На правах рукописи

Яковлева Юлия Олеговна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Белгород — 2013

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Андреев Александр Анатольевич

Официальные оппоненты: Зарубин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», физико-математический факультет, заведующий кафедрой «Математический анализ и дифференциальные уравнения»

Миронов Алексей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Елабужский институт Казанского федерального университета», физико-математический факультет, доцент кафедры «Математического анализа, алгебры и геометрии»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет», факультет прикладной математики, информатики и механики

Защита состоится 10 декабря 2013 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, БелГУ, корпус 1, ауд. 407.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

Автореферат разослан 30 октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.015.08 — Гриценко С.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование краевых задач для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес к этому типу уравнений объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их важными практическими приложениями.

Гиперболические уравнения и системы уравнений гиперболического типа третьего и более высокого порядка являются математическими моделями разнообразных процессов: флаттера свободнонесущего крыла; нестационарного прямолинейного течения несжимаемой жидкости второго порядка; течения жидкости Навье-Стокса-Олдройта; колебаний упруговязкой нити; колебаний стержня при наличии релаксации и последействия простейшего типа.

Одним из основных вкладов в начало современной теории гиперболических уравнений второго порядка в частных производных является получение Г. Риманом интегрального представления решения задачи Коши в форме, аналогичной представлениям решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с помощью функций Грина.

Идею метода Римана многие математики пытались перенести на более широкий класс уравнений. В. Вольтерра, Ж. Адамар, С. Л. Соболев привели аналогичную форму представления решений задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка с числом независимых переменных больше двух. А. Старков, Л. Бианки, О. Николетти предложили распространение метода решения задачи Коши, разработанного Риманом, на общий случай дифференциального уравнения n-го порядка в частных производных с n независимыми переменными. Обобщение метода Римана на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными было выполнено Э. Хольмгреном. Различные аспекты исследования метода Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка приведены в работах Т. В. Чекмарева, а также Б. Н. Бурмистрова, где матрица Римана построена в замкнутом виде для одной системы частного вида.

В монографиях Бицадзе А. В. и Векуа И. Н. приведено применение метода Римана для одного класса гиперболических систем второго порядка с двумя независимыми переменными и кратными характеристиками. Решения краевых задач для систем гиперболических уравнений второго порядка методом Римана описаны в работах А. А. Андреева и многих других исследователей.

П. Бургатти и Ф. Реллих обобщили метод Римана решения задачи Коши для линейных уравнений порядка выше второго с числом независимых переменных равным двум. Дальнейшему развитию метода Римана для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными выше второго порядка посвящены работы А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова, О. М. Джохадзе, В. И. Жегалова, Е. А. Уткиной, В. А. Севастьянова, А. Н. Миронова, Б. Мидорашвили, О. С. Зикирова и других.

Исследование методов решения краевых задач для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений, без вспомогательных функций (функций Римана, Римана-Адамара), рассмотрено в работах Ж. Адамара, Л. Берса, Ф. Джона, И. Г. Петровского, О. А. Олейник, А. В. Бицадзе, С. С. Харибегашвили.

Результаты А. В. Бицадзе, И. Г. Петровского, А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова, О. М. Джохадзе, В. И. Жегалова, А. Н. Миронова и А. А. Андреева являются основой для исследования краевых задач для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа, рассматриваемых в настоящей работе.

Актуальность исследований таких краевых задач обоснована как внутренней логикой развития соответствующих разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных, базирующихся на идеях Римана, так и ясными перспективами использования этих задач при математическом моделировании различных процессов.

Целью диссертационной работы является построение в явном виде решений краевых задач для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка частного вида с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными; построение решений краевых задач для системы уравнений гиперболического типа третьего порядка, не содержащей производных меньше третьего порядка, с некратными характеристиками с двумя независимыми переменными в случае коммутирующих матричных коэффициентов.

Методы исследования. В настоящей диссертационной работе использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений с частными производными, аналитические и алгебраические методы матричного исчисления, аппарат специальных функций.

