На правах рукописи

ЯСТРУБЕНКО МАРИНА ИВАНОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ШУМА

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Белгород – 2008

Работа выполнена в Белгородском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Вирченко Юрий Петрович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Гликлих Юрий Евгеньевич**
	доктор физико-математических наук, профессор **Глушак Александр Васильевич**
Ведущая организация:	Тульский государственный университет

Защита состоится «25» ноября 2008 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.04 при Белгородском государственном университете по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан «____» октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Беленко В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Существует широкий класс стохастических систем, моделирование управления которыми осуществляется на основе энергетических функционалов. Общей чертой таких систем является то, что их изменение во времени характеризуется неубывающей во времени величиной, значения которой служат критерием качественного изменения эволюции. В физических системах, как правило, эта величина представляет собой энергию, поглощаемую системой от внешних источников, значение которой зависит от траектории движения системы в фазовом пространстве. Это обуславливает использование по отношению к указанной величине термина *энергетический функционал*. Системы, характеризуемые энергетическими функционалами, изучаются в стохастической теории разрушения материалов при моделировании процесса старения образца материала под влиянием внешних распределённых во времени случайных воздействий; в статистической радиофизике и в квантовой оптике при управлении процессами передачи информации на фоне случайных помех; в теории управления дифференциальными стохастическими динамическими системами. Стохастический характер этих систем обусловлен тем, что на их эволюцию оказывают влияние внешние случайные факторы. В этом случае, значения энергетического функционала являются случайными, вследствие шумового происхождения энергии, поглощаемой системой. Так как эти значения зависят от времени, то их конкретное изменение должно мыслиться, с математической точки зрения, как траектория $\tilde{\varepsilon}(t)$ некоторого случайного процесса. При управлении описанных систем возникает ситуация, когда определенное значение E энергетического функционала – *уровень* – характеризует появление качественных изменений в системе. В этом случае, по отношению к системе предпринимаются управляющие действия. В связи с этим, с прикладной точки зрения, представляет интерес определение распределения вероятностей (статистических характеристик) случайной величины

$$\tilde{\tau}(E) = \inf\{t : \tilde{\varepsilon}(t) \geq E\}$$

– времени достижения заданного уровня. Такая информация оказывает влияние на принятие решений об управляющих действиях по отношению к рассматриваемой системе. В диссертации математическая задача вычисления распределения вероятностей случайной величины $\tilde{\tau}(E)$ на основе заданной модели случайного процесса с траекториями $\tilde{\varepsilon}(t)$ и при фиксированном значении уровня E называется *задачей достижения заданного уровня*.

С точки зрения практических приложений, математическое моделирование процесса достижения заданного энергетического уровня необходимо осуществлять в условиях, когда о характере случайного процесса $\tilde{\varepsilon}(t)$ имеется только довольно общая информация. В этих условиях, особую роль приобретают те результаты изучения задачи, которые слабо зависят от конкретных условий протекания процесса. В типичных физических ситуациях внешние случайные воздействия на систему носят стационарный во времени характер и, обычно, слабо скоррелированы во времени в статистическом смысле. Поэтому, можно считать, что приращения случайного процесса $\tilde{\varepsilon}(t)$ стационарны и независимы на непересекающихся временных промежутках. Ввиду стационарности приращений, процесс $\tilde{\varepsilon}(t)$ удобно описывать посредством задания процесса $\tilde{\xi}(t)$, который, с физической точки зрения, является мгновенной интенсивностью поглощения энергии, т.е. является производной по времени $\tilde{\xi}(t) = d\tilde{\varepsilon}(t)/dt$. Временная зависимость $\tilde{\xi}(t)$ содержит всю ту информацию о характере воздействия внешнего шума на систему, которая существенна именно при накоплении ею энергии. Она зависит функционально от случайных реализаций шума, действующего на систему и представляется стационарным марковским процессом. Поэтому, процесс $\tilde{\varepsilon}(t)$ также является функционалом от реализаций шума, а время t является параметром этого функционала.

При синтезе моделей процесса накопления энергии системой необходимо задавать математически только существенную для поставленной выше задачи информацию о характере внешних воздействий, которая полностью содержится в интенсивности $\tilde{\xi}(t)$ и не конкретизировать зависимость от случайных реализаций шума. По этой причине, удобно считать $\tilde{\varepsilon}(t)$ линейным функционалом от интенсивности $\tilde{\xi}(t)$.

