На правах рукописи

Юлдашева (Юнусова) Гузель Рамилевна

НЕЛОКАЛЬНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико – математических наук

Белгород – 2013

Работа выполнена на кафедре высшей математики ФГБОУ ВПО «Самарский государственный архитектурно-строительный университет» и в отделе физико-математических и технических наук ГАНУ «Институт прикладных исследований Академии наук Республики Башкортостан»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. АН РБ, зав. лабораторией прикладной математики и информатики ГАНУ «Институт прикладных исследований АН РБ»
Сабитов Камиль Басирович

Официальные оппоненты: **Кожанов Александр Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН»

Пулькина Людмила Степановна
доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики ФГБОУ ВПО «Самарский государственный университет»

Ведущая организация: ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) Федеральный университет»

Защита состоится 5 марта 2013 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308007, г.Белгород, ул.Студенческая, 14, корп.1 БелГУ, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Автореферат разослан « » января 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.015.08,
кандидат физико-математических наук Гриценко С.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных являются краевые задачи для уравнений смешанного типа, которые имеют не только теоретическое значение, но и находят свое практическое применение в газовой динамике (теория околозвуковых течений), в магнито и гидродинамических течениях с переходом через скорость звука и других областях.

Особое место в теории дифференциальных уравнений в частных производных занимают нелокальные краевые задачи. Это объясняется тем, что в последние годы проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования новых задач, например, математическими моделями различных физических, химических, биологических и других процессов являются задачи, в которых задается определенная связь значений искомой функции или её производных на границе области со значениями внутри этой области.

Для различных классов дифференциальных уравнений нелокальные задачи изучались Ф.И. Франклем, В.И. Жегаловым, J.R. Cannon, А.В. Бицадзе, А.А. Самарским, В.А. Ильиным, А.М. Нахушевым, А.П. Солдатовым, Н.И. Ионкиным, Е.И. Моисеевым, А.Л. Скубачевским, А.Г. Кузьминым, М.Е. Лернером, О.А. Репиным, Л.С. Пулькиной, А.И. Кожановым, К.Б. Сабитовым и другими авторами.

Степень разработанности проблемы.

В 40-х годах XX века Ф.И. Франклем были обнаружены важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газовой динамике. Например, Ф.И. Франкль для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, впервые поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия («скачка уплотнения») $u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$, $0 \le y \le a$, является часть границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. При этом на ней задается производная по нормали искомой функции $u_x(0, y)$.

В.И. Жегаловым впервые для уравнения Лаврентьева—Бицадзе изучен аналог задачи Трикоми с нелокальным условием, связывающим значение искомого решения на обеих характеристиках (задача со смещением).

А.В. Бицадзе и А.А. Самарским для уравнения Лапласа были предложены задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения во внутренних точках области со значениями на границе.

А.М. Нахушев исследовал задачи со смещением для гиперболических и уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.

Л.С. Пулькиной изучались краевые задачи для гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием.

В работах М.Е. Лернера и О.А. Репина для эллиптического уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > -1,$$

в полуполосе $G = \{(x,y)|0 < x < 1, y > 0\}$ была изучена задача с одним нелокальным условием $u(0,y) - u(1,y) = \varphi_1(y)$, $y \geq 0$ и локальными граничными данными: $u_x(0,y) = \varphi_2(y)$, $y \geq 0$ и $u(x,0) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $u(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ равномерно по $x \in [0,1]$.

Е.И. Моисеев исследовал нелокальную краевую задачу в полуполосе G для эллиптического уравнения:

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \;\; m > -2,$$

$u(0,y) = u(1,y)$, $u_x(0,y) = 0$, $y \geq 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, в классе функций $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$, в предположении, что $u(x,y)$ ограничена или стремится к нулю на бесконечности. Методом спектрального анализа доказана единственность и существование решения поставленной задачи.