Научная новизна данной работы заключается в том, что:

- в явном виде построены матрицы Римана задач Коши и Гурса для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка частного вида с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными;

- получены в явном виде регулярные решения задач Коши и Гурса для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка частного вида с кратными характеристиками с двумя независимыми переменными;

- исследованы условия корректности постановки характеристической задачи для гиперболического уравнения с некратными характеристиками третьего порядка с двумя независимыми переменными;

- найдены регулярные решения характеристической задачи и задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа с некратными характеристиками третьего порядка с двумя независимыми переменными в случае коммутирующих матричных коэффициентов.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для дальнейших исследований краевых задач для систем уравнений гиперболического типа высокого порядка. Кроме научного интереса для широкого круга математиков и специалистов, работающих в области уравнений математической физики, полученные результаты могут быть полезными при решении прикладных задач, сводящихся к таким уравнениям.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построение в явном виде матриц Римана и регулярных решений задач Коши и Гурса для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка частного вида с кратными характеристиками.

2. Условия корректности постановки характеристической задачи для системы уравнений гиперболического типа третьего порядка, не содержащей производных меньше третьего порядка, с некратными характеристиками.

3. Получение в явном виде регулярных решений задачи Коши и характеристической задачи для системы уравнений гиперболического типа третьего порядка, не содержащей производных меньше третьего порядка, с некратными характеристиками в случае коммутирующих матричных коэффициентов.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и семинарах: восьмой и девятой Всероссийских научных конференциях с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2011г., 2013г.); шестнадцатой Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (г. Саратов, 2012г.); двадцатой международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (г. Ростов-на-Дону, 2012г.); втором международном Российско-Узбекском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (г. Нальчик, 2012г.); третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 2012г.); международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Белгород, 2013г.); научном семинаре «Неклассические задачи математической физики» кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (руководитель семинара — д.ф.-м.н. Л. С. Пулькина, 2013г.); научном семинаре кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета (руководитель семинара — д.ф.-м.н. В. П. Радченко, 2012г., 2013г.).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 14 публикациях, из них 6 — в журналах из перечня ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата. Статьи [1, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 14] опубликованы в соавторстве с А. А. Андреевым и их результаты принадлежат авторам в равной мере.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и библиографического списка, содержащего 118 наименований. Общий объем диссертации составляет 116 страниц.

Содержание работы

Во введении приведен краткий обзор исследований, связанных с темой диссертационной работы, отображены ее содержание, постановка задач исследования, основные результаты и подход к исследованию, а также дополнительная информация о работе.

В первой главе для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка с кратными характеристиками частного вида рассмотрены и решены методом Римана задачи Коши и Гурса; с использованием аппарата гипергеометрических функций построены матрицы Римана в явном виде.

Для системы

$$U_{xxy} + \Omega U = 0, \tag{1}$$

где $U(x, y)$ — m - мерная вектор-функция, Ω — постоянная действительная $(m \times m)$ матрица, поставлены и решены следующие задачи.

Задача Коши. Найти регулярное решение $U(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы (1) в плоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $y = x$:

$$U(x, y)|_{y=x} = A(x), \ \frac{\partial U(x,y)}{\partial n}|_{y=x} = B(x), \ \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial n^2}|_{y=x} = C(x), \tag{2}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^2(\mathbb{R})$ – заданные вектор-функции, $n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — нормаль к нехарактеристической линии.

Задача Гурса. Найти регулярное решение $U(x, y) \in C^3(D)$ системы (1) в области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ независимых переменных, удовлетворяющее условиям на характеристиках:

$$U(x, y)|_{x=0} = A(y), \ U_x(x, y)|_{x=0} = B(y), \ U(x, y)|_{y=0} = C(x), \tag{3}$$

где $A(y)$, $B(y)$, $C(x) \in C^1(\overline{I})$, $I = (0, 1)$ — заданные вектор-функции такие, что $A(0) = C(0)$, $C'(0) = B(0)$.

В разделах 1.1, 1.2 приведены необходимые сведения об обобщенных гипергеометрических функциях, а также элементы классификации гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка, которые используются в дальнейших исследованиях.

В разделе 1.3 построены в явном виде решения задач (2), (3) для системы (1), результаты сформулированы в виде теорем.