Диссертационная работа посвящена исследованию математических моделей процессов достижения заданного уровня стохастической системой в случае, когда воздействия на систему состоят из отдельных коротких импульсов случайной амплитуды и длительности так, что случайные моменты времени, в которых эти импульсы действуют на систему, в среднем однородно распределены во времени, а средняя длительность импульсов настолько мала по сравнению со средним временем между импульсами, что ею можно пренебречь. С математической точки зрения, такие процессы моделируются обобщёнными случайными процессами типа "дробового шума". Если шум, действующий на систему, моделируется такого рода процессом, то интенсивность $\tilde{\xi}(t)$ также является дробовым процессом с положительными *амплитудами*. Тогда, в общем случае, траектории интенсивности описываются формулой

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_{n:\tilde{t}_n \le t} \tilde{\xi}_n \delta(t - \tilde{t}_n), \qquad (1)$$

где амплитуды составляют случайную стационарную последовательность $\langle \tilde{\xi}_n; n \in \mathrm{N} \rangle$, а случайная последовательность $\langle \tilde{t}_n; n \in \mathrm{N} \rangle$ представляет временные точки, в которых локализован каждый из действующих на систему импульсов. При указанном типе интенсивности $\tilde{\xi}(t)$, функционал $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ представляется в следующем виде

$$\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi}) = \sum_{n \in N:\tilde{t}_n \le t} \tilde{\xi}_n \, . \qquad (2)$$

В диссертации изучается задача достижения заданного уровня в том случае, когда процесс $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$, наряду со стационарностью приращений, обладает свойством их статистической независимости. Наличие этих свойств приводит к тому, что амплитуды процесса $\tilde{\xi}(t)$ образуют последовательность независимых, одинаково распределённых положительных случайных величин, а случайная последовательность $\langle \tilde{t}_k; k \in \mathrm{N} \rangle$ представляет собой так называемый *пуассоновский поток*.

Основные результаты в работе получены в предположении, что общее распределение вероятностей случайных величин $\tilde{\xi}_n$, $n \in \mathrm{N}$ является экспоненциально убывающим.

Таким образом, в диссертационной работе:

объектом исследования являются стохастические системы, подверженные воздействию стационарного шума;

предметом исследования являются математические методы расчёта статистических характеристик времени достижения заданного уровня энергетическим функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$, посредством которого моделируется управление (принятие решений) каждой из систем;

методами исследования являются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории функций комплексного переменного, уравнения математической физики.

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка математических основ для вычисления статистических характеристик времени достижения заданного энергетического уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ стохастической системы при воздействии на неё стационарного шума.

Исходя из этой общей цели, в диссертации решались следующие задачи:

1. Выделить класс математических моделей, который бы адекватно описывал процесс накопления энергии стохастической системой в условиях редких случайных внешних воздействий малой длительности.
2. Поставить математически задачу достижения заданного энергетического уровня и обосновать разрешимость поставленной задачи для выделенного класса математических моделей.
3. Разработать общий аналитический подход к вычислению распределений вероятностей $Q(t,E)$ времени достижения заданного энергетического уровня E для выделенного класса математических моделей.
4. Для выделенного класса моделей изучить предельное поведение распределения вероятностей $Q(t,E)$ при $E \to \infty$, $t \to \infty$ как с точки зрения вычисления вероятностей попадания времени $\tilde{\tau}(E)$ в заданный компактный интервал на R_+, так и с точки зрения вычисления статистических моментов случайной величины $\tilde{\tau}(E)$.
5. На основе развитого общего подхода решения задачи достижения заданного энергетического уровня, создать алгоритм численного определения распределений вероятностей для $Q(t,E)$ для выделенного класса математических моделей.

Научная новизна работы. Научную новизну работы составляют:

1. Достаточные условия разрешимости с вероятностью единица, для любого энергетического уровня E, задачи достижения заданного уровня стохастическими мерами $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$, $t \in \mathrm{R}_+$ со стационарными приращениями, которые являются либо абсолютно непрерывными с производной в виде стационарного случайного процесса с неотрицательными траекториями, либо скачкообразными с обобщённой производной в виде стационарного дробового процесса. Эти стохастические меры представляют собой математические модели управления стохастическими системами, которые подвергаются случайным редким, равномерно распределённым во времени воздействиям малой длительности.
2. Интегральное представление для плотности $q(t,E)$ распределения вероятностей случайного времени $\tilde{\tau}(E)$ достижения уровня E энергетическим функционалом, определяемым дискретными стохастическими мерами со стационарными, независимыми приращениями, у которых последовательности амплитуд соответствующих дробовых процессов являются одинаково, абсолютно непрерывно распределёнными случайными величинами с плотностью $p(x)$ ограниченного роста. Доказательство экспоненциального убывания плотности рас-

пределения $q(t,E)$.