К.Б. Сабитов исследовал задачу Дирихле для уравнения

$$sign\ t \cdot |t|^m u_{xx} + u_{tt} - b^2 sign\ t \cdot |t|^m u = 0, \tag{1}$$

где $m = const > 0$, $b = const \geq 0$, в прямоугольнике $D = \{(x,t)|0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$ – заданные числа, с условиями

$$u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_- \cup D_+); \;\; Lu(x,t) = 0, \; (x,t) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \; -\alpha \leq t \leq \beta;$$

$$u(x,\beta) = f(x), \; u(x,-\alpha) = g(x), \; 0 \leq x \leq 1,$$

здесь f и g – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$. Установлен критерий единственности. Существование решения задачи Дирихле доказано на основе спектрального метода решения краевых задач.

К.Б. Сабитовым и О.Г. Сидоренко для уравнения (1) в прямоугольной области $D = \{(x,t)|0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ также установлен критерий единственности и найдены достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи с условиями периодичности $u(0,t) = u(1,t)$, $u_x(0,t) = u_x(1,t)$, $-\alpha \leq t \leq \beta$, и локальными граничными условиями $u(x,\beta) = \varphi(x), \; u(x,-\alpha) = \psi(x), \; 0 \leq x \leq 1$.

Сабитовой Ю.К. для уравнения (1) в прямоугольнике D рассмотрены задачи с нелокальными условиями: $u(0,t) = u(1,t)$ или $u_x(0,t) = u_x(1,t)$, $-\alpha \leq t \leq \beta$, в сочетании с другими локальными граничными данными. Спектральным методом доказаны единственность и существование решения задачи.

К числу первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой – гиперболическое, можно отнести работу И.М. Гельфанда, где он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Затем Г.М. Стручина, Я.С. Уфлянд, Л.А. Золина показали другие применения этих задач.

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

Т.Д. Джураев исследовал краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в области, у которой гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник.

В работе Н.И. Ионкина в области $D_T = \{(x,t) \mid 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ изучена нелокальная задача для уравнения теплопроводности $u_t - u_{xx} = f(x,t)$ с условиями:

$$u(0,t) = 0,\ \int_0^1 u(x,t)dx = 0,\ 0 \le t \le T,\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1.$$

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения этой задачи. Идея метода решения задачи основывается на возможности разложения функции $\varphi(x)$, задающей начальное условие, в биортогональный ряд по системе собственных и присоединенных функций несамосопряженного оператора.

К.Б. Сабитовым для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0, \end{cases}$$

в области $D = \{(x,t) | 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha, \beta > 0$ – заданные действительные числа, изучена задача с граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ -\alpha \le t \le \beta, \quad u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1.$$

Установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье. Установлена устойчивость решения по нелокальному условию $\varphi(x)$.

Данная диссертационная работа посвящена изучению нелокальных прямых и обратных краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания.

Для различных типов дифференциальных уравнений обратные задачи изучались в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, В.К. Иванова, В.В. Васина, В.П. Танана, А.В. Баева, А.И. Прилепко, А.М. Денисова, А.И. Кожанова и других.

А.Н. Зарубин, М.В. Бурцев исследовали обратные начально-краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений смешанного типа с дробной производной и запаздыванием по различным переменным.

В работах К.Б. Сабитова, Э.М. Сафина впервые изучены краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с неизвестной правой частью в прямоугольной области D с граничными условиями первого – третьего родов. Установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

К.Б. Сабитовым, Н.В. Мартемьяновой исследованы обратные задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области $D = \{(x,y)|0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ с нелокальным условием: $u(0,y) = u(1,y)$ или $u_x(0,y) = u_x(1,y)$, $-\alpha \le y \le \beta$, в сочетании с другими локальными граничными данными. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда по системам корневых функций соответствующих взаимно сопряженных задач на собственные значения.

В отличие от этих исследований в данной работе рассматриваются нелокальные прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо– и эллиптико-гиперболического типов. Принципиальным отличием от предыдущих работ является то, что для данных классов уравнений задаются нелокальные условия, которые связывают значения искомого решения и его производной по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам уравнения. Решения задач строятся в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При этом возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. В связи с этим для доказательства сходимости построенных рядов требуется установить соответствующие оценки. Отметим, что в случае уравнений эллиптико-гиперболического типа требуется установить более сильные оценки, чем для уравнений параболо-гиперболического типа.