Теорема 1.1. *Если вектор-функции* $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^2(\mathbb{R})$, *то существует единственное регулярное решение* $U(x, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *задачи Коши* (2) *для системы уравнений* (1) *в плоскости* $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Решением задачи Коши является вектор-функция

$$U(x_0,\, y_0) = A(y_0) - \frac{1}{4}\int\limits_{x_0}^{y_0}(x-x_0)\,{}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \tau\Omega\right)(A''(x)-C(x))dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{y_0}((x-x_0)^2+1)\,{}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \tau\Omega\right)(A(x)+A'(x)+B(x))dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_{x_0}^{y_0}(x-x_0)^2(x-y_0)\Omega\,{}_0F_2\left(2,\, \frac{5}{2};\, \tau\Omega\right)(A'(x)+B(x))dx-$$

$$-\frac{1}{60}\int\limits_{x_0}^{y_0}(x-x_0)^4(x-y_0)\Omega^2\,{}_0F_2\left(3,\, \frac{7}{2};\, \tau\Omega\right)A(x)dx,$$

где $\tau = \frac{(x-x_0)^2(x-y_0)}{4}$, ${}_0F_2\,(a, b; Z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция матричного аргумента Z, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.2. *Если вектор-функции* $A(y)$, $B(y)$, $C(x) \in C^1(\overline{I})$, $I = (0,1)$, *то в области* $D = \{(x,\, y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}$ *существует единственное регулярное решение* $U(x,\, y) \in C^3(D)$ *задачи Гурса* (3) *для системы уравнений* (1).

Методом Римана построено регулярное решение задачи Гурса:

$$U(x_0,\, y_0) = \left({}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \tau_0\Omega\right) + \frac{4}{3}\tau_0\Omega\,{}_0F_2\left(2,\, \frac{5}{2};\, \tau_0\Omega\right)\right)A(0)+$$

$$+\int\limits_0^{y_0}\left({}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \tau_1\Omega\right) + \frac{4}{3}\tau_1\Omega\,{}_0F_2\left(2,\, \frac{5}{2};\, \tau_1\Omega\right)\right)A'(y)dy+$$

$$+\int\limits_0^{y_0}x_0\left({}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \tau_1\Omega\right)\right)B'(y)dy+$$

$$+\int\limits_0^{x_0}\left({}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \tau_2\Omega\right) + \frac{4}{3}\tau_2\Omega\,{}_0F_2\left(2,\, \frac{5}{2};\, \tau_2\Omega\right)\right)C'(x)dx,$$

где $\tau_0 = -\frac{1}{4}x_0^2\,y_0$, $\tau_1 = \frac{1}{4}x_0^2\,(y-y_0)$, $\tau_2 = -\frac{1}{4}\,(x-x_0)^2\,y_0$.

Матрица Римана задач Коши и Гурса для системы уравнений гиперболического типа (1) вводится как решение некоторой специальной задачи Гурса и имеет вид:

$$V(x_0,\, y_0; x,\, y) = (x-x_0)\;{}_0F_2\left(1,\, \frac{3}{2};\, \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)}{4}\Omega\right).$$

В разделе 1.4 в явном виде получены решения задач Коши и Гурса методом Римана для системы

$$MU \equiv U_{xxyy} + \Omega U = 0, \tag{4}$$

где $U\,(x,\,y)$ — искомая m - мерная вектор-функция, Ω — постоянная действительная $(m \times m)$ матрица; с использованием аппарата обобщенных гипергеометрических функций построена матрица Римана. Основные результаты сформулированы в виде теорем.

Теорема 1.3. *Если $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x) \in C^3(\mathbb{R})$, то существует единственное регулярное решение $U\,(x,\,y) \in C^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ задачи Коши для системы уравнений (4) в плоскости $\{(x,\,y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $y = x$:*

$$U\,(x,\,y)\,|_{y=x} = A(x),\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial n}|_{y=x} = B(x),$$

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial n^2}|_{y=x} = C(x),\ \frac{\partial^3 U(x,y)}{\partial n^3}|_{y=x} = D(x),$$

где $n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – нормаль к нехарактеристической линии.

Регулярное решение задачи Коши имеет вид:

$$U\,(x_0,\,y_0) = A(y_0) + \frac{1}{4}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-y_0)\,{}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau\Omega\right)(A''(x) - C(x))\right]dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)(x-y_0)\,{}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau\Omega\right)(A'''(x) - B''(x) - C'(x))\right]dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[((x-x_0)(x-y_0)+1)\,{}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau\Omega\right)(D(x) - 4A'(x) - 4B(x))\right]dx -$$

$$+\frac{1}{72}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^2(x-y_0)^3\Omega\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau\Omega\right)(A''(x) - C(x))\right]dx -$$