3. Асимптотические с экспоненциальной точностью $O(e^{-\beta E})$ формулы для статистических моментов произвольного порядка случайного времени $\widetilde{\tau}(E)$ для дискретной стохастической меры со стационарными независимыми приращениями в случае, когда общая плотность $p(x)$ с характеристической функцией $f(-is)$ распределения вероятностей порождающей последовательности амплитуд дробового процесса является экспоненциально убывающей с показателем α, где β – минимум модуля реальной части ненулевых решений уравнения $f(s)=1$, $\alpha > \beta$.
4. Аппроксимационная теорема, которая устанавливает, что модифицированное распределение Вальда приближает в слабом смысле при $N(E)\to\infty$ плотность $q(t,E)$ распределения вероятностей случайного времени $\widetilde{\tau}(E)$ достижения уровня E энергетическим функционалом, соответствующим дискретной стохастической мере со стационарными независимыми приращениями, плотность которой представляется дробовым процессом, связанным с последовательностью случайных, независимых, одинаково распределенных, неотрицательных амплитуд, имеющих абсолютно непрерывное экспоненциально убывающее распределение.
5. Точное решение задачи достижения уровня E в терминах модифицированных функций Бесселя для энергетического функционала, определяемого абсолютно непрерывной стохастической мерой с плотностью в виде неотрицательного дихотомического случайного процесса.

Теоретическая и практическая значимость работы. На основе разработанных в диссертации методов могут вычисляться распределения вероятностей случайного времени достижения заданного энергетического уровня в математических моделях, возникающих в различного рода прикладных задачах. В частности, могут решаться некоторые задачи теории регистрации излучения в статистической радиофизике и в квантовой оптике низкоинтенсивных оптических полей. Полученные в работе результаты также могут быть использованы в теории управления стохастическими системами, которые подвержены внешним стационарно распределённым во времени случайным воздействиям. Кроме того, полученные результаты могут иметь практическое применение – использоваться при обработке статистической информации, передаваемой сигналами, которые регистрируются приёмными устройствами на фоне случайных помех.

Положения, выносимые на защиту:

1. Интегральное представление для плотности $q(t,E)$ распределения вероятностей времени $\widetilde{\tau}(E)$ достижения заданного уровня E энергетическими функционалами, определяемыми дискретными стохастическими мерами со стационарными независимыми приращениями, плотность которых представляется дробовым процессом с последовательностью одинаково распределённых, независимых, неотрицательных амплитуд, имеющих абсолютно непрерывное распределение вероятностей с плотностью ограниченного роста.
2. Экспоненциально точные формулы для статистических моментов случайного времени $\widetilde{\tau}(E)$ достижения заданного уровня E энергетическими функционалами $\widetilde{\varepsilon}(t;\widetilde{\xi})$, определяемыми дискретными стохастическими мерами со стационарными независимыми приращениями, плотность которых представляется дробовым процессом с порождающей последовательностью амплитуд, имеющих абсолютно непрерывное экспоненциально убывающее распределение вероятностей.
3. Теорема о том, что модифицированное распределение Вальда с плотностью $(1+x^{-1})q_W(x)/2$, $x=\lambda t/E$, где $q_W(x)$ – плотность распределения Вальда с параметром $r=E\mathrm{M}\widetilde{\xi}/\mathrm{M}\widetilde{\xi}^2$, приближает, в слабом смысле, при $E/\lambda\mathrm{M}\widetilde{\xi}_n\to\infty$ с точностью $O(E^{-2})$, плотность $q(t,E)$ распределения вероятностей случайного времени $\widetilde{\tau}(E)$ достижения уровня E энергетическим функционалом, соответствующим дискретной стохастической мере со стационарными независимыми приращениями, плотность которых представляется дробовым процессом с порождающей последовательностью амплитуд, имеющих абсолютно непрерывное экспоненциально убывающее распределение вероятностей.
4. Точное решение задачи достижения заданного уровня E для энергетического функционала $\widetilde{\varepsilon}(t;\widetilde{\xi})$, определяемого абсолютно непрерывной стохастической мерой, плотность которой является неотрицательным дихотомическим случайным процессом.

Достоверность полученных результатов обусловлена точными математическими рассуждениями и корректными математическими вычислениями, а также использованием установленных фактов теории вероятностей, математического анализа и математической физики.