Цель и задачи диссертационного исследования. В настоящей работе рассматриваются прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \frac{1 - sgn\ t}{2} u_{tt} + \frac{1 + sgn\ t}{2} u_t - u_{xx} + b^2 u = f(x,t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0, \\ f_2(x), & t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \ge 0$, с нелокальным условием

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x) \ \text{ или } \ u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x)$$

и смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (sgn\ y) u_{yy} - b^2 u = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \tag{3}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ с двумя нелокальными условиями:

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x) \ \text{ и } \ u_y(x,-\alpha) - u_y(x,\beta) = \psi(x)$$

в сочетании с другими локальными граничными данными.

Основными задачами исследования являются постановка и доказательство единственности, существования и устойчивости решений нелокальных прямых и обратных задач для уравнений (2) и (3) в прямоугольной области D.

Объектом исследования являются нелокальные прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов единственности, существования и устойчивости решений нелокальных прямых и обратных задач для уравнений смешанного параболо- гиперболического и эллиптико-гиперболического типов составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных и спектрального анализа.

Научная новизна исследования. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения нелокальных прямых и обратных задач для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения или его производных по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам рассматриваемого уравнения. Для каждой из задач установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи, установлена устойчивость решения по граничным данным.

2. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения нелокальной прямой и обратных задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с нелокальными граничными условиями, связывающими значения искомого решения и его производной по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам данного уравнения. Решения поставленных задач построены в виде сумм рядов по собственным функциям, установлены критерии единственности и доказана устойчивость решений по граничным данным.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории обратных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах кафедры высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, лаборатории прикладной математики и информатики отдела физико-математических и технических наук Института прикладных исследований Академии наук Республики Башкортостан (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов, 2008 – 2011 гг.), а также на следующих всероссийских и международных конференциях, семинарах, симпозиумах:

1. Международный Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VIII Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (г. Нальчик, 25 – 30 июня 2010 г.). **2.** Девятая молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2010» (г. Казань, 1 – 6 октября 2010 г.). **3.** Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова (г. Якутск, 10 – 13 ноября 2010 г.). **4.** Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского (г.Москва, 30 мая – 4 июня 2011 г.). **5.** IX Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (г. Нальчик, 23 – 27 мая 2011 г.). **6.** Всероссийская конференция с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Стерлитамак, 27 – 30 июня 2011 г.). **7.** Международная конференция «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел» (г. Белгород, 17 – 21 октября 2011 г.). **8.** Десятая молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2011» (г. Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[11] общим объемом 4,06 п.л. При этом статьи [1] – [3] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В совместной работе [3] постановка задачи принадлежит научному руководителю К.Б. Сабитову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 110 наименований. Общий объем диссертации – 113 страниц.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за предложенную тематику исследований, полезные замечания, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1** для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа исследуются нелокальные прямые и обратные задачи с неизвестной правой частью с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения или его производной по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам уравнения. Методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

Рассмотрим уравнение параболо-гиперболического типа (2) в прямоугольной области $D = \{(x,t) |\ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha,\ \beta > 0$ и $b \geq 0$ – заданные действительные числа. Для этого уравнения поставлены и решены следующие нелокальные прямые и обратные задачи.

Задача 1.1.а. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+),\ Lu(x,t) \equiv 0, (x,t) \in D_- \cup D_+; \qquad (4)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ -\alpha \leq t \leq \beta; \qquad (5)$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \qquad (6)$$

где $\varphi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Задача 1.1.б. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (4), (5) *и*

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \qquad (7)$$

здесь $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Задача 1.2. *Найти в области D функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+),\ f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1]; \qquad (8)$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \qquad (9)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, -\alpha \leq t \leq \beta; \qquad (10)$$

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq 1; \qquad (11)$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq 1, \qquad (12)$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$.