$$-\frac{1}{9}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^2(x-y_0)^2\Omega\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau\Omega\right)(A'(x) + B(x))\right]dx -$$

$$-\frac{1}{3600}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^4(x-y_0)^4\Omega^2\,{}_0F_3\left(3,\,\frac{7}{2},\,\frac{7}{2};\,\tau\Omega\right)(A'(x) + B(x))\right]dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^2(x-y_0)\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau\Omega\right)A(x)\right]dx -$$

$$-\frac{1}{225}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^4(x-y_0)^3\Omega^2\,{}_0F_3\left(3,\,\frac{7}{2},\,\frac{7}{2};\,\tau\Omega\right)A(x)\right]dx-$$

$$-\frac{1}{529600}\int\limits_{x_0}^{y_0}\left[(x-x_0)^6(x-y_0)^5\Omega^3\,{}_0F_3\left(4,\,\frac{9}{2},\,\frac{9}{2};\,\tau\Omega\right)A(x)\right]dx,$$

где $\tau=\frac{(x-x_0)^2(x-y_0)^2}{16}$.

Теорема 1.4. *Если* $A(y)$, $B(y)$, $C(x)$, $D(x)\in C^1(\overline{I})$, $I=(0,1)$, *то существует единственное регулярное решение* $U\,(x,\,y)\in C^4(D)$ *задачи Гурса для системы уравнений* (4) *в области* $D=\{(x,\,y)\,:\,0<x<1,\,0<y<1\}$, *удовлетворяющее условиям на характеристиках:*

$$U\,(x,\,y)\,|_{x=0}=A(y),\;U_x\,(x,\,y)\,|_{x=0}=B(y),$$
$$U\,(x,\,y)\,|_{y=0}=C(x),\;U_y\,(x,\,y)\,|_{y=0}=D(x).$$

Методом Римана построено регулярное решение задачи Гурса:

$$U\,(x_0,\,y_0)=A(y_0)-x_0y_0\,{}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau_0\Omega\right)B'(0)+$$

$$+\int\limits_0^{x_0}y_0\left({}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau_1\Omega\right)+\frac{8}{9}\tau_1\Omega\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau_1\Omega\right)\right)D'(x)dx+$$

$$+\int\limits_0^{x_0}\left({}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau_1\Omega\right)+\frac{32}{9}\Omega\tau_1\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau_1\Omega\right)\right)C'(x)dx+$$

$$+\frac{32}{225}\int\limits_0^{x_0}\left(\Omega^2\tau_1^2\,{}_0F_3\left(3,\,\frac{7}{2},\,\frac{7}{2};\,\tau_1\Omega\right)\right)C'(x)dx+$$

$$+\int\limits_0^{y_0}x_0\left({}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\tau_2\Omega\right)+2\tau_2\Omega\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau_2\Omega\right)\right)B'(y)dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{y_0}x_0^2(y-y_0)\Omega\,{}_0F_3\left(2,\,\frac{5}{2},\,\frac{5}{2};\,\tau_2\Omega\right)A(y)dy+$$

$$+\frac{16}{225}\int\limits_0^{y_0}x_0^2(y-y_0)\Omega^2\tau_2\,{}_0F_3\left(3,\,\frac{7}{2},\,\frac{7}{2};\,\tau_2\Omega\right)A(y)dy+$$

$$+\frac{16}{33075}\int\limits_0^{y_0}x_0^2(y-y_0)\Omega^3\tau_2^2\,{}_0F_3\left(4,\,\frac{9}{2},\,\frac{9}{2};\,\tau_2\Omega\right)A(y)dy,$$

где $\tau_0 = \frac{1}{16}x_0^2\,y_0^2$, $\tau_1 = \frac{1}{16}(x-x_0)^2 y_0^2$, $\tau_2 = \frac{1}{16}x_0^2\,(y-y_0)^2$.

Матрица Римана задач Коши и Гурса для системы уравнений гиперболического типа (4) вводится как решение некоторой специальной задачи Гурса и имеет вид:

$$V(x_0,\,y_0;x,\,y) = (x-x_0)\,(y-y_0)\ {}_0F_3\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,\frac{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{16}\Omega\right).$$

Во второй главе рассмотрены характеристическая задача и задача Коши для системы уравнений гиперболического типа с некратными характеристиками третьего порядка вида

$$AU_{xxx} + BU_{xxy} + CU_{xyy} + U_{yyy} = 0, \tag{5}$$

где A, B, C – постоянные попарно коммутирующие матрицы второго порядка с различными собственными значениями, $U\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ — двумерная вектор-функция.