Личный вклад соискателя. Постановки задач, решаемых в диссертации, выбор методов их решения и общий план работы принадлежат научному руководителю диссертанта. Соискателю принадлежат аналитические вычисления при получении основных результатов исследования и доказательства большого числа математических утверждений. Определяющим является также вклад соискателя в написание научных работ по теме диссертации.

Апробация и внедрение результатов. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих научных конференциях: VI международной конференции по математическому моделированию (г. Херсон, 2003); Воронежской зимней математической школе (г. Воронеж, 2004); Десятой международной научной конференции им. акад. М.Кравчука (г. Киев, Украина, 2004); Международной конференции "Аналитические методы в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике", посвященной 90-летию акад. Ю.В. Линника (г. Санкт-Петербург, 2005); Международной научной конференции "Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения" (г. Воронеж, 2005); VII Международной конференции по математическому моделированию (г. Феодосия, 2005); Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (г. Воронеж, 2006); VIII Международной конференции по математическому моделированию (г. Феодосия, 2006).

Публикации. Основные положения и результаты диссертации отражены в девяти печатных научных изданиях, материалах трех международных конференций и одном авторском свидетельстве на разработку.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка из 98 наименований. Общий объем диссертации составляет 186 страниц машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность, сформулированы цель и задачи диссертационной работы. Приведены основные положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость работы, отмечена апробация работы. Приведен короткий обзор содержания по главам.

Первая глава посвящена описанию научного направления, к которому относится диссертация и постановке возникающих в рамках этого направления задач. Описана общая абстрактная постановка задачи достижения заданного уровня значениями аддитивных неотрицательных функционалов $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ (стохастических мер) от траекторий случайных процессов – шумов, воздействующих на физическую систему. Указывается связь этой задачи с конкретными физическими проблемами. Дано краткое описание состояния изучаемой проблемы. Даётся доказательство разрешимости задачи достижения уровня в случае, когда функционал представляет собой стохастическую меру со стационарными приращениями при условии, когда она является, с вероятностью единица, мерой на R_+ определённого типа – дискретного, либо абсолютно непрерывного.

Во многих прикладных задачах, в которых возникает задача достижения энергетического уровня, стохастические меры бывают одним из двух типов – абсолютно непрерывные и дискретные. У первой из них реализации $\tilde{\varepsilon}(t)$ обладают производной $d\tilde{\varepsilon}(t)/dt = \tilde{\xi}(t)$, где $\tilde{\xi}(t)$ – реализации стационарного, случайного процесса с неотрицательными измеримыми траекториями, которые определяют интенсивность накачки энергии. Реализации меры другого, дискретного, типа представляются формулой (2), в которой $\tilde{t}_n - \tilde{t}_{n-1} = \tilde{\Delta}_n$, $n \in \mathrm{N}$ и $\tilde{\xi}_n$, $n \in \mathrm{N}$ – пара случайных стационарных последовательностей с положительными компонентами. В главе 1 сформулированы и доказаны достаточные условия разрешимости задачи достижения любого заданного уровня для стохастических мер обоих типов.

Т е о р е м а 1. *Если ξ – стационарный случайный процесс, который обладает свойством $\Pr\{\tilde{\xi}(t) \equiv 0\} = 0$ и имеет неотрицательные с вероятностью единица траектории, то для любого $E > 0$, с вероятностью единица, существует конечное значение случайной величины $\tilde{\tau}(E)$, определённое формулой*

$$\tilde{\tau}(E) = \min\left\{ t : \int_0^t \tilde{\xi}(s)ds \geq E \right\}.$$

Т е о р е м а 2. *Для стохастической меры ε, случайные реализации которой определяются согласно формуле (2) на основе стационарных последовательностей Δ и ξ, которые обладают свойством $\Pr\{\tilde{\Delta}_n = 0\} = 0$, $\Pr\{\tilde{\xi}_n \equiv 0\} = 0$, задача достижения уровня E разрешима для любого $E > 0$.*

В **второй главе** даётся общее решение задачи достижения заданного уровня стохастической мерой с интенсивностью (1) в виде дробового случайного процесса в случае, когда общее распределение вероятностей порождающей последовательности амплитуд $\langle \tilde{\xi}_n ; n \in \mathrm{N} \rangle$ является абсолютно непрерывным с плотностью $p(x)$, которая является функцией ограниченного роста.

Плотность $p(x)$ *является функцией ограниченного роста, если существуют такие постоянные* $A, C > 0$ *и* $\gamma > 0$*, для которых выполняется* $p(x) < Ce^{\gamma x}$*,* $x \in [A, \infty)$.