Задача 1.3. *Найти в области D функции $u(x,t)$ и $f(x,t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_x^2(D_+),\ f_i(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1];$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, -\alpha \leq t \leq \beta;$$

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x),\ u(x,\beta) = g(x),\ 0 \leq x \leq 1,$$

здесь $i=1,2$, $\psi(x),\varphi(x),g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции, причем* $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=g(0)=g(1)=0$.

Отметим, что в задачах 1.1.а, 1.1.б, 1.2 и 1.3 оператор L определен левой частью уравнения (2).

Для примера здесь приведем результаты по **задаче 1.2.** Методом спектрального анализа решение задачи (8)–(12) построено в виде сумм рядов

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin\pi kx, \tag{13}$$

$$f(x)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}f_k\sin\pi kx, \tag{14}$$

где

$$u_k(t)=\begin{cases}\frac{\psi_k}{\lambda_k^2\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(k)}\Big[e^{-\lambda_k^2t}-\cos\lambda_k\alpha-\lambda_k\sin\lambda_k\alpha\Big]+\varphi_k, & t>0,\\ \frac{\psi_k}{\lambda_k^2\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(k)}\Big[\cos\lambda_kt-\cos\lambda_k\alpha-\lambda_k(\sin\lambda_kt+\sin\lambda_k\alpha)\Big]+\varphi_k, & t<0,\end{cases} \tag{15}$$

$$f_k=\lambda_k^2\Big[\varphi_k-\frac{\psi_k}{\lambda_k^2\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(k)}(\cos\lambda_k\alpha+\lambda_k\sin\lambda_k\alpha)\Big],\ \lambda_k^2=b^2+(\pi k)^2,\ k\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

$$\varphi_k=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin\pi kx dx,\quad \psi_k=\sqrt{2}\int_0^1\psi(x)\sin\pi kx dx,$$

при условии, что при всех $k\in\mathbb{N}$

$$\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(k)=\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\alpha-\cos\lambda_k\alpha+e^{-\lambda_k^2\beta}\neq0. \tag{17}$$

Если при некоторых α,β,b и $k=p$ нарушено условие (17), т.е. $\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(p)=0$, то задача (8) – (12) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t)=\begin{cases}(e^{-\lambda_p^2t}-\cos\lambda_p\alpha-\lambda_p\sin\lambda_p\alpha)\sin\pi px, & t>0,\\ [\cos\lambda_pt-\cos\lambda_p\alpha-\lambda_p(\sin\lambda_pt+\sin\lambda_p\alpha)]\sin\pi px, & t<0,\end{cases} \tag{18}$$

$$f_p(x)=f_p\sin\pi px,\quad f_p=-\lambda_p^2(\cos\lambda_p\alpha+\lambda_p\sin\lambda_p\alpha). \tag{19}$$

Выражение $\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(k)$ относительно α равно нулю только в том случае, когда $\alpha=\frac{1}{\lambda_k}\big[\arcsin\big(\frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}\big)+(-1)^{n+1}\arcsin\big(\frac{\lambda_ke^{-\lambda_k^2\beta}}{\sqrt{1+\lambda_k^2}}\big)+\pi n\big],\ n=0,1,2,\dots$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Если существует решение* $u(x,t)$ *и* $f(x)$ *задачи* 1.2, *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k\in\mathbb{N}$ *выполнены условия* (17).

Поскольку α,β и b – любые числа из промежутков задания, то при достаточно больших k выражение $\delta_{\alpha\beta b}^{(2)}(k)$ может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей». Для обоснования существования решения задачи (8) – (12) необходимо показать существование чисел α,β и b

таких, что при достаточно больших k выражение $\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k)$ отделено от нуля. Приведем достаточные условия отделенности выражения $\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k)$ от нуля.