Для разделения исследуемой системы на отдельные уравнения в формуле (5) выполнена замена $U = TV$ (при $\det T \neq 0$) и совершен переход к системе вида

$$\Lambda_A V_{xxx} + \Lambda_B V_{xxy} + \Lambda_C V_{xyy} + V_{yyy} = 0, \tag{6}$$

где T – матрица преобразования, одновременно приводящая матрицы A, B, C к диагональной форме Λ_A, Λ_B, Λ_C.

В этом случае преобразованная система (6) распадается на два отдельных уравнения вида

$$\begin{cases} a_1 v^1_{xxx} + b_1 v^1_{xxy} + c_1 v^1_{xyy} + v^1_{yyy} = 0, \\ a_2 v^2_{xxx} + b_2 v^2_{xxy} + c_2 v^2_{xyy} + v^2_{yyy} = 0, \end{cases}$$

характеристическое уравнение каждого из которых имеет три различных отличных от нуля действительных корня $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ и $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ соответственно.

Раздел 2.1 содержит необходимые предварительные построения, включая решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка, не содержащего производных меньше третьего порядка,

$$a_0 u_{xxx} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{xyy} + a_3 u_{yyy} = 0, \tag{7}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — некоторые действительные ненулевые постоянные, и решение задачи Коши для гиперболического уравнения

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{8}$$

Приведена известная **теорема 2.1** Э. Хольмгрена существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы гиперболических уравнений с аналитическими коэффициентами. Построен аналог формулы Даламбера для уравнений (7), (8). Результаты сформулированы в виде лемм.

Лемма 2.1. *Общее решение уравнения* (8) *из класса* $C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *представляется в виде суммы* $u(x,y)=f(x-C_1)+g(y-C_2)+h(x+y-C_3)$ *любых трех функций* f, g *и* h *из класса* $C^3(\mathbb{R})$, *где* C_1, C_2, C_3 *— произвольные константы из* $\mathbb{R}$.

Лемма 2.2. *Если* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)\in C^3(\mathbb{R})$, *то существует единственное регулярное решение* $u\,(x,\,y)\in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *задачи Коши для уравнения* (8) *в плоскости* $\{(x,\,y):x\in\mathbb{R},\,y\in\mathbb{R}\}$, *удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии* $y=x$:

$$u\,(x,\,y)\,|_{y=x}=\alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=x}=\beta(x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{y=x}=\gamma(x),$$

где $n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *— нормаль к нехарактеристической линии.*

Регулярное решение задачи Коши построено в явном виде.

Лемма 2.3. *Если* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)\in C^3(\mathbb{R})$, *то существует единственное регулярное решение задачи Коши* $u\,(x,\,y)\in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *для уравнения* (7) *в плоскости* $\{(x,\,y):x\in\mathbb{R},\,y\in\mathbb{R}\}$, *удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии* $y=0$:

$$u\,(x,\,y)\,|_{y=0}=\alpha(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=0}=\beta(x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{y=0}=\gamma(x),$$

где $n=(0,1)$ *— нормаль к нехарактеристической линии.*

Функция

$$u(x,y)=\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}F(x,y,\lambda_1)-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}F(x,y,\lambda_2)+$$
$$+\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}F(x,y,\lambda_3), \tag{9}$$

$$F(x,y,\lambda)=\alpha(x-\frac{1}{\lambda}y)+\frac{a_1-\lambda a_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda}y}\beta(t)dt+\frac{a_3}{a_0\lambda}\int\limits_0^{x-\frac{1}{\lambda}y}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda}y-t\right)dt,$$

является регулярным решением задачи Коши. Формулу (9) будем называть аналогом формулы Даламбера.

В разделе 2.2 в явном виде построены решения задач Коши для системы уравнений гиперболического типа (5). Основные результаты изложены в теоремах.

Теорема 2.2. *Если* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)\in C^3(\mathbb{R})$, *то для системы уравнений* (5) *существует единственное регулярное решение* $U\,(x,\,y)\in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *задачи Коши в плоскости* $\{(x,\,y):x\in\mathbb{R},\,y\in\mathbb{R}\}$, *удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии* $y=0$:

$$U\,(x,\,0)=A(x),\ \frac{\partial U}{\partial n}\,(x,0)=B(x),\ \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\,(x,0)=C(x),$$

где $n = (0, 1)$ *— нормаль к нехарактеристической линии.*

Доказательство теоремы носит конструктивный характер.