Решение дано в виде следующего интегрального представления для плотности $q(t, E)$, $t \in \mathrm{R}_+$.

Т е о р е м а 3 . *Плотность* $q(t, E)$, $t \in \mathrm{R}_+$ *распределения вероятностей* $Q(t, E)$*, при* $E \in \mathrm{R}_+$ *дробового процесса* $\tilde{\xi}$*, у которого типичный представитель последовательности независимых, одинаково распределённых амплитуд имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью ограниченного роста, определяется интегралом*

$$q(t,E) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} z^{-1}(1 - f(z)) \exp(\lambda t\, [f(z) - 1])\; e^{zE}\, dz, \qquad (3)$$

где $\gamma > \alpha$, α *– показатель роста,* λ *– плотность пуассоновского потока и* $f(-is)$ *– характеристическая функция плотности* $p(x)$.

Формула (3) была положена в основу создания компьютерной программы для численных расчетов. Их результаты иллюстрируются графиками плотности $q(t, E)$ при различных значениях уровня E. На графиках по оси ординат отложена плотность $q(t, E)$, а по оси абсцисс параметр λt.

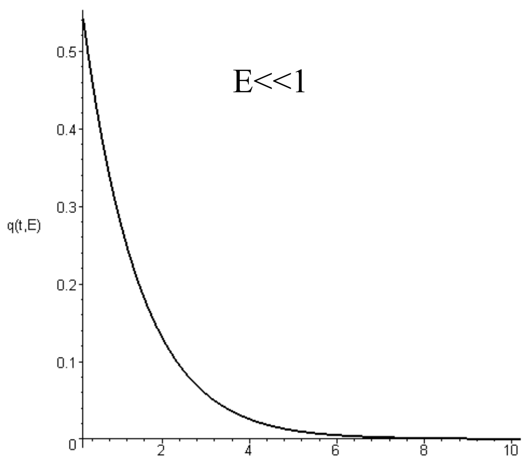

Рис. 1

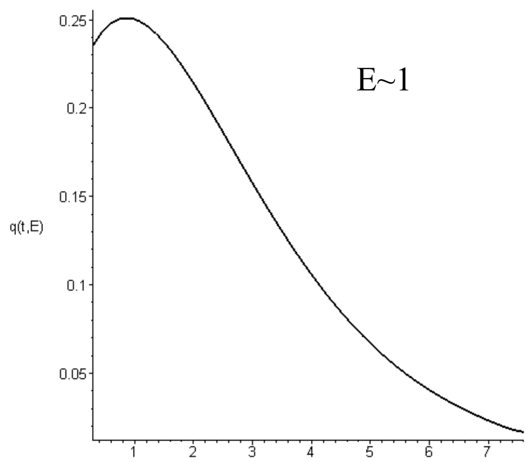

Рис. 2

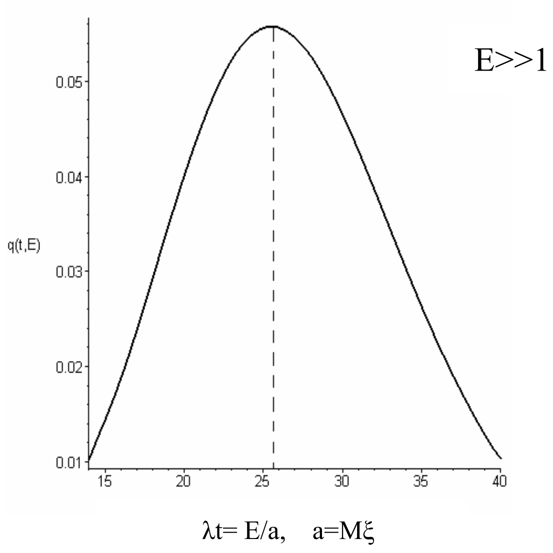

Рис. 3

На рисунках 1-3 представлены результаты численного счета для плотности $q(t,E)$ при различных уровнях E и заданной плотности дробового процесса $p(x)=\mu e^{-x\mu}$. Для этого случая во второй главе найдено точное решение в терминах специальных функций,

$$q(t,E)=\lambda\exp(-\lambda t-\mu E)\,\mathrm{I}_0(2\sqrt{\lambda t\mu E})\,,$$

где $\mathrm{I}_0(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$ – модифицированные функции Бесселя.

В **третьей главе** изучены общие качественные свойства плотности $q(t,E)$ в случае, когда плотность $p(x)$ имеет ограниченный рост. В частности, доказано, что $q(t,E)$ является экспоненциально убывающей для любой плотности ограниченного роста $p(x)$.

