уравнению для $\Phi^{(1)}$. Оно, в свою очередь, обладает обширным множеством решений. Условие (36) может быть, в частности, удовлетворено, если поперечная часть $\nabla\Phi^{(1)} - \mathbf{n}(\mathbf{n},\nabla\Phi^{(1)})$ градиента зависит только от $[\mathbf{w},\mathbf{x}]$ и при этом продольная часть $\mathbf{n}(\mathbf{n},\nabla\Phi^{(1)})$ может быть произвольной. Последнее связано с тем, что в (36) эта продольная часть не входит. В самом деле, в первом слагаемом, при подстановке продольной части $\nabla\Phi^{(1)}$, действие дифференциального оператора $(\nabla\Phi^{(1)},\nabla)(\cdot)$ на $\mathbf{h}^{(1)}([\mathbf{w},\mathbf{x}])$ осуществляется дифференцированием по продольной координате этого поля, от которой оно не зависит. Во втором слагаемом, после подстановки вместо градиента $\nabla\Phi^{(1)}$ его продольной части $\mathbf{n}(\mathbf{n},\nabla\Phi^{(1)})$ действие внешнего дифференциального оператора $(\mathbf{n},[\nabla,\cdot])$ заменяется на действие дифференциального оператора $(\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{n}])(\cdot)$, который тождественно равен нулю.

Покажем, что в общем случае указанный выше выбор всех полей обеспечивает разрешимость задачи вычисления приближений $\mathbf{v}^{(m)}$ при любом значении m. Это достигается применением к выражению для поля $\mathbf{q}^{(n)}$, определенному формулой (32), рассуждений, аналогичных тем, что были использованы в случае $m = 2$. С этой целью подставим в это выражение разложения $\mathbf{v}^{(n)} = [\nabla,\mathbf{H}^{(n)}] + \nabla\Phi^{(n)}$. Тогда требование независимости продольной компоненты от продольной координаты сводится к требованию независимости от этой координаты выражения, аналогичного (36)

$$\sum_{m=1}^{n-1}\Big\{(\mathbf{n},[\nabla,(\nabla\Phi^{(m)},\nabla)[\nabla,\mathbf{H}^{(n-m)}([\mathbf{w},\mathbf{x}])]]) + (\mathbf{n},[\nabla,([\nabla,\mathbf{H}^{(m)}([\mathbf{w},\mathbf{x}])],\nabla)\nabla\Phi^{(n-m)}])\Big\}\,.$$

Точно такими же рассуждениями как и при анализе случая с $m = 2$ доказывается, то продольные составляющие градиентов $\nabla\Phi^{(m)}$, $m = 1, ..., n-1$ не содержатся в этом выражении, а так как, по предположению, их поперечные составляющие не зависят от продольной координаты, то этот факт доказывает, что выписанное выражение не зависит от продольной координаты и поэтому от этой координаты не зависит $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(m)})$.

Сформулируем доказанное утверждение.

Теорема 3. *Если при построении последовательных приближений* $\mathbf{v}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ *решений уравнения конвекции, определяемых разложением (29), на основе списка определяющих их уравнений (35), (36), все градиенты* $\nabla\Phi^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ *обладают поперечными компонентами, не зависящими от продольной координаты* $(\mathbf{n}, \mathbf{x})$, *то тем самым удовлетворены все условия разрешимости* $(\mathbf{n}, \mathbf{q}^{(n)}) = (\mathbf{n}, \mathbf{g}^{(n)}([\mathbf{w}, \mathbf{x}]))$, $n \in \mathbb{N}$ *и поэтому все приближения* $\mathbf{v}^{(n)}$ *существуют.*

Замечание. Заметим, что при выборе $\Psi^{(n)} = 0$, $\Phi^{(n)} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, индукцией по $n \in \mathbb{N}$ доказывается, что все поля $\mathbf{q}^{(n)}$ и, следовательно, $\mathbf{G}^{(n)}$, $\mathbf{H}^{(n)}$ зависят только от $[\mathbf{w}, \mathbf{x}]$. В этом случае для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $(\nabla, \mathbf{v}^{(n)}) = 0$, и ряд (29) дает нам бездивергентное решение уравнения конвекции.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / М.: Наука, 1986.
2. Хаппель Дж., Бреннер Х. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / М.: Мир, 1976.
3. Ладыженская О.А. Исследование уравнения Навье—Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / Успехи математических наук. – 1959. – XIV. – 3(87). – С.75-97.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными // М.: Мир, 1964. – 830 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики т.4, II // М.: Наука, 1981. – 550 с.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF STATIONARY CONVECTION EQUATION WITH SMALL SOLENOIDAL PART

N.N. Samoilova, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.com

Abstract. It is proposed the construction of asymptotic expansions of Navier-Stokes' stationary equation general solution at zero viscosity which are weakly distinguished from potential flows. и, слабо отличающихся от потенциальных течений.

Key words: Navier-Stokes' equation, stationary problems, continuity equation, potential flow, asymptotic expansion.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. В журнале печатаются статьи по всем направлениям чистой и прикладной математики (за исключением текстов, имеющих чисто компьютерное содержание и вычислительной эмпирики).

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора(ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором(ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчетом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором(ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчет о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи. В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором(ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в чисто математических текстах должны быть четко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) индекс MSC (см. Mathematical Subject Classification) того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный файл работы. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут**. При этом нужно присылать файл работы с расширением «tex» и pdf-копию файла с расширением «dvi» работы, для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании и верстке журнала. Присылать сам dvi-файл при этом не нужно.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (и тому подобным редакторам) следующие.

1) Нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды.

2) «Выключные» формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабженных штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста.

3) В случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения.

4) Литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.

5) Ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. Для авторов **следование этому шаблону обязательно**.

Шаблон для приготовления файла с рукописью

```
\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
MSC XXX (по индекс научного направления Mathematical Subject Classification)
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
\medskip
{\small {\sf  Учреждение,\\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: \underline{имя@адрес}}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ...\ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\renewcommand\baselinestretch{0.6}

{\small
\centerline{{\bf Литература}}

\def\sk{\vskip - 0.25cm}

\begin{enumerate}
\bibitem{1}     Источник 1
\bibitem{2} \sk Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 0.5cm

\begin{center}
{\bf TITLE 1st line \\
\vskip 0.1cm

2d   line \\
\vskip 0.1cm and so on }\medskip
```

```
{\bf  N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small  {\sf Enterprize,\\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: \underline{name@address}}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract. {\bf Key words:} word1, word2, ...\ .}}
\newpage

\renewcommand\baselinestretch{1.0}
```

Рисунки

Особое внимание при подготовке рукописи к печати должно быть уделено рисункам, если они имеются в тексте работы. Они должны быть качественно выполнены и представлены в редакцию в электронной форме в виде отдельных файлов в формате «ps». Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам. При этом в название каждого из файлов рисунков, чтобы избежать путаницы при верстке выпуска журнала, должна входить фамилия одного из авторов, записанная латиницей (например, Ivanov1.ps, Petrov2.ps и т.д.).

На представляемых в электронном формате рисунках **не следует** наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

Внимание! В случае присылки в редакцию работы с некачественно выполненными рисунками, она **будет возвращена автору(ам) на доработку**.