Теорема 2.3. *Если* $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^3[0,\, l]$, *то для системы уравнений* (5) *существует единственное регулярное решение* $U\,(x,\, y) \in C^3(D)$ *задачи Коши, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии* $y = 0$*:*

$$U\,(x,\, 0) = A(x),\ \frac{\partial U}{\partial n}\,(x, 0) = B(x),\ \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\,(x, 0) = C(x),\ x \in [0,\, l],$$

где $n = (0, 1)$ *— нормаль к нехарактеристической линии, область* $D = D_1 \cap D_2$,

$$D_1 = \left\{ (x, y) : \frac{1}{\lambda_1} y < x < \frac{1}{\lambda_1} y + l,\ \frac{1}{\lambda_3} y < x < \frac{1}{\lambda_3} y + l \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) : \frac{1}{\mu_1} y < x < \frac{1}{\mu_1} y + l,\ \frac{1}{\mu_3} y < x < \frac{1}{\mu_3} y + l \right\}.$$

Регулярное решение приведенной задачи Коши построено в явном виде.

Для системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками

$$U_{xxy} - PU_{xyy} = 0, \tag{10}$$

где P— квадратная матрица второго порядка, рассмотрена краевая задача. После некоторых преобразований система (10) распадается на два отдельных уравнения с некратными характеристиками. Справедлива теорема.

Теорема 2.4. *Если* $\alpha^i(x)$, $\beta^i(y)$, $\gamma^i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1,\, 2$, *то для системы уравнений* (10) *в плоскости* $\{(x,\, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ *существует единственное регулярное решение* $U\,(x,\, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *краевой задачи, удовлетворяющее условиям:*

$$\langle l_1, U\,(x,\, x)\rangle = \alpha^1(x),\ \langle l_2, U\,(x,\, -x)\rangle = \alpha^2(x),$$
$$\left\langle l_1, \frac{\partial U}{\partial n_1}\,(x, x) \right\rangle = \beta^1(x),\ \left\langle l_2, \frac{\partial U}{\partial n_2}\,(x, -x) \right\rangle = \beta^2(x),$$
$$\left\langle l_1, \frac{\partial^2 U}{\partial n_1^2}\,(x, x) \right\rangle = \gamma^1(x),\ \left\langle l_2, \frac{\partial^2 U}{\partial n_2^2}\,(x, -x) \right\rangle = \gamma^2(x),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— скалярное произведение,* $n_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $n_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$*;*
l_1, l_2 *— векторы, зависящие от матричного коэффициента системы* (10).

Регулярное решение краевой задачи построено в явном виде.

В разделе 2.3 решены некоторые корректные характеристические задачи в плоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}$ и в области, ограниченной характеристиками, для уравнения

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0 \tag{11}$$

и в плоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ для уравнения

$$a_0 u_{xxx} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{xyy} + a_3 u_{yyy} = 0, \tag{12}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – некоторые действительные постоянные, отличные от нуля. Установлены условия корректности постановки характеристической задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками. Приведен пример, демонстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками. Результаты сформулированы в леммах.

Пусть $\alpha_{od}(x)$, $\beta_{od}(x)$, $\gamma_{od}(x)$, $\alpha_{ev}(x)$, $\beta_{ev}(x)$, $\gamma_{ev}(x)$ — нечетные и четные части функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$ соответственно.

Лемма 2.4. *Если* $\gamma_{od}(x) = \alpha_{od}(x) - \beta_{od}(x)$, $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$, *то характеристическая задача для уравнения* (11)

$$u\,(x,\,0) = \alpha(x),\ u\,(0,\,y) = \beta(y),\ u\,(x,\,-x) = \gamma(x)$$

в плоскости $\{(x,\,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ *корректна по Адамару.*

Регулярное решение $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ характеристической задачи построено в явном виде.