Далее, на основе интегрального представления (3), получены асимптотические экспоненциально точные при $E\to\infty$ формулы для статистических моментов случайной величины $\tilde{\tau}(E)$ в случае, когда плотность $p(x)$ является экспоненциально убывающей с показателем убывания $\alpha>0$.

Т е о р е м а 4. *Пусть $\tilde{\tau}(E)$ – время достижения уровня E энергетическим функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ с последовательностью $\langle\tilde{\xi}_n;\, n\in\mathrm{N}\rangle$ независимых, одинаково распределённых, неотрицательных, абсолютно непрерывно распределённых случайных амплитуд, типичный* *представитель которых имеет экспоненциально убывающую плотность* $p(x)$ *распределения такую, что свертки* $\underbrace{(p*...*p)}_{n}$ *являются ограниченными при всех достаточно больших значениях* $n \in \mathrm{N}$. *Тогда имеют место асимптотические формулы*

$$\mathrm{M}\,\tilde{\tau}^{\,n}(E) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n}\left[\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{f(u)-1}{uf'(u)}e^{uE}\right)\right]_{z=1} + O(e^{-\beta E}) \,,$$

где $u = u(z)$ *является единственным вещественным решением уравнения* $f(u) = z^{-1}$, λ *– плотность пуассоновского потока,* $\beta = \min\{-\mathrm{Re}\, s :\ f(s) = 1\}$ *и* $f(-is)$ *– характеристическая функция плотности* $p(x)$.

В частности, для математического ожидания и дисперсии имеем

$$\mathrm{M}\,\tilde{\tau}(E) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{E}{a} + \frac{c}{2a^2}\right) + O(e^{-\beta E}) \,,$$

$$\mathrm{D}\,\tilde{\tau}(E) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{E\,c}{a^3} + \frac{5c^2}{4a^4} - \frac{2b}{3a^3}\right) + O(e^{-\beta E}) \,,$$

где $a = \mathrm{M}\tilde{\xi}$, $c = \mathrm{M}\tilde{\xi}^{\,2}$, $b = \mathrm{M}\tilde{\xi}^{\,3}$.

Таким образом, при $E \to \infty$ дисперсия определяется отношением c / a^2, а не относительной дисперсией случайной величины $\tilde{\xi}$.

В этой же главе получена асимптотическая формула для плотности $q(t, E)$ в виде локальной предельной теоремы.

Т е о р е м а 5 . *Пусть плотность* $p(x)$ *распределения вероятностей типичного представителя* $\tilde{\xi}$ *последовательности* $\langle \tilde{\xi}_k ; k \in \mathrm{N} \rangle$ *удовлетворяет условию экспоненциального убывания, т.е. существуют постоянные* $x_0 > 0$, $C > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что при* $x \in [x_0, \infty)$ *имеет место* $p(x) < Ce^{-\alpha x}$. *Тогда справедлива асимптотическая при* $E \to \infty$, $E = a\lambda t + O(t^{1/2})$ *формула*

$$q(t,E)=\frac{a\lambda}{\sqrt{2\pi cN(E)}}\exp\left[-\frac{(a\lambda t-\mathrm{E})^2}{2cN(E)}\right]\left(1+O(1)\left(\frac{a\lambda t-E}{E^{1/2}}\right)\right),$$

где $a=\mathrm{M}\tilde{\xi}$, $c=\mathrm{M}\tilde{\xi}^2$, $N(E)=E/a$.

В третьей главе доказана также аппроксимационная теорема для плотности $q(t,E)$, учитывающая, в отличие от указанной выше локальной предельной теоремы, тот факт, что эта плотность сосредоточена на R_+ .

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\tilde{\tau}(E)$ *– время достижения заданного уровня* E *дискретной стохастической мерой* $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$ *со стационарными, независимыми приращениями, плотностью которой является дробовой шум* $\tilde{\xi}(t)$ *, порождённым последовательностью* $\langle\tilde{\xi}_n; n\in \mathrm{N}\rangle$ *независимых, одинаково абсолютно непрерывно распределённых неотрицательных скачков, имеющих экспоненциально убывающую плотность* $p(x)$ *с показателем убывания* α *и пуассоновским потоком с плотностью* $\lambda>0$ *точек роста меры. Тогда, для любого математического ожидания* $\mathrm{M}\omega(\lambda\tilde{\tau}(E)/N(E))$*, где* $\omega(\cdot)$ *– ограниченная измеримая функция на* R_+*, справедлива формула*

$$\mathrm{M}\omega\left(\frac{\lambda\tilde{\tau}(E)}{N(E)}\right)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \omega(x)\,(1+x^{-1})\,q_W(x)\,dx\left(1+O(E^{-2})\right),$$

где параметр r *в плотности распределения Вальда*

$$q_W(x)=\left(\frac{r}{2\pi x}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{r}{2}\left(x^{1/2}-x^{-1/2}\right)^2\right),$$

$x=a\lambda t/E$ *, определяется формулой* $r=aE/c$.