Лемма 1.1. *Если выполнено одно из следующих условий:* 1) $\alpha = p$ – *натуральное число,* 2) $\alpha = p/q \notin \mathbb{N}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, *НОД* $(p, q) = 1$, q – *нечетное, то при любых* $b \geq 0$ *и* $\beta > 0$ *существуют номер* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и положительная постоянная* C_0, *зависящие, вообще говоря, от* α, β *и* b, *такие, что при* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k)| \geq C_0 > 0. \tag{20}$$

Если при указанных α, β и b выражение $\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, ..., k_l$, где $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_l \leq k_0$; k_n, $n = \overline{1, l}$, l – заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (8) – (12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 \psi(x) \sin \pi kx dx = \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi kx dx = 0, \ k = k_1, ..., k_l. \tag{21}$$

Тогда решение задачи (8) – (12) определяется в виде

$$u(x,t) = \sqrt{2}\Big(\sum_{k=1}^{k_1-1} + ... + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty}\Big) u_k(t) \sin \pi kx + \sum_p A_p u_p(x,t), \tag{22}$$

$$f(x) = \sqrt{2}\Big(\sum_{k=1}^{k_1-1} + ... + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty}\Big) f_k \sin \pi kx + \sum_p A_p f_p(x), \tag{23}$$

где функции $u_k(t)$, f_k, $u_p(x,t)$ и $f_p(x)$ определяются соответственно по формулам (15), (16), (18) и (19), A_p – произвольная постоянная, в суммах $\sum_p$ индекс p принимает значения $k_1, k_2, ..., k_l$, конечные суммы выражений (22), (23) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 1.2. *Пусть* $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi(x) \in C^3[0,1]$ *и* $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ *и выполнены условия* (20) *при всех* $k > k_0$. *Тогда если* $\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (8) – (12) *и оно определяется рядами* (14), (13); *если* $\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k) = 0$ *при* $k = k_1, k_2, ..., k_l \leq k_0$, *то задача* (8) – (12) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (21) *и решение в этом случае определяется рядами* (22), (23).

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2 *и* $\delta^{(2)}_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$. *Тогда для решения* (13), (14) *задачи* 1.2 *имеют место оценки:*

$$||u(x,t)||_{L_2} \leq M_6(||\psi||_{L_2} + ||\varphi||_{L_2}), \ \ ||f(x)||_{L_2} \leq M_7(||\psi||_{W_2^1} + ||\varphi||_{W_2^2}),$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leq M_8(||\psi||_{W_2^0} + ||\varphi||_{W_2^1}), \ \ ||f(x)||_{C[0,1]} \leq M_9(||\psi||_{W_2^2} + ||\varphi||_{W_2^3}),$$

где постоянные M_i *не зависят от функций* $\psi(x)$ *и* $\varphi(x)$.

Аналогично установлены критерии единственности, доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач 1.1.а, 1.1.б и 1.3.

Глава 2 посвящена изучению нелокальных прямых и обратных задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с неизвестной правой частью с нелокальными граничными условиями, связывающими значения искомого решения и его производной по нормали на противоположных сторонах прямоугольной области, принадлежащие разным типам уравнения. Также методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

Для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе (3) в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$ поставлены и исследованы следующие задачи.

Задача 2.1. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+),\ Lu(x,y) \equiv 0,\ (x,y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0,\ \ -\alpha \le y \le \beta;$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le 1;$$

$$u_y(x,-\alpha) - u_y(x,\beta) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le 1,$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}, D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 2.2.а. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+),\ f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1]; \tag{24}$$

$$Lu(x,y) \equiv f(x),\ (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{25}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0,\ -\alpha \le y \le \beta; \tag{26}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{27}$$

$$u_y(x,-\alpha) - u_y(x,\beta) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{28}$$

$$u(x,-d) = g(x),\ 0 \le x \le 1,\ -\alpha < -d < 0, \tag{29}$$

здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$, $d > 0$ – заданное действительное число.

Задача 2.2.б. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям* (24) – (28) *и*

$$u(x,d) = g(x),\ 0 \le x \le 1,\ 0 < d < \beta, \tag{30}$$

где $g(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, $g(0) = g(1) = 0$.