Лемма 2.5. *Если* $\gamma_{od}^{\frac{1}{2}}(x) = \alpha_{od}^{\frac{1}{2}}(x) - \beta_{od}^{\frac{1}{2}}(x)$, $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3[0,\,1]$, *то характеристическая задача для уравнения* (11)

$$u\,(x,\,0) = \alpha(x), u\,(0,\,y) = \beta(y), u\,(x,\,1-x) = \gamma(x)$$

в области $D = \{(x,\,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ *корректна по Адамару.*

В явном виде получена функция $u(x, y) \in C^3(D)$, являющаяся регулярным решением характеристической задачи.

Лемма 2.6. *Если* $\gamma_{od}(x) = \alpha_{od}(\sigma x) + \beta_{od}((1-\sigma)x)$, *где* $\sigma = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\alpha(x), \beta(x)$, $\gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$, *то характеристическая задача для уравнения* (12)

$$u\,(x,\,\lambda_1 x) = \alpha(x),\ u\,(x,\,\lambda_2 x) = \beta(x),\ u\,(x,\,\lambda_3 x) = \gamma(x)$$

в плоскости $\{(x,\,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ *корректна по Адамару.*

Регулярное решение $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ характеристической задачи построено в явном виде:

$$u(x,y) = \alpha\left(\frac{y-\lambda_2 x}{\lambda_1-\lambda_2}\right) + \beta\left(\frac{y-\lambda_1 x}{\lambda_2-\lambda_1}\right) - \frac{1}{2}\alpha(0) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\alpha_{ev}\left(\frac{y-\lambda_3 x}{\lambda_1-\lambda_3}\right) - \alpha_{ev}\left(\frac{y-\lambda_2 x}{\lambda_1-\lambda_2}\right) - \alpha_{ev}\left(\frac{(y-\lambda_1 x)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\beta_{ev}\left(\frac{y-\lambda_3 x}{\lambda_2-\lambda_3}\right) - \beta_{ev}\left(\frac{y-\lambda_1 x}{\lambda_1-\lambda_2}\right) - \beta_{ev}\left(\frac{(y-\lambda_2 x)(\lambda_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left[\gamma_{ev}\left(\frac{(y-\lambda_3 x)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\right) - \gamma_{ev}\left(\frac{y-\lambda_1 x}{\lambda_1-\lambda_3}\right) - \gamma_{ev}\left(\frac{y-\lambda_2 x}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\right].$$

Раздел 2.4 содержит решение характеристической задачи для системы уравнений гиперболического типа (5). Основные результаты изложены в теоремах.

Теорема 2.5. *Если* $\gamma^1_{od}(x) = \alpha^1_{od}(\sigma_1 x) + \beta^1_{od}((1-\sigma_1)x)$, $\gamma^2_{od}(x) = \alpha^2_{od}(\sigma_2 x) + \beta^2_{od}((1-\sigma_2)x)$, *где* $\sigma_1 = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$, $\sigma_2 = \frac{\mu_3-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$, $\alpha^i(x), \beta^i(x), \gamma^i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— скалярное произведение,* l_1, l_2 *зависят от матричных коэффициентов системы* (5), *то характеристическая задача для системы* (5)

$$\langle l_1, U(x, \lambda_1 x)\rangle = \alpha^1(x),\ \langle l_2, U(x, \mu_1 x)\rangle = \alpha^2(x),$$
$$\langle l_1, U(x, \lambda_2 x)\rangle = \beta^1(x),\ \langle l_2, U(x, \mu_2 x)\rangle = \beta^2(x),$$
$$\langle l_1, U(x, \lambda_3 x)\rangle = \gamma^1(x),\ \langle l_2, U(x, \mu_3 x)\rangle = \gamma^2(x)$$

в плоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ *корректна по Адамару.*

Теорема 2.6. *Если* $\gamma^1_{od}(x) = \alpha^1_{od}(x) - \beta^1_{od}(x)$, $\gamma^2_{od}(x) = \alpha^2_{od}(x) + \beta^2_{od}(x)$, $\alpha(x) = (\alpha^1(x), \alpha^2(x))^\top \in C^3(\mathbb{R})$, $\beta(x) = (\beta^1(x), \beta^2(x))^\top \in C^3(\mathbb{R})$, $\gamma(x) = (\gamma^1(x), \gamma^2(x))^\top \in C^3(\mathbb{R})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— скалярное произведение,* S *– постоянная матрица второго порядка, зависящая от матричного коэффициента системы* (10), *то характеристическая задача*

$$U(x, 0) = S\alpha(x),\ U(0, y) = S\beta(y),$$
$$\langle l_1, U(x, -x)\rangle = \gamma^1(x),\ \langle l_2, U(x, x)\rangle = \gamma^2(x)$$

в плоскости $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ *корректна по Адамару.*

Регулярные решения характеристических задач построены в явном виде.