В **четвертой главе** изучается задача о распределении вероятностей для времени $\tilde{\tau}(E)$ в том случае, когда приращения случайного процесса, оставаясь стационарными, являются зависимыми. Рассмотрение задачи ограничено случаем, когда интенсивность $\tilde{\xi}(t)=d\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})/dt$ представляется дихотомическим случайным процессом – марковским процессом, который принимает два значения $\{0,\ \alpha>0\}$. Вычисление распределения вероятностей для единственного с вероятностью единица случайного момента времени $\tilde{\tau}(E)$ достижения заданного уровня E функционалом $\tilde{\varepsilon}(t;\tilde{\xi})$, определяемого интегралом

$$\widetilde{\tau}(E)=\int\limits_0^{\infty}\theta\left(E-\alpha\int\limits_0^t\widetilde{\zeta}(s)ds\right)dt\,,$$

где $\theta(x)=\{1,\ x\ge 0;\quad 0,\ x<0\}$ – функция Хевисайда, основано на методе Каца-Фейнмана-Дынкина вычисления математических ожиданий, связанных с однородными аддитивными функционалами от траекторий марковских процессов. В результате, найдено представление для плотности $q(t,E)$ распределения вероятности $Q(t,E)=\Pr\{\widetilde{\varepsilon}(t;\widetilde{\xi})\ge E\}$ достижения за время t уровня E в терминах специальных функций.

Т е о р е м а 7. *Плотность распределения $q(t,E)$ определяется формулой*

$$q(t+E/\alpha,E)=\frac{1}{2}e^{-\nu E/\alpha}\Big[\delta(t)+$$

$$+e^{-\nu t}\theta(t)\Big(\mathrm{I}_0\Big(2\nu\sqrt{Et/\alpha}\Big)+\sqrt{E/\alpha t}\ \mathrm{I}_1\Big(2\nu\sqrt{Et/\alpha}\Big)\Big)\Big],$$

где δ – функция Дирака, I_0 и I_1 - модифицированные функции Бесселя, ν – плотность пуассоновского потока случайных точек изменения траекторий процесса $\widetilde{\xi}(t)$.

Выявлено качественное свойство плотности $q(t,E)$ – ее одновершинность по t при $t>E/\alpha$ независимо от параметра E.

Т е о р е м а 8. *Плотность $q(t,E)$ по переменной $t>0$ является монотонно убывающей на $(E/\alpha,\infty)$ при $\nu E/\alpha\le\sqrt{2}$. Если $\nu E/\alpha>\sqrt{2}$, то плотность $q(t,E)$ имеет единственную вершину на $(E/\alpha,\infty)$.*

В **заключении** перечислены результаты проведенного в диссертации исследования.

Выводы

1. Адекватное описание процесса управления на основе значений накопленной энергии стохастическими системами, на которые оказывает воздействие внешний шум, состоящий из редких, однородно распределённых во времени воздействий малой длительности, даётся на основе математических моделей в виде дискретных неотрицательных стохастических мер, плотность которых представляет со-

бой дробовой шум. Управление такими стохастическими системами осуществляется в случайный момент времени достижения заданного энергетического уровня.