Задача 2.2.в. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям* (24) – (26), (28) *и*

$$u(x,-\alpha) = h(x),\ u(x,\beta) = g(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{31}$$

причем $h(0)=h(1)=g(0)=g(1)=0$.

Задача 2.3. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D_-\cup D_+),\ f_i(x)\in C(0,1)\cap L_2[0,1]; \tag{32}$$

$$Lu(x,y)\equiv f(x,y),\quad (x,y)\in D_-\cup D_+; \tag{33}$$

$$u(0,y)=u(1,y)=0, -\alpha\le y\le\beta; \tag{34}$$

$$u(x,-\alpha)-u(x,\beta)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1; \tag{35}$$

$$u_y(x,-\alpha)=\psi(x),\ u_y(x,\beta)=h(x),\ 0\le x\le 1; \tag{36}$$

$$u(x,d)=g(x),\ 0\le x\le 1,\ 0<d<\beta, \tag{37}$$

здесь $i=1,2$, $\varphi(x),\psi(x),h(x),g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $\varphi(0)=\varphi(1)=0,\psi(0)=\psi(1)=0,g(0)=g(1)=0,h(0)=h(1)=0$.

Отметим, что в задачах 2.1, 2.2.а, 2.2.б, 2.2.в и 2.3 оператор L определен левой частью уравнения (3).

Рассмотрим здесь **задачу 2.2.а**, решение которой построено в виде сумм рядов

$$u(x,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(y)\sin\pi kx, \tag{38}$$

$$f(x)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}f_k\sin\pi kx, \tag{39}$$

где

$$u_k(y)=\begin{cases} a_ke^{\mu_ky}+b_ke^{-\mu_ky}-\frac{f_k}{\mu_k^2}, & y>0,\\ a_k(\cos\mu_ky+\sin\mu_ky)+b_k(\cos\mu_ky-\sin\mu_ky)-\frac{f_k}{\mu_k^2}, & y<0,\end{cases} \tag{40}$$

$$a_k=\frac{1}{4\mu_k\Delta_{\alpha\beta b}(k)}\big[\varphi_k\mu_k(\cos\mu_k\alpha-\sin\mu_k\alpha-e^{-\mu_k\beta})+\psi_k(\cos\mu_k\alpha+\sin\mu_k\alpha-e^{-\mu_k\beta})\big], \tag{41}$$

$$b_k=\frac{1}{4\mu_k\Delta_{\alpha\beta b}(k)}\big[\varphi_k\mu_k(\sin\mu_k\alpha+\cos\mu_k\alpha-e^{\mu_k\beta})+\psi_k(\sin\mu_k\alpha-\cos\mu_k\alpha+e^{\mu_k\beta})\big], \tag{42}$$

$$f_k=\frac{1}{2\Delta_{\alpha\beta b}(k)}\big[\mu_k^2\varphi_k(\cos\mu_k(\alpha-d)-\sin\mu_kd\,\mathrm{sh}\,\mu_k\beta-\cos\mu_kd\,\mathrm{ch}\,\mu_k\beta)- \\ -\mu_k\psi_k(\sin\mu_k(d-\alpha)-\sin\mu_kd\,\mathrm{ch}\,\mu_k\beta-\cos\mu_kd\,\mathrm{sh}\,\mu_k\beta)\big]-\mu_k^2g_k \tag{43}$$

при условии, что при всех $k\in\mathbb{N}$

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k)=1-\cos\mu_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\mu_k\beta\neq 0. \tag{44}$$