Заключение

1. Для систем уравнений гиперболического типа третьего и четвертого порядка с кратными характеристиками частного вида получены регулярные решения задач Коши и Гурса методом Римана, решения указанных задач и матрица Римана для них получены в явном виде.

2. Сформулированы и исследованы условия корректности постановки характеристической задачи типа Гурса для гиперболического уравнения и системы уравнений гиперболического типа третьего порядка с некратными характеристиками.

3. Построено корректное решение характеристической задачи для системы уравнений гиперболического типа третьего порядка, не содержащей производных меньше третьего порядка, с некратными характеристиками в случае коммутирующих матричных коэффициентов.

4. Для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками, не содержащего производных меньше третьего порядка, построено регулярное решение задачи Коши в виде, аналогичном формуле Даламбера.

5. В явном виде получено регулярное решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа третьего порядка, не содержащей производных меньше третьего порядка, с некратными характеристиками в случае коммутирующих матричных коэффициентов.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] *Яковлева, Ю. О.* Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными / *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физ.-мат. науки. — 2011. — № 3(24). — С. 35–41.

[2] *Яковлева, Ю. О.* Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками / *Ю. О. Яковлева* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физ.-мат. науки. — 2012. — № 1(26). — С. 247–250.

[3] *Яковлева, Ю. О.* Одна характеристическая задача для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками/ *Ю. О. Яковлева* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физ.-мат. науки. — 2012. — № 3 (28). — С. 180–183.

[4] *Яковлева, Ю. О.* Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками/ *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2013. — № 1, Ч.2. — С. 3–6.

[5] *Яковлева, Ю. О.* Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками/ *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физ.-мат. науки. — 2013. — № 1(30). — С. 99–106.

[6] *Яковлева, Ю. О.* Задача Коши для гиперболического уравнения и системы гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками/ *Ю. О. Яковлева* // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. — 2013. — № 11(154). — С. 109–117.

Другие публикации:

[7] *Яковлева, Ю. О.* Об одной характеристической задаче для системы гиперболических уравнений третьего порядка/ *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Материалы второго международного Российско-Узбекского симпозиума. Нальчик: Эльбрус, 2012. — С. 48.

[8] *Яковлева, Ю. О.* Характеристическая задача на плоскости для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка

/ *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // В сб.: Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 16-й Саратовской зимней школы. Саратов: Научная книга, 2012. — С. 7–8.

[9] *Яковлева, Ю. О.* Характеристическая задача для системы гиперболических уравнений третьего порядка на плоскости/ *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // В сб.: Материалы третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения». Самара: СамГТУ, 2012. — С. 36.

[10] *Яковлева, Ю. О.* Характеристическая задача для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками / *Ю. О. Яковлева* // В сб.: Математика. Экономика. Образование. Материалы XX Международной конференции. Ростов н/Дону, 2012. С. 89–90.

[11] *Яковлева, Ю. О.* Задача Коши для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными/ *Ю. О. Яковлева* // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. девятой Всероссийской научной конф. с международным участием. — Ч.3. Самара: СамГТУ, 2013. — С. 96–99.

[12] *Яковлева, Ю. О.* Решение задачи Коши для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений четвертого порядка с двумя независимыми переменными методом Римана / *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. девятой Всероссийской научной конф. с международным участием. — Ч.3. Самара: СамГТУ, 2013. — С. 7–10.

[13] *Яковлева, Ю. О.* Задача Коши для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с некратными характеристиками / *Ю. О. Яковлева* // В сб. материалов международной конференции: Дифференциальные уравнения и их приложения. — Белгород: БелГУ, 2013. — С. 220.

[14] *Яковлева, Ю. О.* Краевые задачи для систем гиперболических дифференциальных уравнений порядка выше второго / *Ю. О. Яковлева, А. А. Андреев* // В сб. материалов международной конференции: Дифференциальные уравнения и их приложения. — Белгород: БелГУ, 2013. — С. 15.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета Д 212.015.08
ФГАОУ ВПО НИУ «БелГУ» (протокол №11 от 16.10.2013г.)
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ №965.
ФГБОУ ВПО «СамГТУ»
Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.