2. В случае, если соответствующая модель в виде нетривиальной (неравной нулю) стохастической меры имеет стационарные приращения и определённый тип (является либо дискретной, либо абсолютно непрерывной), соответствующая задача достижения заданного уровня разрешима с вероятностью единица.
3. Вычисление плотности распределения вероятностей времени достижения заданного энергетического уровня, как аналитическое, так и численное, для класса математических моделей в виде дискретных, неотрицательных стохастических мер с независимыми приращениями, плотностью которых является дробовой шум с однородным пуассоновским потоком точек локализации, основывается на интегральном представлении (3), в котором плотность распределения независимых амплитуд дробового шума обладает ограниченным ростом.
4. Для статистических моментов случайного времени достижения заданного уровня, в указанном в п.3 случае, при наличии экспоненциального убывания плотности распределения амплитуд дробового шума, найдены экспоненциально точные по величине энергетического уровня формулы, которые представляют собой полиномы относительно величины E, коэффиценты которых выражаются на основе статистических моментов амплитуд.
5. В случае, указанном в п.4, для плотности распределения вероятностей времени достижения уровня справедлива аппроксимация модифицированным распределением Вальда с точностью порядка $O(E^{-2})$.
6. Плотность распределения вероятностей случайного времени достижения заданного уровня для модели накопления энергии в виде абсолютно непрерывной стохастической меры, обладающей плотностью в виде неотрицательного дихотомического случайного процесса, имеет точное аналитическое представление в терминах модифицированных функций Бесселя. Эта функция допускает качественную перестройку при увеличении энергетического уровня от монотонно убывающей к одновершинной плотности.
7. Созданный алгоритм численного определения плотности распределения вероятности времени достижения заданного уровня подтверждает достоверность доказанных в диссертации качественных утверждений относительно этой плотности.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК
и систем цитирования Web of Science

1. Вирченко, Ю.П. Локальная предельная теорема в задаче достижения заданного уровня суммами независимых положительных случайных величин с безганично-делимым законом распределения [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, Математика. – 2005. – №2. – С. 119-123.

2. Virchenko, Yu.P. The integral limit theorem in the first passage problem for sums of independent nonnegative lattice variables [Text] / Yu.P. Virchenko, M.I. Yastrubenko // Abstract and Applied Analysis. – Vol. 2006. – Article ID 56367. – P. 1-12.

Статьи в зарубежных журналах

3. Virchenko, Yu.P. First passage time problem in the material destruction theory. The poissonian process of energy absorption [Text] / Yu.P. Virchenko, M.I. Yastrubenko // Functional Materials. – October-December, 2005. – Vol. 12, №4. – P. 628-632.

4. Yastrubenko, M.I. The given level attainment problem and material destruction [Text] / M.I. Yastrubenko // Functional Materials. – January-March, 2007. – Vol. 14, №1. – P. 19-23.

Статьи в региональных и тематических сборниках

5. Вирченко, Ю.П. О локальной предельной теореме в задаче достижения заданного уровня суммой независимых случайных величин со случайным числом слагаемых [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сб. науч. трудов – СПб.: Санкт-Петербургское отд. МАН ВШ, 2003. – С. 51-54.

6. Вирченко, Ю.П. Локальная предельная теорема в задаче достижения заданного уровня суммой независимых случайных величин со случайным числом слагаемых [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Труды Воронежской зимней математической школы – 2004. – Воронеж: ВГУ, 2004. – С. 56-74.

7. Вирченко, Ю.П. Предельная теорема в задаче достижения заданного уровня суммой независимых положительных случайных величин с устойчивым законом распределения [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности: Сб. науч. трудов. – СПб.: Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2005. – С. 25-27.

8. Вирченко, Ю.П. Локальная предельная теорема для случайного числа слагаемых с заданным значением суммы независимых пуассоновских случайных величин [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Научные ведомости БелГУ. Серия Физико-математические науки. – Белгород: БелГУ, 2005. – №2 (22), вып. 11. – С. 23-27.

9. Вирченко, Ю.П. Критерий корректности в задаче достижения заданного уровня [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2006. – Вып. 2(25). – С. 125-129.

Тезисы и материалы конференций

10. Вирченко, Ю.П. Предельная теорема в задаче достижения заданного уровня суммой независимых случайных величин со случайным числом слагаемых [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Воронежская зимняя математическая школа – 2004. – Воронеж: ВГУ, 2004. – С. 33-34.

11. Вирченко, Ю.П. Предельная теорема для случайного числа слагаемых в задаче достижения заданного уровня суммой независимых решеточных случайных величин [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // X международная конференция имени акад. М.Кравчука: Материалы конф. – К.: Задруга, 2004. – С. 584.

12. Вирченко, Ю.П. Локальная предельная теорема в задаче достижения уровня суммой независимых положительных случайных величин с безганично-делимым распределением [Текст] / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко // Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения. Материалы межд. науч. конф. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 30-32.

Авторские свидетельства

13. Программа вычисления плотности распределения времени достижения заданного уровня случайным процессом с независимыми стационарными приращениями [Текст]: свидетельство об отраслевой регистрации разработки в Отраслевом фонде алгоритмов и программ № 10406 / Ю.П. Вирченко, М.И. Яструбенко. – № 50200800824; зарегистр. 17.04.2008; опубл. Инновации в науке и образовании. – № 4 (39). – С. 16.