Если при некоторых α, β, b и $k=p\in\mathbb{N}$ нарушено условие (44), то однородная задача (24) – (29) (где $\varphi(x)=\psi(x)=g(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,y)=\begin{cases}\big(K_{1p}e^{\mu_py}+e^{-\mu_py}-K_{2p}\big)\sin\pi px, & y>0,\\ \big((K_{1p}+1)\cos\mu_py+(K_{1p}-1)\sin\mu_py-K_{2p}\big)\sin\pi px, & y<0,\end{cases} \tag{45}$$

$$f_p(x) = f_p \sin \pi p x, \quad f_p = \mu_p^2 K_{2p}, \tag{46}$$

где $K_{1p} = \frac{\sin \mu_p\alpha + \cos \mu_p\alpha - e^{-\mu_p\beta}}{\sin \mu_p\alpha - \cos \mu_p\alpha + e^{\mu_p\beta}}$, $K_{2p} = \frac{2(\sin \mu_p(\alpha-d) + \cos \mu_p d \operatorname{sh} \mu_p\beta + \sin \mu_p d \operatorname{ch} \mu_p\beta)}{\sin \mu_p\alpha - \cos \mu_p\alpha + e^{\mu_p\beta}}$.

Выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ относительно α равно нулю только в том случае, когда $\alpha = \frac{1}{\mu_k}\big(\arccos \frac{1}{\operatorname{ch} \mu_k\beta} + 2\pi n\big)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи* (24) – (29), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (44).

Так как α, β и b – любые заданные числа, то при достаточно больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей». Для обоснования существования решения задачи 2.2.а необходимо показать существование чисел α, β и b таких, что при достаточно больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 2.1. *Если выполнено одно из следующих условий:* 1) $\alpha = p$ *– любое натуральное число,* 2) $\alpha = p/q \notin \mathbb{N}$, *где* $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, q *– нечетное, то при любых* $b \geq 0$ *и* $\beta > 0$ *существуют номер* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и положительная постоянная* C_0, *зависящие, вообще говоря, от* α, β *и* b, *такие, что при* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| \geq C_0 e^{\pi k\beta} > 0. \tag{47}$$

Если при указанных α, β и b выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ при некоторых $k = k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_l$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_l \leq k_0$; k_n, $n = \overline{1, l}$, l – заданные натуральные числа, то для разрешимости задачи (24) – (29) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \varphi_k\mu_k(\cos \mu_k\alpha - \sin \mu_k\alpha - e^{-\mu_k\beta}) + \psi_k(\cos \mu_k\alpha + \sin \mu_k\alpha - e^{-\mu_k\beta}) = 0, \\ \varphi_k\mu_k(\sin \mu_k\alpha + \cos \mu_k\alpha - e^{\mu_k\beta}) + \psi_k(\sin \mu_k\alpha - \cos \mu_k\alpha + e^{\mu_k\beta}) = 0, \\ \mu_k\varphi_k(\cos \mu_k(\alpha - d) - \sin \mu_k d \operatorname{sh} \mu_k\beta - \cos \mu_k d \operatorname{ch} \mu_k\beta) - \\ -\psi_k(\sin \mu_k(d - \alpha) - \sin \mu_k d \operatorname{ch} \mu_k\beta - \cos \mu_k d \operatorname{sh} \mu_k\beta) = 0, \\ \qquad\qquad k = k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_l. \end{cases} \tag{48}$$

Тогда решение задачи (24) – (29) определяется в виде

$$u(x, y) = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty}\right) u_k(y) \sin \pi kx + \sum_p A_p u_p(x, y), \tag{49}$$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty}\right) f_k \sin \pi kx + \sum_p A_p f_p(x), \tag{50}$$

где функции $u_k(y)$, f_k и $u_p(x, y)$, $f_p(x)$ определяются соответственно формулами (40), (43) и (45), (46), A_p – произвольные постоянные, в суммах $\sum_p$ индекс p принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_l$, конечные суммы выражений (49), (50) следует считать равными нулю, если нижний предел больше верхнего.

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, $g(x) \in C^3[0, 1]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = 0$ *и выполнена оценка* (47) *при* $k > k_0$. *Тогда если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при*

$k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (24) – (29) *и оно определяется рядами* (38), (39); *если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ *при* $k = k_1$, k_2, ..., $k_p \leq k_0$, *то задача* (24) – (29) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (48) *и решение в этом случае определяется рядами* (49), (50).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2 *и* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$. *Тогда для решения* (38) *и* (39) *задачи* (24) – (29) *имеют место оценки:*

$$||u(x,y)||_{L_2} \leq M_6\big(||\varphi||_{L_2}+||\psi||_{L_2}+||g||_{L_2}\big), ||f(x)||_{L_2} \leq M_7\big(||\varphi||_{W_2^2}+||\psi||_{W_2^1}+||g||_{W_2^2}\big),$$

$$||u(x,y)||_{C(\overline{D})} \leq M_8\big(||\varphi||_{W_2^0} + ||\psi||_{W_2^1} + ||g||_{W_2^1}\big),$$

$$||f(x)||_{C[0,1]} \leq M_9\big(||\varphi||_{W_2^3} + ||\psi||_{W_2^2} + ||g||_{W_2^3}\big),$$

где постоянные M_i *не зависят от функций* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $g(x)$.

Для задач 2.1, 2.2.б, 2.2.в и 2.3 получены аналогичные результаты. Установлены критерии единственности, решение построено в виде сумм рядов, доказаны теоремы существования и устойчивости решений. В **задаче 2.3** в отличие от других задач корректность имеет место при всех $\alpha > 0$ и $\beta \geq \beta_0 > 0$.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Юнусова, Г.Р.: *Обратная задача для уравнения смешанного типа с нелокальным граничным условием* / Г.Р. Юнусова // Научные ведомости БелГУ, Серия: Математика. Физика. 2011. №5(100). Вып. 22. С.153–166.

2. Юнусова, Г.Р.: *Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* / Г.Р. Юнусова // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. – 2011. – №8(89). – С. 108 – 117.

3. Юнусова, Г.Р.: *Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным граничным условием* / К.Б. Сабитов, Г.Р. Юнусова // Дифференц. уравнения. 2012. – Т. 48. – № 2. – С. 238 – 245.

Публикации в других изданиях

4. Юнусова, Г.Р.: *Нелокальная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* / Г.Р. Юнусова // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VIII Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» – Нальчик – Эльбрус, 2010. – С. 124 – 126.

5. Юнусова, Г.Р.: *Краевая задача для уравнения смешанного типа с нелокальным граничным условием* / Г.Р. Юнусова // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2010»; Казань, 1-6 октября 2010 г.; Казан.матем.об-во. – 2010. – Т.40. – С. 372 – 375.

6. Юнусова, Г.Р.: *Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе* / Г.Р. Юнусова // Всероссийский научный семинар «Неклассические уравнения математической физики», посвященный 65-

летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова. Часть II: Тез. докл. Якутск: Филиал изд-ва СВФУ: ИМИ, 2010. – С. 70 – 75.

7. Юнусова, Г.Р.: *Обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе с двумя нелокальными граничными условиями* / Г. Р. Юнусова // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г.Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского): Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2011. С. 403 – 404.

8. Юнусова, Г.Р.: *Обратная задача для уравнения смешанного типа с двумя нелокальными граничными условиями* / Г.Р. Юнусова // Материалы IX Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». – Нальчик, 2011. – С. 98 – 103.

9. Юнусова, Г.Р.: *Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе с двумя нелокальными условиями* / Г. Р. Юнусова // Дифференциальные уравнения и их приложения. Труды Всероссийской научной конференции с международным участием (27 – 30 июня 2011 г., г. Стерлитамак) Уфа: Гилем, 2011. – С. 190 – 196.

10. Юнусова, Г.Р.: *Об одной обратной задаче для уравнения смешанного типа с нелокальным условием* / Г. Р. Юнусова // Комплексный анализ и его приложения в дифференц. уравнениях и теории чисел: сб. мат. Международной конференции. – Белгород: ИПК НИУ «БелГУ», 2011. – С. 131 – 132.

11. Юнусова, Г.Р.: *Краевая задача для уравнения смешанного типа с нелокальным граничным условием* / Г.Р. Юнусова // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения - 2011»; Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.; Казан.матем.об-во. – Казань. – 2011. – Т.44. – С. 322 – 324.